

**LE PAYSAGE DIRIGÉ**  
[d'après Duncan Dauvergne, Janosch Ortmann et Bálint Virág]  
par **Guillaume Barraquand**

## 1. Introduction

Soit  $\mathcal{S}_n$  le groupe des permutations de  $\{1, \dots, n\}$  et  $\sigma \in \mathcal{S}_n$ . On dit que  $\sigma(i_1), \dots, \sigma(i_L)$  est une sous-suite croissante de  $\sigma$  si  $i_1 < \dots < i_L$  et  $\sigma(i_1) < \dots < \sigma(i_L)$ . Notons  $L_n(\sigma)$  l'entier maximal  $L$  pour lequel il existe une sous-suite croissante de longueur  $L$ . Lorsque  $\sigma$  est choisie au hasard uniformément dans  $\mathcal{S}_n$ , et que  $n$  tend vers l'infini, comment se comporte  $L_n(\sigma)$ , la longueur de la plus longue sous-suite croissante? Ulam (1961) fut le premier à poser cette question. En s'appuyant sur des simulations numériques, il conjectura qu'il existe une constante  $c$  telle que

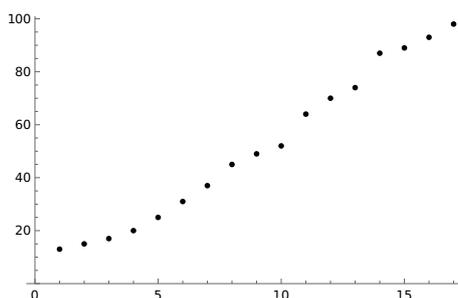
$$\frac{\mathbb{E}[L_n(\sigma)]}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} c.$$

L'existence de la limite fut démontrée rigoureusement une dizaine d'années plus tard par Hammersley (1972). Quant à la valeur de la constante, on sait que  $c = 2$  depuis les travaux de Logan et Shepp (1977) et de Vershik et Kerov (1977). La question de la loi des fluctuations de  $L_n(\sigma)$  autour de la moyenne a été résolue vingt ans plus tard par Baik, Deift et Johansson (1999). Les fluctuations sont d'ordre  $n^{1/6}$  et ne sont pas gaussiennes, mais

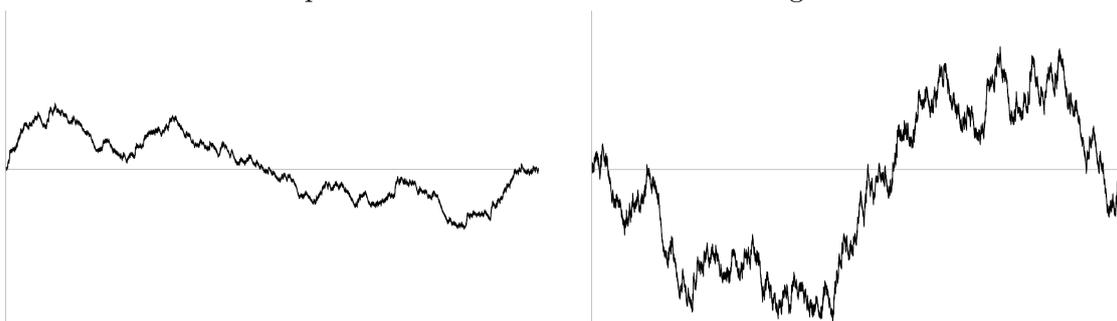
$$\frac{L_n(\sigma) - 2\sqrt{n}}{n^{1/6}}$$

converge vers la distribution de Tracy–Widom, introduite pour décrire les fluctuations de la plus grande valeur propre de matrices aléatoires hermitiennes (Tracy et Widom, 1994). La preuve de ce résultat, qui est particulièrement élégante, a débouché sur de nombreux développements mathématiques, constituant même un nouveau sous-domaine des probabilités : les *probabilités intégrables*.

Au delà de la plus longue sous-suite croissante, on peut aussi s'intéresser au comportement de la, ou des, plus longues sous-suites croissantes  $\sigma(i_1), \dots, \sigma(i_L)$ . Puisque  $\sigma$  et  $\sigma^{-1}$  ont la même loi, la plus longue sous-suite croissante suit la même loi de probabilité que la suite de ses indices  $i_1 < \dots < i_L$ . La figure 1(A) montre une simulation de cette suite d'entiers aléatoires pour  $n = 100$ . En reliant les points, on obtient une courbe aléatoire continue dont on voudrait connaître la loi lorsque  $n$  tend vers l'infini. En première



(A) Valeurs des indices  $i_1, \dots, i_k$  de la plus longue sous-suite croissante d'une permutation aléatoire uniforme de longueur  $n = 100$ .



(B) Le graphe de  $t \mapsto I_n(t)$  pour  $n = 10^7$ . (C) Le graphe de  $t \mapsto J_n(t)$  pour  $n = 10^7$ .

FIGURE 1. Comparaison entre la géodésique du paysage dirigé et un pont brownien.

approximation, les points semblent s'aligner le long d'une droite, mais après centrage et renormalisation, on obtient une trajectoire erratique dont la figure 1(B) montre une simulation.

À titre de comparaison, considérons un ensemble de  $2\sqrt{n}$  entiers  $j_1 < \dots < j_{2\sqrt{n}}$  choisis au hasard uniformément parmi les entiers de 1 à  $n$ . En définissant

$$(1) \quad J_n(t) = \frac{j_{\lfloor 2t\sqrt{n} \rfloor} - tn}{n^{3/4}},$$

un résultat de Donsker (1952) montre que  $J_n$  converge vers un pont brownien (c'est-à-dire un mouvement brownien défini sur l'intervalle  $[0, 1]$  démarrant en  $B(0) = 0$  et conditionné à terminer en  $B(1) = 0$ , voir figure 1(C)).

Revenons à la plus longue sous-suite croissante, ou plutôt la suite de ses indices  $i_1 < \dots < i_L$ . Ces entiers ne ressemblent pas du tout à  $L$  entiers tirés uniformément. En effet, la manière correcte de renormaliser cette suite est différente de (1). En définissant

$$(2) \quad I_n(t) = \frac{i_{\lfloor 2t\sqrt{n} \rfloor} - tn}{2n^{5/6}},$$

Dauvergne, Ortmann et Virág (2022) ont démontré que  $I_n$  converge vers une courbe fractale bien particulière, illustrée pour  $n = 10^7$  sur la figure 1(B). Fort différente d'un pont brownien, elle est définie comme la géodésique associée à une géométrie plane

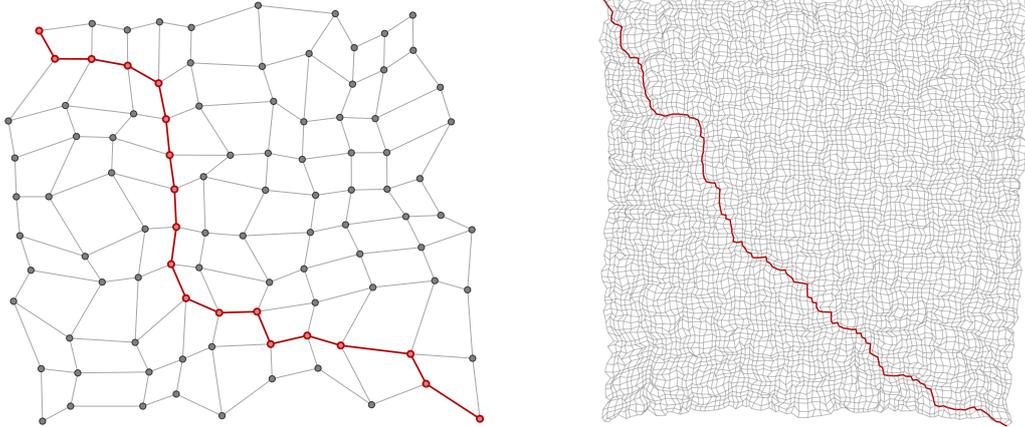


FIGURE 2. Gauche : le graphe  $\mathbb{Z}^2$  muni de distances aléatoires sur les arêtes et une géodésique entre deux points. Droite : Idem, à plus grande échelle.

aléatoire appelée le *paysage dirigé*. L'objectif de cet exposé est d'expliquer comment construire cet objet.

## 2. Contexte

Loin de concerner seulement les permutations aléatoires, le paysage dirigé décrit la limite d'échelle de nombreux modèles en physique statistique : percolation de premier ou dernier passage, modèles de croissance d'interface, systèmes de particules en interaction, etc.

### 2.1. Géométrie plane aléatoire

Le paysage dirigé décrit la limite d'échelle de distances aléatoires. Pour comprendre ce que cela signifie, considérons d'abord une perturbation aléatoire de la distance euclidienne sur  $\mathbb{Z}$ . Supposons par exemple que la distance entre les points  $i$  et  $i + 1$  est égale à  $w_i$ , où les  $w_i$  sont des variables aléatoires indépendantes prenant la valeur 1 ou 3 avec égale probabilité. Comme pour n'importe quel graphe, on définit la distance entre  $x$  et  $y$  comme le minimum sur les chemins de la somme des distances parcourues le long du chemin. Ainsi, pour  $x \leq y \in \mathbb{Z}$ ,  $d(x; y) = \sum_{i=x}^{y-1} w_i$ , et à grande échelle, lorsque  $n$  tend vers l'infini,

$$(3) \quad d(xn^2; yn^2) = 2n^2(y - x) + n(B(y) - B(x)) + o(n),$$

où  $B$  est un mouvement brownien standard. À quelques constantes près, le résultat reste vrai quelle que soit la loi des variables  $w_i$ , pourvu qu'elles aient une variance finie. Le mouvement brownien est donc la limite d'échelle universelle de distances aléatoires en dimension 1. La notion d'« universalité », empruntée à la physique statistique, signifie que la limite d'échelle ne dépend pas des détails du modèle.

Le paysage dirigé est la limite d'échelle universelle de géométries aléatoires en dimension 2 définies à partir de variables indépendantes. Contrairement au cas de la dimension 1, l'universalité en dimension 2 est seulement conjecturée. Plus précisément, considérons des variables  $w_e$  de même loi que précédemment, mais maintenant indexées par les arêtes de  $\mathbb{Z}^2$ . La distance est définie comme précédemment :

$$(4) \quad d(p; q) = \min_{\gamma: p \leftrightarrow q} \left\{ \sum_{e \in \gamma} w_e \right\},$$

où le minimum est pris sur les chemins dans  $\mathbb{Z}^2$  reliant  $p$  à  $q$ . La figure 2 est une illustration de cette géométrie.

