

Chapitre 1

Phénoménologie de la turbulence développée : Ordres de grandeurs et quantités dimensionnantes

Introduction

Nous nous intéressons à la situation physique suivante : un fluide visqueux est agité vigoureusement par un dispositif qui lui communique une vitesse d'ordre de grandeur δu_I variant sur une échelle spatiale ℓ_I . On peut penser, par exemple, à un agitateur de taille ℓ_I oscillant avec une vitesse caractéristique δu_I dans un récipient.

Une première caractéristique physique de l'écoulement est son nombre de Mach, $M_I = u_I/c_{\text{son}}$, rapport de la vitesse d'agitation à celle du son $c_{\text{son}} = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S}$. Dans tout ce qui suit, on s'intéresse exclusivement à des écoulements de nombre de Mach faible (c'est-à-dire que nous considérerons uniquement le problème d'une turbulence subsonique).

Les écoulements de faible Mach sont décrits mathématiquement [1] par les équations de Navier-Stokes incompressibles

$$\begin{cases} \partial_t \vec{u} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \nu \Delta \vec{u} \\ \text{div } \vec{u} = 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

où ρ est la densité (constante) du fluide, p la pression et ν sa viscosité

cinématique. Le champ de pression est déterminé à chaque instant par la condition d'incompressibilité $\text{div } \vec{u} = 0$. En effet, en prenant la divergence de l'équation pour la vitesse, on trouve

$$\Delta p = -\rho \text{div}((\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}) \quad (1.2)$$

Cette équation de Poisson détermine complètement p à partir de $\vec{u}$.

Une caractéristique importante d'un écoulement visqueux est son nombre de Reynolds

$$R_I = \frac{u_I \ell_I}{\nu}.$$

Ce nombre mesure l'importance relative des effets inertiels $(\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u}$ sur les effets visqueux $\nu \Delta \vec{u}$. En effet, le premier terme contient 2 vitesses et une dérivée spatiale. Le second terme contient lui la viscosité, une vitesse et deux dérivées spatiales. L'ordre de grandeur de leur rapport et donc (vitesse $\times$ longueur)/viscosité.

Le système que nous considérons est vigoureusement agité dans le sens que $R_I \gg 1$. Ce régime $M_I \ll 1$, $R_I \gg 1$ est appelé "turbulence développée incompressible". Expérimentalement, on sait qu'un écoulement en régime de turbulence développée incompressible est très complexe et fluctuant. Le but des considérations qui suivent est de caractériser quantitativement les ordres de grandeurs des fluctuations de vitesse dans l'écoulement.

1.1 La cascade de Richardson

Supposons notre système dans un état statistiquement stationnaire. Pour maintenir le fluide en mouvement, le dispositif d'agitation lui communique constamment de l'énergie. Qu'advient-il de cette énergie ? Une fois injectée dans le fluide, sous forme d'énergie cinétique $E_{\text{cin}} = \frac{1}{2} \int \rho u^2 d^3 \vec{x}$, elle est conservée par les termes non linéaires de l'équation de Navier-Stokes. Les termes visqueux la dissipent sous forme de chaleur avec une puissance

$$W_d = \frac{\nu}{2} \int d^3 \vec{x} \sum_{ij} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2.$$

Cependant, cette dissipation ne saurait s'effectuer à l'échelle spatiale d'injection : par hypothèse le nombre de Reynolds associé à cette échelle est très grand et donc la dissipation visqueuse y est très petite.

On est ainsi amené à l'image physique de la “cascade de Richardson” [2]. L'énergie injectée dans le fluide à l'échelle ℓ_I “cascade” vers des échelles de plus en plus petites. Ce processus s'arrête quand des échelles ℓ_d suffisamment petites pour que l'énergie y soit dissipée sous forme de chaleur sont atteintes. On peut se représenter cette cascade comme des instabilités successives, dues aux termes non linéaires, des mouvements d'échelle ℓ avec $\ell_I > \ell > \ell_d$.

La cascade de Richardson permet de comprendre le fait, a priori surprenant mais bien vérifié expérimentalement, qu'une modification de la viscosité d'un fluide turbulent ne change pas la dissipation d'énergie qui s'y produit. En modifiant ν , c'est le nombre d'étapes de la cascade que l'on change : les petites échelles de l'écoulement s'adaptent au changement de viscosité et se débrouillent pour toujours dissiper l'énergie injectée par l'agitation à grande échelle.

1.2 Loi d'échelle de Kolmogorov

En 1941, Kolmogorov [3, 4, 5] a donné les expressions quantitatives pour l'intensité typique des mouvements de taille ℓ ainsi que pour l'échelle de dissipation ℓ_d .

