

TUTORAT 1 : CALCUL TENSORIEL

Frédéric Chevy – chevy@lkb.ens.fr

<http://www.lkb.ens.fr/~chevy/Tutorat/Tut.html>

Les *tenseurs* sont d'une grande importance en physique puisqu'on les retrouve dans des domaines aussi divers que la mécanique, la relativité générale ou bien la théorie quantique des champs : Leurs propriétés mathématiques traduisent en effet l'invariance des phénomènes physiques vis-à-vis d'un changement de coordonnées utilisés pour les décrire.

1 Règles de sommation d'Einstein

On se place dans $\mathbb{R}^3$ muni d'une base orthonormée $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$. On considère un vecteur $\mathbf{x}$ de coordonnées $x_{j=1,2,3}$. Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice M_{ij} dans la base des $\mathbf{e}_i$. Si $\mathbf{x}' = f(\mathbf{x})$, on a :

$$x'_i = \sum_{j=1}^3 M_{ij} x_j.$$

La convention de sommation d'Einstein revient à récrire l'expression suivante en omettant le signe $\sum$ et en sommant sur les indices répétés. Autrement dit, on écrit :

$$x'_i = M_{ij} x_j.$$

1. Écrire à l'aide des conventions d'Einstein : $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$, $\text{tr}(M)$.
2. Dédire de la question précédente que pour toutes matrices M et M' , on a $\text{Tr}(M \cdot M') = \text{Tr}(M' \cdot M)$.
3. On définit le tenseur totalement antisymétrique (ou tenseur de Levi-Civita) ϵ_{ijk} par :

$$\begin{aligned}\epsilon_{123} &= 1 \\ \epsilon_{ijk} &= -\epsilon_{jik} = -\epsilon_{ikj}\end{aligned}$$

- (a) Montrer que si $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$, alors :

$$c_i = \epsilon_{ijk} a_j b_k.$$

- (b) Montrer que $\epsilon_{ijk} \epsilon_{imn} = \delta_{jm} \delta_{kn} - \delta_{jn} \delta_{km}$.

- (c) En déduire que $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$.

4. Soit M une matrice. On pose $\Delta_{ijk} = \epsilon_{i'j'k'} M_{i'i} M_{j'j} M_{k'k}$.
- (a) Montrer que Δ_{ijk} est totalement antisymétrique et en déduire que $\Delta_{ijk} = \Delta \epsilon_{ijk}$, où Δ est un réel (on admettra qu'il s'agit du déterminant de M).
 - (b) Montrer que $\Delta = \epsilon_{ijk} \Delta_{ijk} / 6$.
 - (c) On pose $M_{ij} = \delta_{ij} + \alpha_{ij}$. Déduire des questions précédentes que :

$$\det(M) = 1 + \text{Tr}(\alpha) + o(\alpha).$$

2 Changement de base

On considère deux bases orthonormées $\mathbf{e}_i$ et $\mathbf{e}'_j$ reliées par la relation de changement de base :

$$\mathbf{e}_i = R_{ji} \mathbf{e}'_j \quad \mathbf{e}'_i = P_{ji} \mathbf{e}_j.$$

1. Montrer que $P_{ij} = R_{ji}$, $R_{ki} R_{kj} = P_{ki} P_{kj} = \delta_{ij}$.
2. Soit $\mathbf{x}$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$ dont on note x_i (resp. x'_i) ses coordonnées dans la base $\mathbf{e}_i$ (resp. $\mathbf{e}'_i$). Montrer que $x'_i = R_{ij} x_j$.
3. Plus généralement, on dit que $T_{i_1 i_2 \dots i_m}$ est un tenseur de rang m si par changement de base il se transforme en T' défini par :

$$T'_{i_1 i_2 \dots i_m} = R_{i_1 j_1} R_{i_2 j_2} \dots R_{i_m j_m} T_{j_1 j_2 \dots j_m}.$$

- (a) Montrer que la matrice M_{ij} d'une application linéaire est un tenseur de rang 2.
 - (b) Montrer que δ_{ij} est un tenseur de rang 2 invariant par changement de base.
 - (c) *Contraction* : Soit $T_{i_1 i_2 \dots i_m}$ un tenseur de rang m . Montrer que $T_{i_1 i_2 \dots i_m}$ est un tenseur de rang $m - 2$. En déduire que la trace d'une matrice 3×3 est un tenseur de rang 0 (un scalaire) invariant par changement de base.
 - (d) *Produit tensoriel* : Soient $T^{(1)}_{i_1 i_2 \dots i_m}$ et $T^{(2)}_{j_1 j_2 \dots j_n}$ deux tenseurs de rang m et n . Montrer que $T^{(3)}_{i_1 i_2 \dots i_m j_1 j_2 \dots j_n} = T^{(1)}_{i_1 i_2 \dots i_m} T^{(2)}_{j_1 j_2 \dots j_n}$ est un tenseur de rang $n + m$ appelé produit tensoriel de $T^{(1)}$ et $T^{(2)}$. On le note $T^{(3)} = T^{(1)} \otimes T^{(2)}$.
4. *Pseudo-tenseurs*. On dit que $T_{i_1 i_2 \dots i_m}$ est un pseudo-tenseur s'il se transforme comme :

$$T'_{i_1 i_2 \dots i_m} = \det(R) R_{i_1 j_1} R_{i_2 j_2} \dots R_{i_m j_m} T_{j_1 j_2 \dots j_m}.$$

- (a) Montrer que ϵ_{ijk} est un pseudo-tenseur d'ordre 3 invariant par changement de base.
- (b) Soient $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ deux vecteurs (tenseurs d'ordre 1). Montrer que $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ est un pseudo-vecteur.
- (c) Montrer que ϵ_{ijk} est un pseudo-tenseur de rang 3.
- (d) Soit un tenseur de rang 2 antisymétrique A_{ij} . On pose $V_i = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} A_{jk}$. Montrer que V_i est un pseudo-vecteur et que l'on peut inverser cette relation pour obtenir $V_i = \epsilon_{ijk} V_k$. En déduire un isomorphisme entre les tenseurs antisymétriques et les vecteurs.