Comment renormaliser cette distance aléatoire afin d'obtenir un objet universel ? Puisqu'on s'intéresse au comportement de géodésiques dans une direction, fixons un vecteur  $\vec{v}$  et posons  $p = n^{1/\chi} s \vec{v}$  et  $q = n^{1/\chi} t \vec{v}$  où  $s, t \in \mathbb{R}$  et  $\chi$  est un exposant à déterminer de sorte que les fluctuations de  $d(p, q)$  soient d'ordre  $n$ , comme dans (3). L'analyse de certains modèles (Baik, Deift et Johansson, 1999 ; Johansson, 2001a, 2000) montre que l'exposant correct est  $\chi = 1/3$ . Mais il ne suffit pas de caractériser les distances le long d'une direction, on voudrait aussi comprendre les fluctuations des distances lorsqu'on fait varier les points  $p$  et  $q$  dans la direction orthogonale à  $\vec{v}$ . Posons

$$p = n^{1/\chi} s \vec{v} + n^{\xi/\chi} x \vec{u} \text{ et } q = n^{1/\chi} t \vec{v} + n^{\xi/\chi} y \vec{u},$$

où le vecteur  $\vec{u}$  est orthogonal à  $\vec{v}$  et  $\xi$  est un autre exposant à choisir afin que les distances  $d(p; q)$  aient des corrélations non-triviales lorsque  $x$  et  $y$  varient.

En géométrie euclidienne, un chemin entre deux points à distance  $n^\alpha$  dont la longueur est  $n^\alpha + n$  dévie par rapport à une ligne droite d'une distance  $O(n^\beta)$  avec  $\beta = \frac{\alpha+1}{2}$ . Cela suggère que les exposants  $\chi$  et  $\xi$  vérifient la relation  $\chi = 2\xi - 1$ , appelée relation KPZ (prouvée par Chatterjee (2013) sous certaines hypothèses).

Ainsi, on s'attend à ce que pour toute direction  $\vec{v}_\circ$ , il existe des vecteurs  $\vec{v} \parallel \vec{v}_\circ$ ,  $\vec{u} \perp \vec{v}_\circ$  et une constante  $c$  telle que lorsque  $n \rightarrow \infty$ ,

$$(5) \quad d\left(n^3 s \vec{v} + n^2 x \vec{u}; n^3 t \vec{v} + n^2 y \vec{u}\right) = (t - s)n^3 c - n\mathcal{L}(x, s; y, t) + o(n).$$

En outre, on s'attend à ce que le processus  $\mathcal{L}(x, s; y, t)$ , le paysage dirigé, soit universel : non seulement  $\mathcal{L}$  ne doit pas dépendre de la loi des variables  $w_e$ , mais on pourrait aussi remplacer  $\mathbb{Z}^2$  par un autre graphe planaire. Comme pour le théorème central limite, qui requiert seulement que les variables aléatoires soient indépendantes et qu'elles aient une variance finie, l'universalité est attendue ici sous des hypothèses générales. On sait qu'il faut notamment que le cinquième moment de la loi de  $w_e$  existe :  $\mathbb{E}[w_e^5] < \infty$ . Aujourd'hui, la convergence (5) n'est établie que pour certains modèles particuliers.

Comme le mouvement brownien, le paysage dirigé obéit à une propriété d'invariance d'échelle : pour tout  $\sigma > 0$ ,

$$\mathcal{L}(\sigma^2 x, \sigma^3 s; \sigma^2 y, \sigma^3 t) \stackrel{(\text{loi})}{=} \sigma \mathcal{L}(x, s; y, t).$$

La présence du signe  $-$  dans (5) peut paraître surprenante. C’est une simple convention qui vient du fait que le paysage dirigé a été à l’origine introduit comme limite d’un modèle défini à partir d’un maximum au lieu d’un minimum comme dans (4). Le paysage dirigé est « dirigé » au sens où il correspond à la limite des distances le long d’une direction  $v_0$ . De plus, dans la suite de ce texte,  $\mathcal{L}(x, s; y, t)$  sera défini de telle sorte que (5) soit vraie pour  $s \leq t$ , et lorsque  $s > t$ , on posera  $\mathcal{L}(x, s; y, t) = -\infty$ . Cette brisure de symétrie dans la définition permet à  $-\mathcal{L}$  de vérifier l’inégalité triangulaire.

## 2.2. La classe d’universalité de Kardar–Parisi–Zhang

De nombreuses situations physiques décrites par la croissance d’une interface, par exemple dans des phénomènes de propagation (du feu, d’une épidémie, ...), ou des processus d’aggrégation de matière (par exemple la chute de neige sur une surface), obéissent à des lois similaires. Ce surprenant phénomène d’universalité a été étudié par Kardar, Parisi et Zhang (1986), qui ont calculé les exposants caractéristiques décrivant les corrélations des fluctuations en espace et en temps, à partir de l’étude d’un modèle jouet : une équation aux dérivées partielles stochastique aujourd’hui appelé équation KPZ. L’interface est modélisée par une fonction  $h(x, t)$ , dépendant du temps  $t$  et d’une position en espace  $x$ , qui obéit à

$$(6) \quad \partial_t h(x, t) = \frac{1}{2} \partial_{xx} h(x, t) + \frac{1}{2} (\partial_x h(x, t))^2 + \beta \xi(x, t)$$

où  $\xi(x, t)$  désigne un bruit blanc espace-temps. Nous ne définirons pas précisément le bruit blanc ici, mais rappelons seulement qu’il s’agit d’un terme de bruit aléatoire, décorrélé en espace et en temps. De plus, nous nous restreignons dans ce texte à un espace de dimension 1, de sorte que l’espace-temps est de dimension 2.

Il n’est pas évident de donner un sens à l’équation (6). Le problème vient du fait que le terme de bruit blanc suggère que les solutions de (6) ont, au mieux, la même régularité que le mouvement brownien, c’est-à-dire Hölder- $(1/2^-)$ , et qu’on peut donc définir  $\partial_x h$  ou  $\partial_t h$  par le calcul stochastique, mais  $(\partial_x h)^2$  n’est pas bien défini. Des progrès décisifs ont été accomplis pendant les quinze dernières années pour faire face à ce type de difficulté. En particulier Hairer (2013) donne un cadre général permettant de définir une solution de (6), en utilisant ce qui est devenu la théorie des structures de régularité (Hairer, 2014) (voir par exemple l’exposé au séminaire Bourbaki de Zambotti (2014)). D’autres approches existent, notamment en utilisant la notion de distributions para-contrôlées (Gubinelli, Imkeller et Perkowski, 2015).

Il existe une autre manière de définir une solution de (6), qui est moins satisfaisante car elle ne marche que pour cette équation, mais qui a le mérite d’être correcte et d’éclairer le lien entre géométrie planaire aléatoire et modèles de croissance d’interface. On peut résoudre (6) en utilisant le changement de variable  $h(x, t) = \log Z(x, t)$  et en posant que  $Z(t, x)$  est la solution de

$$(7) \quad \partial_t Z(x, t) = \frac{1}{2} \partial_{xx} Z(x, t) + \beta Z(x, t) \xi(x, t),$$

qui est l'équation que l'on obtiendrait naïvement par changement de variable en ignorant tous les problèmes de régularité. Contrairement à (6), l'existence et l'unicité de solutions de (7) peuvent être démontrées en utilisant les outils standards du calcul stochastique.

Par la formule de Feynman–Kac, la solution  $Z(x, t)$  s'exprime comme une moyenne prise sur des trajectoires browniennes :

$$(8) \quad Z(x, t) = \mathbb{E}_x \left[ Z_0(\gamma_t) e^{\beta \int_0^t \xi(\gamma_s, t-s) ds} \right]$$

où l'espérance est prise sur le mouvement brownien  $\gamma$  issu de  $x$ . À température nulle, c'est-à-dire lorsque  $\beta \rightarrow \infty$ , et pour une condition initiale de la forme  $Z_0(x) = e^{\beta h_0(x)}$ , (8) suggère que

$$(9) \quad \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{\log Z(t, x)}{\beta} \approx \max_y \left\{ h_0(y) + \max_{\gamma: (y,0) \rightarrow (x,t)} \left\{ \int_0^t \xi(\gamma_s, t-s) ds \right\} \right\}.$$

Lorsque  $\xi$  est un bruit blanc, le maximum dans (9) n'est pas bien défini, car l'intégrale dans (8) n'est elle-même pas bien définie. Il est néanmoins possible de définir une formule de Feynman–Kac pour ce modèle en utilisant l'exponentielle de Wick, et par ailleurs, des équations analogues à (9) peuvent être démontrées pour des variantes discrètes de l'équation KPZ. Ainsi, même si (9) est seulement heuristique, cela explique en quoi la solution de l'équation KPZ  $h(x, t) = \log Z(x, t)$  est liée à une géométrie plane aléatoire.

Depuis le travail fondateur de Kardar, Parisi et Zhang (1986), la classe d'universalité KPZ a été étudiée dans des milliers d'articles, en physique et en mathématique. On connaît notamment la loi de probabilité de solutions particulières de (6), leur asymptotique, et il est bien établi que de nombreux modèles de physique statistique font partie de la classe KPZ, au sens où à grande échelle, ces modèles fluctuent selon les mêmes lois de probabilités. Cela concerne notamment des modèles de croissance d'interface, des systèmes de particules en interaction, des modèles de percolation de dernier passage, le modèle à six sommets stochastique, des modèles de pavages aléatoires du plan, des modèles de polymères dirigés, etc. Certaines des prédictions théoriques ont été vérifiées expérimentalement. Pour plus de détails, nous renvoyons aux revues de Corwin (2012, 2014), Halpin-Healy et Takeuchi (2015), ou aux notes de Spohn (2017).

La conjecture centrale du domaine est que tout modèle de la classe KPZ (qu'il conviendrait de définir précisément), en supposant qu'il soit décrit par une fonction aléatoire  $H(x, t)$ , converge à grande échelle vers un processus de Markov universel  $\mathfrak{h}(x, t)$  appelé *point fixe KPZ*, au sens où on aurait la convergence en loi suivante (dans un espace fonctionnel à déterminer). Lorsque  $n \rightarrow +\infty$ ,

$$n^{-1} H(xn^2, tn^3) - c_n(x, t) \Rightarrow \mathfrak{h}(x, t),$$

où  $c_n(t, x)$  est une fonction déterministe qui dépend du modèle considéré. Si l'on croit la conjecture, le point fixe KPZ peut être défini comme la limite de n'importe lequel des modèles dont on sait qu'ils sont dans la classe KPZ. C'est l'approche de Matetski, Quastel et Remenik (2021) qui ont défini le point fixe KPZ comme un processus de

Markov dans l'espace des fonctions semi-continues inférieurement, en prenant la limite d'un modèle appelé processus d'exclusion simple totalement asymétrique (TASEP).

Le point fixe KPZ peut aussi être défini à partir du paysage dirigé, par l'équation

$$(10) \quad \mathfrak{h}(t, x) = \sup_{y \in \mathbb{R}} \{ \mathfrak{h}(y, 0) + \mathcal{L}(y, 0; x, t) \}.$$

Bien que le paysage dirigé ait initialement été construit à partir de la limite d'un autre modèle (la percolation de dernier passage brownienne), il est établi aujourd'hui que les deux définitions du point fixe KPZ définissent bien le même objet.

Dans la section suivante, nous introduirons le modèle de percolation de dernier passage, expliquerons ses liens avec un célèbre théorème dû à Pitman et nous donnerons une définition précise du paysage dirigé. En section 4, nous nous concentrerons sur une propriété d'isométrie de la transformation de Pitman qui est la clé pour construire rigoureusement le paysage dirigé. Enfin, dans la section 5, nous énoncerons des théorèmes de convergence, et pour conclure, nous reviendrons vers les plus longues sous-suites croissantes de permutations aléatoires.

### 3. Percolation de dernier passage brownienne

#### 3.1. Modèle de O'Connell et Yor

Comme nous l'avons évoqué plus haut, le paysage dirigé est sensé décrire la limite d'échelle universelle de distances aléatoires en dimension 2. Pour le définir rigoureusement, Dauvergne, Ortmann et Virág (2022) considèrent un modèle de percolation de dernier passage dans un environnement brownien, introduit initialement par O'Connell et Yor (2001). Ce modèle peut être vu comme l'opposé d'une distance aléatoire sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ .

On note  $\mathcal{C}$  l'espace des fonctions continues sur  $\mathbb{R}$ .

**DÉFINITION 3.1.** — *Pour deux points  $p = (x, n)$  à  $q = (y, m)$  dans  $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ , on écrira  $p \nearrow q$  si  $x \leq y$  et  $n \geq m$ . Pour  $p \nearrow q$ , un chemin de  $p$  à  $q$  est déterminé par une suite de réels  $x = t_n \leq t_{n-1} \leq \dots \leq t_m \leq t_{m-1} = y$ , comme sur la figure 3. Étant donnée une famille de fonctions  $f = (f_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \mathcal{C}^{\mathbb{Z}}$ , on définit la longueur d'un chemin par*

$$|\pi|_f = \sum_{i=m}^n f_i(t_{i-1}) - f_i(t_i).$$

Lorsque  $p = q$ , c'est-à-dire  $x = y$  et  $n = m$ , on a  $t_{n-1} = t_n$  et  $|\pi|_f = 0$ .

Au lieu de définir la distance entre deux points de  $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$  comme la longueur minimale d'un chemin reliant ces deux points, nous allons considérer une variante de la notion de distance, définie à partir d'un supremum. On appellera *distance dirigée* sur un ensemble  $S$  une fonction  $d: S^2 \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  telle que

1.  $d(p, p) = 0$  pour tout  $p \in S$ ,
2.  $d(p, q) + d(q, r) \geq d(p, r)$  pour tout  $p, q, r \in S$ .

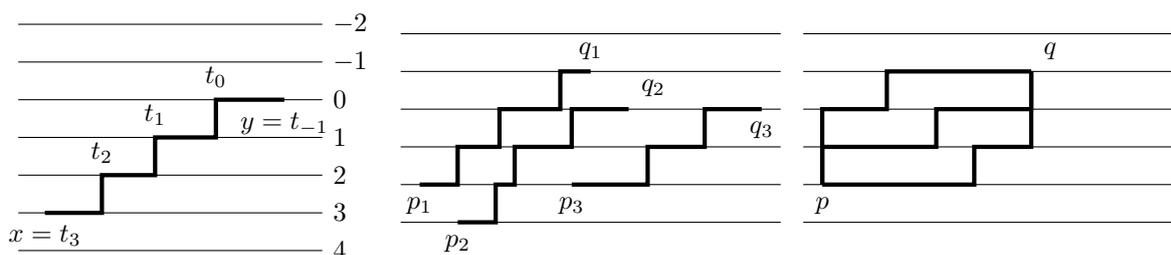


FIGURE 3. Gauche : Un exemple de chemin dans  $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$  reliant les points  $(x, n)$  à  $(y, m)$  en passant par les points  $(t_i, i)$ . Milieu : Un exemple d'ensemble de chemins qui ne se coupent pas. Droite : Chemins qui ne se coupent pas mais partent et arrivent au même point.

Notons qu'une distance dirigée peut prendre des valeurs négatives, et que  $d(p, q)$  n'est pas forcément égale à  $d(q, p)$ . De plus, on dira que  $d$  est une *anti-distance dirigée* si  $-d$  est une distance dirigée.

DÉFINITION 3.2. — Pour  $p, q \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$  avec  $p \nearrow q$ , on définit le temps de dernier passage de  $p = (x, n)$  à  $q = (y, m)$  dans l'environnement  $f$  par

$$f[p \rightarrow q] = \sup_{\pi: p \rightarrow q} \{|\pi|_f\}.$$

On dit que  $\pi$  est une géodésique de  $p$  à  $q$  si  $|\pi|_f = f[p \rightarrow q]$ .

On montre aisément que la fonction définie sur  $(\mathbb{R} \times \mathbb{Z})^2$  définie par

$$d(p, q) := \begin{cases} f[p \rightarrow q] & \text{si } p \nearrow q \\ -\infty & \text{sinon,} \end{cases}$$

est une anti-distance dirigée.

Soit  $B = (B_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  une famille de mouvements browniens sur  $\mathbb{R}$ , avec  $B_n(0) = 0$ . Pour  $p = (0, n)$  et  $q = (x, 1)$ , les définitions 3.1 et 3.2 impliquent que le temps de dernier passage dans l'environnement  $B$  s'écrit comme

$$(11) \quad B[p \rightarrow q] = \sup_{0=t_n \leq t_{n-1} \leq \dots \leq t_0=x} \left\{ \sum_{i=1}^n B(t_{i-1}) - B(t_i) \right\}.$$

Nous allons définir le paysage dirigé comme la limite d'échelle des temps de dernier passage  $B[p \rightarrow q]$ . Comme nous l'avons déjà évoqué dans l'introduction, nous devons considérer des points  $p$  et  $q$  à distance d'ordre  $n^3$  le long d'une certaine direction, avec des déviations transversales de l'ordre de  $n^2$ , et diviser les fluctuations par  $n$ . Soit  $\mathbb{R}_\uparrow^4$  l'ensemble des points  $(x, s; y, t)$  de  $\mathbb{R}^4$  tels que  $s \leq t$ . Pour  $(x, s; y, t) \in \mathbb{R}_\uparrow^4$ , on définit

$$(12) \quad (x, s)_n = (sn^3 + 2xn^2, \lfloor -sn^3 \rfloor), \quad (y, t)_n = (tn^3 + 2yn^2, \lfloor -tn^3 \rfloor)$$

de sorte que pour  $s < t$  et pour  $n$  assez grand,  $(x, s)_n \nearrow (y, t)_n$ . Nous pouvons maintenant énoncer le théorème principal, bien que certaines définitions n'arriveront que dans les sections suivantes.

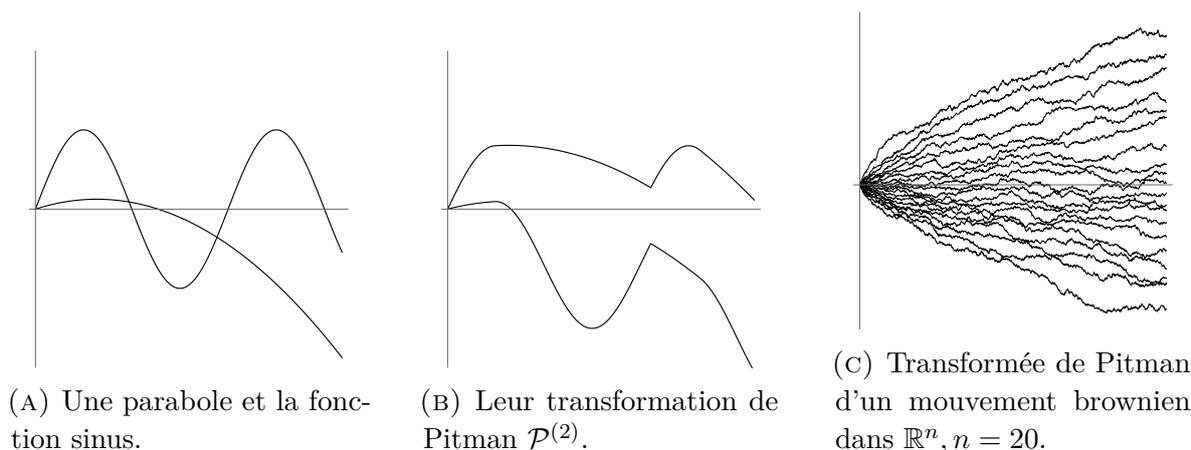


FIGURE 4. La transformation de Pitman.

THÉORÈME 3.3 (Dauvergne, Ortmann et Virág, 2022). — *Il existe un couplage de  $B$  et  $\mathcal{L}$ , une anti-distance dirigée sur  $\mathbb{R}^2$ , tel que pour  $(x, s; y, t) \in \mathbb{R}_\uparrow^4$ ,*

$$(13) \quad B[(x, s)_n \rightarrow (y, t)_n] = 2(t - s)n^3 + 2(y - x)n^2 + n(\mathcal{L}(x, s; y, t) + o_n(x, s; y, t)),$$

où  $o_n(x, s; y, t)$  est une fonction aléatoire tendant vers 0 au sens où pour tout compact  $K$  de  $\mathbb{R}_\uparrow^4$ , il existe  $a > 1$  tel que  $\mathbb{E}[a^{\sup_K |o_n|^{3/4}}] \rightarrow 1$ .

Dans la suite de ce texte, nous allons expliquer les idées principales de la construction du processus  $\mathcal{L}(x, s; y, t)$ .

### 3.2. Transformées de Pitman

Le temps de dernier passage de la définition 3.2 peut s'écrire d'une autre manière, au moyen d'une généralisation de la transformation de Pitman due à O'Connell et Yor (2002).

Soit  $X_t$  un mouvement brownien standard et  $M_t = \sup_{s \in [0, t]} X_s$ . D'après un célèbre théorème de Pitman (1975), le processus  $2M_t - X_t$  est un processus de Bessel, qui peut être vu comme un mouvement brownien conditionné à rester toujours positif. Afin d'énoncer une généralisation de ce résultat, on définit, pour  $f_1, f_2 \in \mathcal{C}$ , les opérations

$$f_1 \otimes f_2(t) = \inf_{0 \leq s \leq t} \{f_1(s) - f_1(0) + f_2(t) - f_2(s)\}$$

$$f_1 \odot f_2(t) = \sup_{0 \leq s \leq t} \{f_1(s) - f_1(0) + f_2(t) - f_2(s)\}.$$

La transformée de Pitman de  $f = (f_1, f_2) \in \mathcal{C}^2$  est alors définie par

$$\mathcal{P}^{(2)}f = (f_2 \odot f_1, f_1 \otimes f_2).$$

La transformation  $\mathcal{P}^{(2)}$  est une opération déterministe qui envoie deux fonctions continues sur deux fonctions continues ordonnées, comme on le voit sur la figure 4. Une première propriété remarquable de cette transformation est que  $\mathcal{P}^{(2)} \circ \mathcal{P}^{(2)} = \text{id}$ .

Notons

$$\mathbb{W}_n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_1 \geq \dots \geq x_n\}.$$

Le théorème de Pitman peut être reformulé de la manière suivante : Si  $B$  est un mouvement brownien dans  $\mathbb{R}^2$ , alors  $\mathcal{P}^{(2)}B$  est un mouvement brownien dans  $\mathbb{R}^2$  conditionné à rester dans la chambre de Weyl  $\mathbb{W}_2$ . Pour le constater, il suffit d'appliquer le théorème de Pitman original à  $X = B_1 - B_2$ , et utiliser le fait que si  $f_1(0) = f_2(0) = 0$ ,

$$f_2 \odot f_1 + f_1 \otimes f_2 = f_1 + f_2.$$

Plus généralement, pour  $f = (f_1, \dots, f_n) \in \mathcal{C}^n$  et  $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ , on définit

$$\mathcal{P}_i^{(n)} f = (f_1, \dots, f_{i-1}, \mathcal{P}^{(2)}(f_i, f_{i+1})_1, \mathcal{P}^{(2)}(f_i, f_{i+1})_2, f_{i+1}, \dots, f_n),$$

c'est-à-dire que  $\mathcal{P}_i^{(n)}$  agit sur  $f$  en appliquant une transformation de Pitman aux coordonnées  $i, i+1$ . Enfin, on définit la transformation de Pitman dans  $\mathbb{R}^n$  par

$$(14) \quad \mathcal{P}^{(n)} = \mathcal{P}_{n-1}^{(n)} \circ (\mathcal{P}_{n-2}^{(n)} \circ \mathcal{P}_{n-1}^{(n)}) \circ \dots \\ \dots \circ (\mathcal{P}_2^{(n)} \circ \dots \circ \mathcal{P}_{n-2}^{(n)} \circ \mathcal{P}_{n-1}^{(n)}) \circ (\mathcal{P}_1^{(n)} \circ \dots \circ \mathcal{P}_{n-1}^{(n)} \circ \mathcal{P}_{n-1}^{(n)}).$$

Cette définition implique que la première coordonnée de la transformation de Pitman est reliée à la percolation de dernier passage :

$$(15) \quad (\mathcal{P}^{(n)} f)_1(t) = f_n \odot f_{n-1} \odot \dots \odot f_1(t) = f[(0, n) \rightarrow (t, 1)],$$

qui, nous rappelons, est donnée explicitement par (11). Dans (15), les opérations doivent être effectuées de la gauche vers la droite, c'est-à-dire qu'on calcule d'abord le produit  $f_n \odot f_{n-1}$ , puis le produit  $(f_n \odot f_{n-1}) \odot f_{n-2}$ , etc.

*Remarque 3.4.* — La transformation  $\mathcal{P}_i^{(n)}$  peut être vue comme une opération qui réordonne les coordonnées  $i$  et  $i+1$ . La définition de  $\mathcal{P}^{(n)}$  en (14) peut alors être interprétée comme l'application de l'algorithme de tri à bulles sur les  $n$  coordonnées. Plus généralement, pour une permutation  $w \in \mathcal{S}_n$ , et une factorisation en transpositions de longueur minimale  $w = (i_1, i_1+1) \circ \dots \circ (i_k, i_k+1)$ , on peut définir la transformation de Pitman associée à  $w$  par  $\mathcal{P}_w^{(n)} = \mathcal{P}_{i_1}^{(n)} \circ \dots \circ \mathcal{P}_{i_k}^{(n)}$ . Biane, Bougerol et O'Connell (2005) ont démontré que les  $\mathcal{P}_i^{(n)}$  obéissent à des relations de tresses qui garantissent que la définition ne dépend pas de la factorisation de  $w$  choisie. La définition de  $\mathcal{P}^{(n)}$  en (14) correspond à  $\mathcal{P}_w^{(n)}$  lorsque  $w$  est la plus longue permutation, c'est-à-dire que  $(w(1), \dots, w(n)) = (n, n-1, \dots, 1)$ . Plus généralement, ce point de vue, inspiré du modèle des chemins de Littelmann en théorie des représentations, permet de définir la transformation de Pitman associée à d'autres groupes de Coxeter.

*Remarque 3.5.* — La transformation de Pitman et la percolation de dernier passage peuvent aussi être définies pour des fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  càdlàg sur  $\mathbb{R}$  (continues à droite, limite à gauche) ou des fonctions définies sur  $\mathbb{Z}$ . Dans ce dernier cas, la transformation  $\mathcal{P}^{(n)}$  est directement liée à la correspondance de Robinson–Schensted–Knuth (RSK). Habituellement, cette dernière est définie comme une bijection entre les matrices à

coefficients entiers  $W = (w_{j,i}) \in \mathbb{N}^{m \times n}$  et les couples  $(P, Q)$  de tableaux de Young semi-standards, où le tableau d'insertion  $P$  contient des entiers de  $\{1, \dots, m\}$  et le tableau d'enregistrement  $Q$  contient des entiers de  $\{1, \dots, n\}$ . Si l'on définit des fonctions  $f_i(j) = \sum_{k=1}^j w_{k,i}$  et qu'on note  $f = (f_1, \dots, f_n)$ , alors la fonction  $j \mapsto \mathcal{P}^{(n)}f(j)$  pour  $1 \leq j \leq m$  est une simple réécriture du tableau d'insertion  $P$  associée à  $W$  par la correspondance RSK (O'Connell, 2003). L'article de revue de Dauvergne, Nica et Virág (2022) décrit plus en détails les différentes manières d'appréhender la correspondance RSK.

### 3.3. Chemins qui ne se coupent pas

Nous avons vu que la première coordonnée de la transformée de Pitman est reliée à la percolation de dernier passage par l'équation (15). Qu'en est-il des autres coordonnées ?

Pour deux vecteurs  $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_k), \mathbf{q} = (q_1, \dots, q_k) \in (\mathbb{R} \times \mathbb{Z})^k$  avec  $p_i \nearrow q_i$ , un  $k$ -uplet de chemins de  $\mathbf{p}$  à  $\mathbf{q}$  qui ne se coupent pas est un  $k$ -uplet  $\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \dots, \pi_k)$  de chemins  $\pi_i: p_i \rightarrow q_i$ , tels que  $\pi_i$  est à gauche de  $\pi_j$  pour  $i < j$  et pour  $i \neq j$ ,  $\pi_i$  et  $\pi_j$  sont disjoints (sauf éventuellement sur un ensemble de mesure de Lebesgue nulle), comme illustré sur la figure 3. Pour un environnement  $f \in \mathcal{C}^{\mathbb{Z}}$ , on définit la longueur de  $\boldsymbol{\pi}$  par

$$|\boldsymbol{\pi}|_f = \sum_{i=1}^k |\pi_i|_f$$

et le temps de dernier passage

$$f[\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}] = \sup_{\boldsymbol{\pi}} |\boldsymbol{\pi}|_f,$$

où le supremum est pris sur les  $k$ -uplets de chemins qui ne se coupent pas. De plus, pour  $p \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ , on notera  $p^k = (p, \dots, p) \in (\mathbb{R} \times \mathbb{Z})^k$ . Nous pouvons maintenant généraliser (15) et écrire chacune des coordonnées de la transformée de Pitman en termes de percolation de dernier passage. En effet, on a pour tout  $f = (f_1, \dots, f_n)$  et pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,

$$\sum_{i=1}^k (\mathcal{P}^{(n)}f)_i(t) = f[(0, n)^k \rightarrow (t, 1)^k].$$

Autrement dit,  $(\mathcal{P}^{(n)}f)_1(t) = f[(0, n) \rightarrow (t, 1)]$  et pour tout  $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$ ,

$$(\mathcal{P}^{(n)}f)_k(t) = f[(0, n)^k \rightarrow (t, 1)^k] - f[(0, n)^{k-1} \rightarrow (t, 1)^{k-1}].$$

### 3.4. Mouvement brownien de Dyson

L'espace  $\mathcal{H}_n$  des matrices hermitiennes complexes de taille  $n \times n$  est un espace vectoriel réel de dimension  $n^2$  muni de la norme  $M \mapsto \sqrt{\text{Tr}(M^2)}$ . En identifiant  $\mathcal{H}_n$  à  $\mathbb{R}^{n^2}$  par

$$(m_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \leftrightarrow \left( (m_{ii})_{1 \leq i \leq n}, \left( \sqrt{2} \Re[m_{i,j}], \sqrt{2} \Im[m_{i,j}] \right)_{1 \leq i < j \leq n} \right),$$

le mouvement brownien sur  $\mathbb{R}^{n^2}$  définit un mouvement brownien  $(H_t)_{t \geq 0}$  sur  $\mathcal{H}_n$ . Concrètement, il s'agit d'une matrice hermitienne dont les entrées sont des mouvements browniens complexes indépendants, modulo la condition de symétrie. On rappelle aussi que

pour toute matrice  $M \in \mathcal{H}_n$ , son spectre  $\lambda(M) = (\lambda_1(M), \dots, \lambda_n(M))$  appartient à la chambre de Weyl  $\mathbb{W}_n$ .

**DÉFINITION 3.6.** — *Le mouvement brownien de Dyson (1962) est le processus  $t \mapsto \lambda(H_t)$ , où  $H_t$  est un mouvement brownien sur  $\mathcal{H}_n$ .*

Le mouvement brownien de Dyson est un processus de diffusion sur  $\mathbb{W}_n$  de générateur

$$(16) \quad \frac{1}{2}\Delta + \sum_{i \neq j} \frac{1}{\lambda_i - \lambda_j} \partial_{\lambda_i} = \frac{1}{2}\Delta + \nabla \log V \cdot \nabla,$$

où  $\nabla$  est le gradient,  $\Delta = \nabla \cdot \nabla = \sum_{i=1}^n \partial_{\lambda_i}^2$  et la fonction  $V(x) := \prod_{i < j} (x_i - x_j)$  est un déterminant de Vandermonde. La première forme du générateur en (16) signifie que chacun des  $\lambda_i(t)$  diffuse comme un mouvement brownien indépendant avec un terme de dérive égal à  $\sum_{i \neq j} \frac{1}{\lambda_i - \lambda_j}$ . La deuxième écriture en (16) suggère une interprétation à l'aide d'une transformation de Doob.

Plus précisément, on déduit de l'expression du générateur que la densité au temps  $t$  de  $\lambda(H_t)$ , notée  $\rho(t, \cdot)$ , est solution de l'équation aux dérivées partielles

$$(17) \quad \frac{\partial_t \rho(t, \lambda)}{V(\lambda)} = \frac{1}{2}\Delta \left( \frac{\rho(t, \lambda)}{V(\lambda)} \right).$$

On peut alors en déduire que la densité de transition du mouvement brownien de Dyson est

$$(18) \quad p_t(\mu, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi t)^n}} \frac{V(\lambda)}{V(\mu)} \det \left( e^{-\frac{(\lambda_i - \mu_j)^2}{2t}} \right)_{i,j=1}^n.$$

Cette formule a été prouvée par Johansson (2001b) en utilisant la formule de Harish-Chandra–Itzykson–Zuber et la méthode de Brézin et Hikami (1996).

Le déterminant dans (18) a une interprétation probabiliste. Par la formule de Karlin et McGregor (1959), il correspond à la densité de transition d'un mouvement brownien dans  $\mathbb{R}^n$  tué à la frontière de la chambre de Weyl. Quant à la fonction  $\lambda \mapsto V(\lambda)$ , c'est l'unique fonction harmonique positive sur la chambre de Weyl avec condition au bord de type Dirichlet, à multiplication par une constante près. C'est pourquoi le rapport de déterminants de Vandermonde en (18) est une transformée de Doob, qui correspond à conditionner les mouvements browniens à ne jamais sortir de la chambre de Weyl. Ainsi, le mouvement brownien de Dyson est un mouvement brownien conditionné à rester dans  $\mathbb{W}_n$ .

Revenons maintenant aux transformations de Pitman et à la percolation brownienne. Gravner, Tracy et Widom (2001) et Baryshnikov (2001) ont montré que le temps de dernier passage  $B[(0, n) \rightarrow (t, 1)]$  dans un environnement brownien, défini par (11), suit la même loi que  $\sqrt{t} \lambda_1(H)$ , où  $H \in \mathcal{H}_n$  est une matrice aléatoire hermitienne gaussienne. Ce résultat se généralise aux autres valeurs propres et à tout temps  $t$ .

THÉORÈME 3.7 (O’Connell et Yor (2002), Bougerol et Jeulin (2002))

Soit  $B$  un mouvement brownien standard dans  $\mathbb{R}^n$ . Sa transformée de Pitman  $\mathcal{P}^{(n)}B$  est un mouvement brownien standard conditionné à rester dans  $\mathbb{W}_n$  pour tout  $t \geq 0$ , c’est-à-dire le mouvement brownien de Dyson.

### 3.5. L’ensemble des lignes d’Airy

Soit  $H$  une matrice gaussienne dans  $\mathcal{H}_n$ , c’est-à-dire tirée aléatoirement avec la densité de probabilité  $\exp(-\text{Tr}(H^2)/2)dH$ . Tracy et Widom (1994) ont montré que

$$\mathbb{P}\left(\frac{\lambda_1 - 2\sqrt{n}}{n^{-1/6}} \leq s\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} F_{\text{TW}}(s)$$

où  $F_{\text{TW}}(s)$  est une distribution de probabilité explicite, aujourd’hui appelée loi de Tracy–Widom. Plus généralement, la suite des valeurs propres  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$  converge dans la même échelle vers un processus ponctuel aléatoire appelé processus d’Airy. Au lieu de considérer une seule matrice dans  $\mathcal{H}_n$ , on peut aussi considérer les valeurs propres d’un mouvement brownien dans  $\mathcal{H}_n$ , c’est-à-dire le processus  $\mathcal{P}^{(n)}B(t)$ .

Lorsque  $n$  tend vers l’infini, on a la convergence en loi

$$(19) \quad \frac{\mathcal{P}^{(n)}B(n + 2xn^{2/3}) - 2n - 2xn^{2/3}}{n^{1/3}} \Rightarrow (\mathcal{A}_i(x))_{i \in \mathbb{N}^*, x \in \mathbb{R}}$$

dans l’espace des fonctions continues  $C(\mathbb{R} \times \mathbb{N}^*, \mathbb{R})$  (muni de la topologie associée à la convergence uniforme sur les compacts). De nombreux auteurs ont contribué à ce résultat. Prähofer et Spohn (2002) ont d’abord montré la convergence des lois marginales de dimensions finies et caractérisé la loi jointe de  $(\mathcal{A}_i(t_1))_{i \in \mathbb{N}^*}, \dots, (\mathcal{A}_i(t_k))_{i \in \mathbb{N}^*}$ . L’énoncé le plus général de la convergence et l’existence d’un processus continu de trajectoires qui ne se coupent pas presque sûrement, i.e.  $\mathcal{A}_1(t) > \mathcal{A}_2(t) > \dots$ , sont dus à Corwin et Hammond (2014). Ce processus est appelé l’ensemble des lignes d’Airy.

En utilisant la relation entre  $\mathcal{P}^{(n)}B$  et la percolation brownienne (15) ainsi que la propriété d’invariance d’échelle du mouvement brownien, on en déduit que  $B[(0, 0)_n \rightarrow (x, t)_n]$  (avec les notations du théorème 3.3) converge vers la première ligne d’Airy  $t^{1/3}\mathcal{A}_1(x)$ . En particulier, pour tout  $t > 0$ , on doit donc avoir l’identité en loi

$$\mathcal{L}(0, 0; x, t) \stackrel{(loi)}{=} t^{1/3}\mathcal{A}_1(x).$$

*Remarque 3.8.* — La première coordonnée  $\mathcal{A}_1(t)$  de l’ensemble des lignes d’Airy est une déformation aléatoire d’une parabole  $t \mapsto -t^2$ . Plus précisément, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , la loi de  $\mathcal{A}_1(t) + t^2$  ne dépend pas de  $t$  et  $\mathbb{P}(\mathcal{A}_1(t) + t^2 \leq s) = F_{\text{TW}}(s)$ . De plus, l’ensemble des lignes d’Airy possède une sorte de propriété de Markov spatiale appelée *propriété de Gibbs brownienne* : Pour tous entiers  $n \leq m$  et réels  $a < b$ , conditionnellement aux valeurs de  $(\mathcal{A}_i(t))$  pour  $i \notin \llbracket n, m \rrbracket$  ou bien  $t \notin (a, b)$ , la loi des lignes  $\mathcal{A}_n, \dots, \mathcal{A}_m$  sur l’intervalle  $(a, b)$  est la loi de ponts browniens (dont les points de départ et d’arrivée sont déterminés par le conditionnement) conditionnés à ne pas se couper. Cela permet notamment de démontrer que les lignes de l’ensemble d’Airy sont localement browniennes. La propriété de Gibbs brownienne est, en fait, très forte : Aggarwal et Huang (2023) ont montré

récemment que l'ensemble des lignes d'Airy est l'unique processus stochastique sur  $\mathbb{N}^* \times \mathbb{R}$  vérifiant la propriété de Gibbs brownienne et tel que  $\mathcal{A}_1(t) = -t^2 + o(t^2)$ .

#### 4. Construction du paysage dirigé

La première idée de la construction du paysage dirigée est de s'inspirer de la construction de Lévy du mouvement brownien. Le mouvement brownien peut être défini comme un processus stochastique dont les incréments  $B_t - B_s$  sont des gaussiennes de variance  $t - s$  et tel que sur des intervalles disjoints  $(s_1, t_1), \dots, (s_k, t_k)$  les incréments sont indépendants.

##### 4.1. Brique de base de la construction : le drap d'Airy

Supposons que l'on sache construire un processus  $\mathcal{S}(x, y)$  continu sur  $\mathbb{R}^2$ , qu'on appellera *drap d'Airy*, qui soit la limite de  $B[(x, 0)_n \rightarrow (y, 1)_n]$  lorsque  $n$  tend vers l'infini. Autrement dit, admettons qu'on sache construire  $\mathcal{L}(x, 0; y, 1)$ . Alors, on définit le drap d'Airy d'échelle  $k$  par

$$\mathcal{S}_k(x, y) = k\mathcal{S}(x/k^2, y/k^2),$$

et le paysage dirigé peut être défini à la Lévy :

**DÉFINITION 4.1.** — *La paysage dirigé  $\mathcal{L}(x, s; y, t)$  est une fonction aléatoire  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ , continue et finie sur  $\mathbb{R}_+^4$ , égale à zero si  $(x, s) = (y, t)$ , égale à  $-\infty$  si  $(x, s; y, t) \notin \mathbb{R}_+^4$  et telle que*

1. (*lois marginales*) Pour tout  $s < t$  la fonction  $\mathcal{L}(\cdot, s; \cdot, t)$  est un drap d'Airy d'échelle  $(t - s)^3$  ;
2. (*incrémentes indépendants*) Pour toute suite d'intervalles disjoints  $(s_i, t_i)$ , pour  $1 \leq i \leq k$ , les fonctions  $\mathcal{L}(\cdot, s_i; \cdot, t_i)$  sont indépendantes ;
3. (*composition des distances*) Presque sûrement, pour tout  $r < s < t$  et  $x, y \in \mathbb{R}$ ,

$$\mathcal{L}(x, r; y, t) = \max_{z \in \mathbb{R}} \{ \mathcal{L}(x, r; z, s) + \mathcal{L}(z, s; y, t) \}.$$

Ces propriétés impliquent en particulier que  $\mathcal{L}$  est une anti-distance dirigée sur  $\mathbb{R}^2$ . Puisque le paysage dirigé est construit à partir du drap d'Airy, nous allons nous concentrer à présent sur la construction du drap d'Airy et la convergence vers celui-ci. C'est la partie la plus délicate de la preuve du théorème 3.3.

Nous avons comme objectif de construire un processus  $\mathcal{S}(x, y)$  et de montrer une convergence en loi

$$(20) \quad \frac{B[(2xn^2, n^3) \rightarrow (n^3 + 2yn^2, 1)] - 2n^3 - 2(y - x)n^2}{n} \Rightarrow \mathcal{S}(x, y).$$

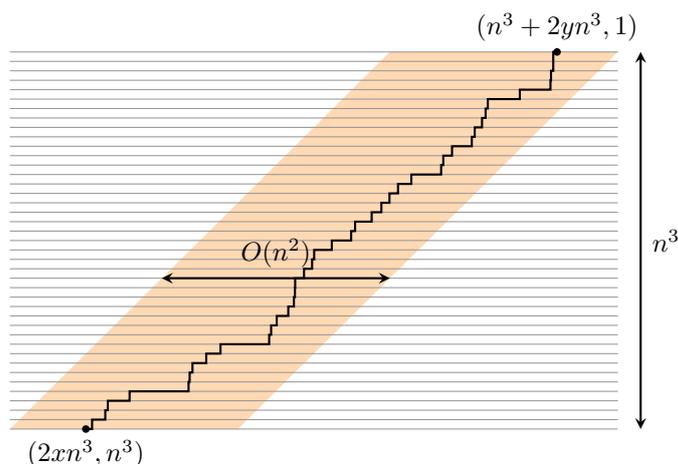


FIGURE 5. Limite d'échelle de  $B[(2xn^2, n^3) \rightarrow (n^3 + 2yn^2, 1)]$ .

Le processus  $\mathcal{S}(x, y)$  doit être tel que si on fixe  $x \in \mathbb{R}$ , ou si on fixe  $y \in \mathbb{R}$ , on a l'égalité en loi des processus

$$\mathcal{S}(x, y) \stackrel{(loi)}{=} \mathcal{A}_1(y - x),$$

d'où le nom de drap d'Airy, par analogie avec le drap brownien. La loi jointe de  $\mathcal{S}(x_1, y_1), \dots, \mathcal{S}(x_k, y_k)$  est compliquée. On sait la caractériser efficacement seulement si les  $x_i$  et les  $y_i$  sont ordonnés de manière inverse (Borodin, Gorin et Wheeler, 2022). Néanmoins, on peut tout de même construire ce processus  $\mathcal{S}(x, y)$ .

*Une idée infructueuse.* — Rappelons que par la définition de  $B[p \rightarrow q]$  donnée en (11), le temps de dernier passage  $B[(n^3 + 2xn^2, n^3) \rightarrow (n^3 + 2yn^2, 1)]$  est un supremum sur des chemins de  $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$  de la somme des incréments de browniens  $B_1, \dots, B_{n^3}$  le long du chemin, cf figure 5. On s'attend à ce que la géodésique passe à une distance d'ordre  $O(n^2)$  de la géodésique pour la distance euclidienne. Étant donnée une suite de fonctions  $f^{(n)}$  définies sur  $\mathbb{R} \times \llbracket 1, n^3 \rrbracket$ , on peut les intégrer contre les browniens sur une bande autour de la géodésique euclidienne, comme sur la figure 5, et définir

$$\langle f^{(n)}, B_{\llbracket 1, n^3 \rrbracket} \rangle = \sum_{i=1}^{n^3} \int_{\mathbb{R}} f(i + 2xn^2, i) dB_i(x).$$

Si  $f^{(n)}$  converge dans  $L^2$  vers une fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R} \times [0, 1]$ , alors  $\langle f^{(n)}, B_{\llbracket 1, n^3 \rrbracket} \rangle$  converge, à une renormalisation près, vers  $\langle f, \xi \rangle$ , où  $\xi$  désigne un bruit blanc sur  $\mathbb{R} \times [0, 1]$ .

Ainsi, on pourrait s'attendre à ce que le drap d'Airy  $\mathcal{S}(x, y)$  en (20) puisse être défini comme

$$\sup_{\gamma: (x,0) \rightarrow (y,1)} \int_0^1 \xi(\gamma_s, s) ds,$$

où le sup est pris sur une certaine classe de chemins  $\gamma$ . Cette piste pose plusieurs problèmes. D'une part, l'intégrale du bruit blanc le long d'un chemin n'est bien définie que pour des chemins  $\gamma$  suffisamment réguliers et on voit bien sur les simulations (cf figure 1(B)) que la géodésique est très irrégulière. D'autre part, en remplaçant la famille

de mouvement browniens  $B_1, B_2, \dots$  par un bruit blanc, on perd beaucoup d'information sur les valeurs extrêmes de ces browniens qui peuvent avoir une influence sur la forme de la géodésique et le temps de dernier passage. En fait, Himwich et Parekh (2024) ont même démontré que le paysage dirigé est indépendant de ce bruit blanc  $\xi$ .

## 4.2. La transformation de Pitman est une isométrie

La clé pour construire le paysage dirigé est une propriété remarquable de la transformation de Pitman. Soit  $\mathcal{C}_n(E)$  l'espace des  $n$ -uplets  $(f_1, \dots, f_n)$  de fonctions continues  $E \rightarrow \mathbb{R}$ . Le lemme suivant montre que la transformation de Pitman  $\mathcal{P}^{(n)}$  sur  $\mathcal{C}_n(\mathbb{R}_+)$  est une isométrie pour la distance dirigée  $f[p \rightarrow q]$  sur  $\mathbb{R}_+ \times \llbracket 1, n \rrbracket$ .

LEMME 4.2 (Biane, Bougerol et O'Connell, 2005, Lemme 4.8)

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Pour tout environnement  $f \in \mathcal{C}_n(\mathbb{R}_+)$  et pour tout  $0 \leq x \leq y$ ,

$$(21) \quad (\mathcal{P}^{(n)}f)[(x, n) \rightarrow (y, 1)] = f[(x, n) \rightarrow (y, 1)].$$

*Démonstration.* — Étant donné la relation (15), le temps de dernier passage  $f[(x, n) \rightarrow (x+z, 1)]$  peut être vu comme la première coordonnée de la transformée de Pitman de la fonction  $z \mapsto f(x+z)$ . Pour la même raison, le temps de dernier passage  $(\mathcal{P}^{(n)}f)[(x, n) \rightarrow (x+z, 1)]$  est égal à la première coordonnée de la transformée de Pitman de la fonction  $z \mapsto (\mathcal{P}^{(n)}f)(x+z)$ . L'identité (21) est une conséquence de la propriété plus générale que pour tout  $x \geq 0$ , les fonctions  $f(x+\cdot)$  et  $(\mathcal{P}^{(n)}f)(x+\cdot)$  ont les mêmes transformées de Pitman.

La démonstration en est la suivante. Pour deux fonctions  $f \in \mathcal{C}_n([0, x])$  et  $g \in \mathcal{C}_n([0, y-x])$ , on définit leur concaténation  $f \star g \in \mathcal{C}_n([0, y])$  comme égale à  $f$  sur  $[0, x]$  et égale à  $f(x) + g(\cdot - x)$  sur  $[x, y]$ . Nous devons montrer que

$$\mathcal{P}^{(n)}(f \star g) = (\mathcal{P}^{(n)}f) \star h$$

où  $h$  est telle que  $\mathcal{P}^{(n)}h = \mathcal{P}^{(n)}g$ . Au vu de la définition de  $\mathcal{P}^{(n)}$  comme composition de transformations de Pitman élémentaires (14), il suffit de démontrer le résultat pour chaque  $\mathcal{P}_i^{(n)}$ . Il suffit donc de vérifier le résultat lorsque  $n = 2$ , ce qui se fait aisément en écrivant les définitions.  $\square$

*Remarque 4.3.* — La preuve du lemme 4.2 implique qu'on a aussi, pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $(\mathcal{P}^{(n)}f)[(x, n)^k \rightarrow (y, 1)^k] = f[(x, n)^k \rightarrow (y, 1)^k]$ . Dauvergne, Ortmann et Virág (2022) montrent plus généralement que le résultat reste vrai pour tout  $k$ -uplets  $\mathbf{p}$  et  $\mathbf{q}$  de points de départ et d'arrivée (cf Section 3.3). Une variante de ce résultat apparaît aussi dans un article antérieur de Noumi et Yamada (2004).

Rappelons que, depuis la section 4.1, nous voulons étudier la limite de  $B[(2xn^2, n^3) \rightarrow (n^3 + 2yn^2, 1)]$  en tant que processus lorsque  $x$  et  $y$  varient. Par le lemme 4.2, ce processus est le même que

$$(22) \quad (\mathcal{P}^{(n^3)}B)[(2xn^2, n^3) \rightarrow (n^3 + 2yn^2, 1)].$$

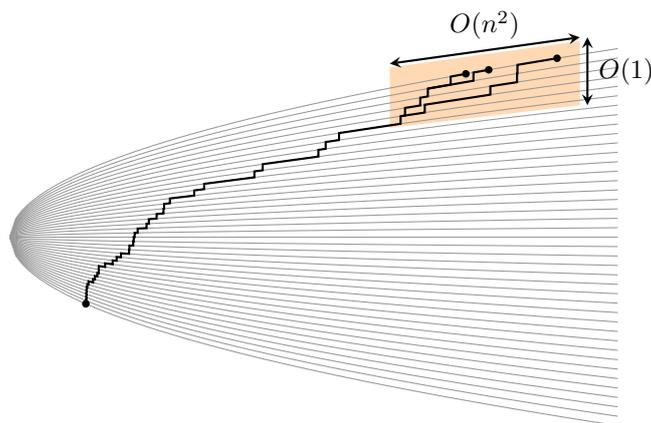


FIGURE 6. Géodésiques dans l’environnement  $\mathcal{P}^{(n^3)}B$  arrivant en plusieurs points d’abscisse  $n^3 + O(n^2)$ . Les points de coalescence des géodésiques restent dans une région (en orange) de taille  $\mathcal{O}(n^2) \times \mathcal{O}(1)$ .

Mais nous savons aussi par (19) que  $\mathcal{P}^{(n^3)}B$  converge vers l’ensemble de lignes d’Airy. Ainsi, le drap d’Airy doit correspondre à une distance dirigée dans un environnement donné par l’ensemble de lignes d’Airy.

*Structure des géodésiques.* — La raison pour laquelle cette approche fonctionne, contrairement à l’approche trop naïve décrite en Section 4.1 est la suivante. Lorsque l’on étudie directement le temps de passage  $B[(2xn^2, n^3) \rightarrow (n^3 + 2yn^2, 1)]$ , cf figure 5, les géodésiques arrivant en différents points d’arrivée distants de  $\mathcal{O}(n^2)$  se séparent en un point de branchement qui n’est pas nécessairement localisé près des points d’arrivée, mais peut se situer n’importe où dans la zone orangée de la figure 5. Comme expliqué plus haut, la limite du bruit dans cette zone orangée est un bruit blanc qui ne permet pas de définir le drap d’Airy.

Au contraire, lorsque l’on étudie le même problème dans l’environnement  $\mathcal{P}^{(n^3)}B$  (voir la figure 6), les points de branchements restent proches des points d’arrivée, dans la zone orangée de la figure 6. Or, cette zone orangée est exactement la zone dans laquelle la transformée de Pitman  $\mathcal{P}^{(n^3)}B$  converge vers l’ensemble des lignes d’Airy.

Plus précisément, admettons que les géodésiques menant à tous les points d’arrivée  $(n^3 + 2yn^2, 1)$  avec  $y$  variant dans un compact  $K$  ont des points de coalescence dans une fenêtre de taille  $\mathcal{O}(n^2) \times \mathcal{O}(1)$  comme sur la figure 6. Alors, il est possible d’estimer un point intermédiaire  $(p(n, x), k) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}^*$  tel que le temps de dernier passage (22) puisse être décomposé comme la somme des temps de dernier passage  $[(2xn^2, n^3) \rightarrow (p(n, x), k)]$  et  $[(p(n, x), k) \rightarrow (n^3 + 2yn^2, 1)]$ . Dauvergne, Ortman et Virág (2022) montrent aussi que ce dernier converge, lorsque  $n \rightarrow \infty$ , vers un temps de dernier passage dans l’environnement donné par l’ensemble de lignes d’Airy

$$\mathcal{A}[(-\sqrt{k/(2x)}, k) \rightarrow (y, 1)].$$

Ainsi, le drap d’Airy peut être construit de la manière suivante.

DÉFINITION 4.4. — *Le drap d’Airy est une fonction aléatoire continue  $\mathcal{S} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  telle que*

1.  $\mathcal{S}$  a la même loi que  $\mathcal{S}(\cdot + t, \cdot + t)$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ .
2.  $\mathcal{S}$  peut être couplée avec un ensemble de lignes d’Airy  $\mathcal{A}$  tel que  $\mathcal{S}(0, \cdot) = \mathcal{A}_1(\cdot)$  et, pour tout  $(x, y, z) \in \mathbb{Q}_+ \times \mathbb{Q}^2$ , il existe un entier aléatoire  $K_{x,y,z} \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $k \geq K_{x,y,z}$ , on a presque sûrement

$$\mathcal{A}[(-\sqrt{k/(2x)}, k) \rightarrow (z, 1)] - \mathcal{A}[(-\sqrt{k/(2x)}, k) \rightarrow (y, 1)] = \mathcal{S}(x, z) - \mathcal{S}(x, y)$$

L’existence et l’unicité du drap d’Airy sont prouvés par Dauvergne, Ortmann et Virág (2022). La preuve d’unicité repose sur des propriétés connues de l’ensemble des lignes d’Airy. La preuve d’existence construit une suite tendue  $\mathcal{S}_n(x, y)$  de processus approchant le drap d’Airy  $\mathcal{S}(x, y)$  lorsque  $n$  tend vers l’infini et conclut par le théorème de représentation de Skorokhod. Cette approche permet aussi de prouver le théorème suivant, qui est la partie la plus difficile de la preuve du théorème 3.3.

THÉORÈME 4.5 (Dauvergne, Ortmann et Virág, 2022). — *Soit  $s < t$ . Il existe un couplage de  $B$  et du drap d’Airy  $\mathcal{S}$  tel que pour  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,*

$$(23) \quad B[(x, s)_n \rightarrow (y, t)_n] = 2(t - s)n^3 + 2(y - x)n^2 + n \left( (t - s)^{1/3} \mathcal{S}(x, y) + o_n(x, y) \right),$$

où  $o_n(x, s; y, t)$  est une fonction aléatoire tendant vers 0 comme dans l’énoncé du théorème 3.3.

## 5. Convergence vers le paysage dirigé

Le théorème 3.3 implique en particulier la convergence en loi de la fonction aléatoire  $(x, s; y, t) \mapsto B[(x, s)_n \rightarrow (y, t)_n]$  vers le paysage dirigé dans la topologie associée à la convergence uniforme sur tout compact. Dauvergne et Virág (2021) ont montré que plusieurs autres modèles convergent également en loi vers le paysage dirigé, et que leurs géodésiques convergent vers celles du paysage dirigé.

### 5.1. Géodésiques du paysage dirigé

Pour tout  $(x, s; y, t) \in \mathbb{R}_+^4$  une géodésique entre  $p = (x, s)$  et  $q = (y, t)$  est une courbe paramétrée  $(r, \pi(r))_{r \in [s, t]}$  continue dans  $\mathbb{R}^2$ , telle que  $\pi(s) = x$ ,  $\pi(t) = y$  et telle que, pour toute subdivision de  $[s, t]$ ,  $s = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k = t$ ,

$$\mathcal{L}(p; q) = \sum_{i=1}^k \mathcal{L}(t_{i-1}, \pi(t_{i-1}); t_i, \pi(t_i)).$$

Pour tout couple de points  $(p; q) \in \mathbb{R}_+^4$ , il existe presque sûrement une unique géodésique entre ces points. De plus, la convergence vers le paysage dirigé uniformément sur tout compact implique la convergence des géodésiques dans la topologie de Hausdorff. La distance de Hausdorff est une distance entre sous-ensembles d’un espace métrique.

Pour des ensembles correspondant aux graphes de fonctions continues sur un intervalle compact donné, la convergence dans la topologie de Hausdorff est tout simplement équivalente à la convergence uniforme. La distance de Hausdorff est commode ici pour exprimer la distance entre des chemins de longueurs différentes.

*Remarque 5.1.* — Pour tout couple de points donnés, la géodésique les reliant est presque sûrement unique, mais comme  $\mathbb{R}_\dagger^4$  n'est pas dénombrable, il peut exister dans  $\mathbb{R}_\dagger^4$  des points exceptionnels d'où peuvent arriver et/ou partir plusieurs géodésiques. Dauvergne (2023) a étudié l'ensemble de ces points exceptionnels et démontré que deux ou trois géodésiques peuvent arriver ou partir d'un point, mais jamais quatre. Cela permet de classifier les structures de branchement des géodésiques qui sont possibles entre deux points, il y en a 27 en tout.

## 5.2. Quels modèles convergent vers le paysage dirigé ?

Dauvergne et Virág (2021) ont démontré que le paysage dirigé est la limite de divers modèles dans la classe de Kardar–Parisi–Zhang. Tous ces modèles peuvent être vus comme une distance dirigée satisfaisant à un énoncé de convergence du type (5). Comme il n'est pas aisé d'énoncer précisément tous ces résultats de manière unifiée, nous allons seulement lister les modèles pour lesquelles la méthode de Dauvergne et Virág s'applique :

- Percolation de dernier passage dans  $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$  dans un environnement donné par des mouvements browniens indépendants (théorème 3.3) ou des processus de Poisson indépendants (tous les résultats mentionnés ci-haut peuvent être étendus à la percolation de dernier passage dans un environnement càdlàg plutôt que continu) ;
- Percolation de dernier passage dans un environnement discret : en particulier la percolation de dernier passage sur  $\mathbb{Z}^2$  avec des poids de loi géométrique ou exponentielle ;
- Percolation de dernier passage dans  $\mathbb{R}^2$  dans un environnement poissonien, c'est-à-dire le modèle de Hammersley, cf section 5.3 ;
- Un modèle de distance dirigée sur  $\mathbb{Z}^2$  avec des distances 0 ou 1 sur les arêtes, appelé modèle de Seppäläinen–Johansson.

Tous ces modèles ont deux particularités. D'une part, ils sont liés à la correspondance RSK, et en particulier il existe un analogue de la transformation de Pitman pour chacun de ces modèles. D'autre part, ces modèles sont associés à des processus déterminantaux (une excellente introduction à ce sujet est donnée par Borodin et Gorin (2016)), ce qui permet de montrer leur convergence vers l'ensemble des lignes d'Airy, c'est-à-dire qu'on peut montrer un résultat analogue à (19). Ces deux propriétés combinées, permettent de montrer la convergence de chaque modèle vers le drap d'Airy.

*Remarque 5.2.* — Puisque le paysage dirigé est défini à partir de draps d'Airy indépendants, la convergence vers le drap d'Airy implique, pour tout modèle décrit à partir de variables indépendantes et identiquement distribuées, la convergence vers le paysage dirigé au sens des lois marginales de dimension finie en temps (c'est-à-dire, étant donné des temps  $t_1 < \dots < t_k$  on montre la convergence vers la restriction du paysage dirigé

$\mathcal{L}(\cdot, t_i; \cdot, t_j)_{1 \leq i \leq j \leq k}$ ). Cette notion de convergence est assez faible et n’implique pas la convergence des géodésiques. Dauvergne et Virág (2021) ont introduit plusieurs topologies plus fines permettant de montrer la convergence des géodésiques. Dans ce texte, nous avons énoncé les résultats pour la topologie la plus fine possible, associée à la convergence uniforme sur les compacts.

*Remarque 5.3.* — Le paysage dirigé est (conjecturellement) la limite d’échelle universelle de tous les modèles de la classe de Kardar–Parisi–Zhang, en dimension  $1 + 1$ . Jusqu’à récemment, la preuve de ce type de convergence était limitée à des modèles très spécifiques, liés à la correspondance RSK comme ceux listés ci-dessus. Récemment, la convergence vers le paysage dirigé a été démontrée par Aggarwal, Corwin et Hegde (2024) pour le modèle à six sommets stochastique et ses limites, malgré l’absence de correspondance RSK associée à ces modèles. La preuve utilise néanmoins des ensembles de lignes approchant l’ensemble des lignes d’Airy dont l’existence est due à l’intégrabilité du modèle. Démontrer la convergence en dehors de la classe des modèles exactement résolubles est l’un des problèmes ouverts majeurs du domaine.

### 5.3. Retour aux permutations aléatoires

Pour deux points  $p \nearrow q$  dans  $\mathbb{Z}^2$ , on définit habituellement le temps de dernier passage de  $p$  à  $q$  comme

$$W[p \rightarrow q] = \max_{\pi: p \rightarrow q} \left\{ \sum_{x \in \pi} w_x \right\},$$

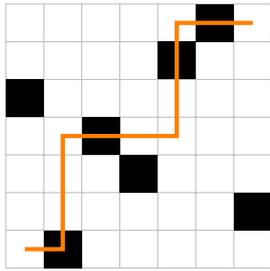
où les  $w_x$  sont des poids associés aux sommets  $x \in \mathbb{Z}^2$ , et le chemin  $\pi$  est un chemin entre  $p$  et  $q$ , faisant des pas de longueur 1 vers le nord ou vers l’est. Si l’on définit des fonctions  $f_i(j) = \sum_{k=1}^j w_{k,i}$  comme dans la remarque 3.5, cette définition est équivalente à la définition 3.2. En particulier, pour toute matrice  $W = (w_{ji}) \in \mathbb{N}^{n \times n}$ , cela permet de définir des temps de dernier passage entre n’importe quels couples de points dans  $\llbracket 1, n \rrbracket^2$ .

Considérons maintenant la matrice de permutation  $P$  associée à une permutation  $\sigma$  dans  $\mathcal{S}_n$ , illustrée par une grille de cases blanches ou noires sur la figure 7(A). On observe que, par définition,

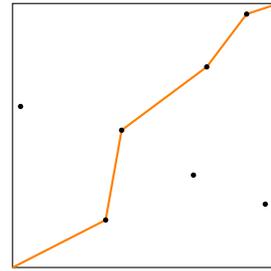
$$P[(1, 1) \rightarrow (n, n)] = L_n(\sigma).$$

De plus, il est clair que le chemin dont la longueur est égale à  $L_n(\sigma)$  sur la figure 7(A) est simplement une géodésique pour la distance dirigée définie par les temps de dernier passage dans l’environnement donné par la matrice  $P$ .

En pratique, on ne sait pas bien calculer la loi de la transformée de Pitman (ou l’image par la correspondance RSK) d’une matrice de permutation aléatoire uniforme. En revanche, si on s’autorise à rendre aléatoire la taille de la permutation, on peut représenter une permutation uniforme par un processus ponctuel de Poisson d’intensité  $n$  dans le carré  $[0, 1]^2$  comme sur la figure 7(B). La loi de la transformée de Pitman associée peut être calculée explicitement. Elle est liée à la mesure de probabilité sur les partitions d’entiers aléatoires, dite mesure de Plancherel, introduite par Okounkov (2001). Ainsi, Dauvergne et Virág (2021) ont démontré que la percolation de dernier passage sur  $\mathbb{R}^2$



(A) La permutation  $\sigma$  est représentée en coloriant les cases  $(i, \sigma(i))$  en noir.



(B) La même permutation, représentée par un nuage de points.

FIGURE 7. Deux représentations de la permutation  $\sigma = (5, 1, 4, 3, 6, 7, 2)$ . Le nombre de cases noircies (à gauche) ou de points (à droite) le long d'une géodésique (en orange) est égal à  $L_n(\sigma)$ .

dans un environnement donné par un processus ponctuel de Poisson converge vers le paysage dirigé. C'est pourquoi la plus longue sous-suite croissante d'une permutation aléatoire uniforme, représentée par la fonction  $I_n(t)$  définie en (2), converge en loi vers la géodésique du paysage dirigé.

## Remerciements

Je remercie chaleureusement Nicolas Bourbaki et Marie Bourgon pour leurs précieux conseils.

G.B. est soutenu par l'Agence Nationale de la Recherche (ANR-21-CE40-0019 et ANR-23-ERCB-0007-01) et a bénéficié d'un financement du Swedish Research Council (grant no. 2016-06596) en résidence à l'institut Mittag-Leffler à Djursholm, en Suède, où une partie de ce texte à été rédigée, pendant l'automne 2024.

## Références

- Amol Aggarwal, Ivan Corwin et Milind Hegde (2024). *Scaling limit of the colored ASEP and stochastic six-vertex models*. Preprint, arXiv :2403.01341 [math.PR] (2024).
- Amol Aggarwal et Jiaoyang Huang (2023). *Strong Characterization for the Airy Line Ensemble*. Preprint, arXiv :2308.11908 [math.PR] (2023).
- Jinho Baik, Percy Deift et Kurt Johansson (1999). « On the distribution of the length of the longest increasing subsequence of random permutations », *J. Amer. Math. Soc.* **12** (4), p. 1119-1178.
- Yulyi Baryshnikov (2001). « GUEs and queues », *Probab. Theory Rel. Fields* **119** (2), p. 256-274.
- Philippe Biane, Philippe Bougerol et Neil O'Connell (2005). « Littelmann paths and Brownian paths », *Duke Math. J.* **130** (1), p. 127-167.

- Alexei Borodin et Vadim Gorin (2016). « Lectures on integrable probability », in : *Probability and statistical physics in St. Petersburg. St. Petersburg School Probability and Statistical Physics, St. Petersburg State University, St. Petersburg, Russia, June 18–29, 2012*. Providence, RI : American Mathematical Society (AMS), p. 155-214.
- Alexei Borodin, Vadim Gorin et Michael Wheeler (2022). « Shift-invariance for vertex models and polymers », *Proc. Lond. Math. Soc. (3)* **124** (2), p. 182-299.
- Philippe Bougerol et Thierry Jeulin (2002). « Paths in Weyl chambers and random matrices », *Probab. Theory Rel. Fields* **124** (4), p. 517-543.
- Édouard Brézin et Shinobu Hikami (1996). « Correlations of nearby levels induced by a random potential », *Nucl. Phys. B* **479** (3), p. 697-706.
- Sourav Chatterjee (2013). « The universal relation between scaling exponents in first-passage percolation », *Annals of Mathematics. Second Series* **177** (2), p. 663-697.
- Ivan Corwin (2012). « The Kardar-Parisi-Zhang equation and universality class », *Random Matrices : Theory and Applications* **1** (1), p. 1130001, 76.
- (2014). « Macdonald processes, quantum integrable systems and the Kardar-Parisi-Zhang universality class », in : *Proceedings of the international congress of mathematicians (ICM 2014), Seoul, Korea, August 13–21, 2014. Vol. III : Invited lectures*. Seoul : KM Kyung Moon Sa, p. 1007-1034.
- Ivan Corwin et Alan Hammond (2014). « Brownian Gibbs property for Airy line ensembles », *Invent. Math.* **195** (2), p. 441-508.
- Duncan Dauvergne (2023). *The 27 geodesic networks in the directed landscape*. Preprint, arXiv :2302.07802 [math.PR] (2023).
- Duncan Dauvergne, Mihai Nica et Bálint Virág (2022). « RSK in last passage percolation : a unified approach », *Probab. Surv.* **19**, p. 65-112.
- Duncan Dauvergne, Janosch Ortmann et Bálint Virág (2022). « The directed landscape », *Acta Mathematica* **229** (2), p. 201-285.
- Duncan Dauvergne et Bálint Virág (2021). *The scaling limit of the longest increasing subsequence*. Preprint, arXiv :2104.08210 [math.PR] (2021).
- Monroe D. Donsker (1952). « Justification and extension of Doob’s heuristic approach to the Kolmogorov-Smirnov theorems », *Ann. Math. Stat.* **23**, p. 277-281.
- Freeman J. Dyson (1962). « A Brownian-motion model for the eigenvalues of a random matrix », *J. Math. Phys.* **3**, p. 1191-1198.
- Janko Gravner, Craig A. Tracy et Harold Widom (2001). « Limit theorems for height fluctuations in a class of discrete space and time growth models », *J. Stat. Phys.* **102** (5-6), p. 1085-1132.
- Massimiliano Gubinelli, Peter Imkeller et Nicolas Perkowski (2015). « Paracontrolled distributions and singular PDEs », *Forum Math, Pi* **3**. Id/No e6, p. 75.
- Martin Hairer (2013). « Solving the KPZ equation », *Ann. of Math. (2)* **178** (2), p. 559-664.
- (2014). « A theory of regularity structures », *Invent. Math.* **198** (2), p. 269-504.

- Timothy Halpin-Healy et Kazumasa A. Takeuchi (2015). « A KPZ cocktail-shaken, not stirred... : Toasting 30 years of kinetically roughened surfaces », *J. Stat. Phys.* **160** (4), p. 794-814.
- J. M. Hammersley (1972). « A few seedlings of research ». In : *Proc. Sixth Berkeley Symp. Math. Statist. and Probability*. T. 1, p. 345-394.
- Zoe Himwich et Shalin Parekh (2024). *The directed landscape is a black noise*. Preprint, arXiv :2404.16801 [math.PR] (2024).
- Kurt Johansson (2000). « Shape fluctuations and random matrices », *Commun. Math. Phys.* **209** (2), p. 437-476.
- (2001a). « Discrete orthogonal polynomial ensembles and the Plancherel measure », *Ann. of Math. (2)* **153** (1), p. 259-296.
- (2001b). « Universality of the local spacing distribution in certain ensembles of Hermitian Wigner matrices », *Commun. Math. Phys.* **215** (3), p. 683-705.
- Mehran Kardar, Giorgio Parisi et Yi-Cheng Zhang (1986). « Dynamic scaling of growing interfaces », *Phys. Rev. Lett.* **56** (9), p. 889-892.
- Samuel Karlin et James McGregor (1959). « Coincidence probabilities », *Pac. J. Math.* **9**, p. 1141-1164.
- Benjamin F. Logan et Larry A. Shepp (1977). « A variational problem for random Young tableaux », *Adv. Math.* **26**, p. 206-222.
- Konstantin Matetski, Jeremy Quastel et Daniel Remenik (2021). « The KPZ fixed point », *Acta Mathematica* **227** (1), p. 115-203.
- Masatoshi Noumi et Yasuhiko Yamada (2004). « Tropical Robinson-Schensted-Knuth correspondence and birational Weyl group action », in : *Representation theory of algebraic groups and quantum groups. Papers from the conference held at the 10th International Research Institute of the Mathematical Society of Japan (MSJ-IRI) at Sophia University, Tokyo, Japan, August 1–10, 2001*. Tokyo : Mathematical Society of Japan, p. 371-442.
- Neil O’Connell (2003). « A path-transformation for random walks and the Robinson-Schensted correspondence », *Trans. Amer. Math. Soc.* **355** (9), p. 3669-3697.
- Neil O’Connell et Marc Yor (2001). « Brownian analogues of Burke’s theorem. » *Stochastic Process. Appl.* **96** (2), p. 285-304.
- (2002). « A representation for non-colliding random walks », *Electron. Commun. Probab.* **7**. Id/No 1, p. 1-12.
- Andrei Okounkov (2001). « Infinite wedge and random partitions », *Selecta Mathematica. New Series* **7** (1), p. 57-81.
- James W. Pitman (1975). « One-dimensional Brownian motion and the three-dimensional Bessel process », *Adv. Appl. Probab.* **7**, p. 511-526.
- Michael Prähofer et Herbert Spohn (2002). « Scale invariance of the PNG droplet and the Airy process », *J. Stat. Phys.* **108** (5-6), p. 1071-1106.
- Herbert Spohn (2017). « The Kardar–Parisi–Zhang equation : a statistical physics perspective », in : *Stochastic processes and random matrices. Lecture notes of the Les*

- Houches summer school. Volume 104, Les Houches, France, July 6–31, 2015.* Oxford University Press, p. 177-227.
- Craig A. Tracy et Harold Widom (1994). « Level-spacing distributions and the Airy kernel », *Commun. Math. Phys.* **159**(1), p. 151-174.
- Stanislaw Ulam (1961). « Monte Carlo calculations in problems of mathematical physics », *Modern Mathematics for the Engineers* **261**, p. 281.
- A. M. Vershik et S. V. Kerov (1977). « Asymptotics of the Plancherel measure of the symmetric group and the limiting form of Young tableaux », *Soviet Mathematics. Doklady* **18**, p. 527-531.
- Lorenzo Zambotti (2014). « The Kardar–Parisi–Zhang equation (after Martin Hairer) », in : Séminaire Bourbaki. Volume 2012/2013., Astérisque no 361 (2014)., Exposé No. 1066, ix, 245-263.

Guillaume Barraquand

Laboratoire de Physique de l'École Normale Supérieure,  
École Normale Supérieure, Université PSL, CNRS,  
Sorbonne Université, Université Paris-Cité,  
24 rue Lhomond, 75005 PARIS  
*E-mail* : guillaume.barraquand@math.cnrs.fr