Il faut premièrement remarquer que les équations de Navier-Stokes sont invariantes par transformation de Galilée. Si $u(x, t)$ est solution, alors $u(x - u_0 t, t) + u_0$ l'est également. Une vitesse d'advection constante n'a donc pas d'effet dynamique sur l'évolution de l'écoulement. L'intensité de la vitesse des mouvements d'échelle ℓ doit être définie comme la variation typique de la vitesse turbulente sur une distance ℓ .

D'autre part, comme on s'intéresse aux échelles plus petites que ℓ_I , on est dans une situation homogène. Des quantités comme l'énergie cinétique du fluide, ou comme la puissance dissipée sont extensives. Cela veut dire que, dans une situation où les propriétés statistiques du champ de vitesse $u(x, t)$ sont homogènes, l'énergie cinétique E_c et la puissance dissipée W_d sont proportionnelles à la masse totale du fluide. Nous rapporterons donc ces

quantités à l'unité de masse.

On note ε le taux d'injection d'énergie dans le fluide (égal au taux de cascade et au taux de dissipation) ramené à l'unité de masse. La dimension de ε est :

$$[\varepsilon] = W/kg = L^2 T^{-3}.$$

La turbulence que nous considérons est caractérisée par 3 paramètres : l'échelle d'injection ℓ_I , la vitesse d'injection δu_I et la viscosité du fluide ν . Ces paramètres ont pour dimension $[\ell_I] = L$, $[\delta u_I] = LT^{-1}$ et $[\nu] = L^2 T^{-1}$.

L'image de la cascade de Richardson nous conduit à faire une première hypothèse :

- H_0 : ε est indépendant de ν .

La seule combinaison de δu_I et ℓ_I ayant la bonne dimension est $\delta u_I^3/\ell_I$. On en déduit (ici $\sim$ veut dire proportionnel)

$$\varepsilon \sim \frac{\delta u_I^3}{\ell_I}. \quad (1.3)$$

La loi d'échelle pour $\delta u(\ell)$ est obtenue avec les deux hypothèses suivantes :

- H_1 : $\delta u(\ell)$ ne dépend pas de ν (pour $\ell_d < \ell < \ell_I$)
- H_2 : $\delta u(\ell)$ n'est fonction que de ε et de ℓ .

L'analyse dimensionnelle donne

$$\delta u(\ell) \sim (\varepsilon \ell)^{1/3}. \quad (1.4)$$

En utilisant (1.3), (1.4) peut s'écrire

$$\delta u(\ell) \sim \delta u_I \left(\frac{\ell}{\ell_I} \right)^{1/3} \quad (1.5)$$

Remarquons que H_2 revient à dire que $\delta u(\ell)$ n'est fonction de ℓ_I qu'au travers d' ε , autrement dit qu'il n'y a pas moyen, en observant à l'échelle ℓ de distinguer deux turbulences ayant le même ε mais créées à des échelles d'injection ℓ_I différentes.

Nous pouvons calculer le nombre de Reynolds associé aux mouvements d'échelle ℓ

$$R_\ell \sim \frac{\delta u(\ell)\ell}{\nu} = \frac{\varepsilon^{1/3}\ell^{4/3}}{\nu}.$$

La dissipation visqueuse va se produire aux échelles ℓ_d telles que $R_{\ell_d} \sim 1$. On en déduit

$$\ell_d \sim \nu^{3/4}\varepsilon^{-1/4}. \quad (1.6)$$

En utilisant (1.3), (1.6) peut également s'écrire

$$\ell_d \sim \ell_I R_I^{-3/4}. \quad (1.7)$$

Remarquons, pour terminer cette section, que les lois d'échelles (1.3), (1.4) ou (1.5) et (1.6) ou (1.7) sont assez bien vérifiées expérimentalement. Si l'on désire utiliser ces formules pour se faire une première idée des ordres de grandeurs dans un écoulement turbulent, on peut retenir les coefficients de proportionnalité suivants :

$$\varepsilon \simeq 10^{-2} \frac{\delta u^3}{\ell_I} \text{ et } \ell_d \simeq 10 \varepsilon^{-1/4} \nu^{3/4}.$$

Les coefficients numériques sont très approximatifs, et le premier est assez variable d'un écoulement à l'autre (cf. chapitre 3).

1.3 Illustrations élémentaires

Dispersion turbulente

On considère l'évolution au cours du temps de deux particules séparées d'une distance ℓ_0 . La loi de Kolmogorov donne, pour $\ell_d \ll \ell \ll \ell_I$,

$$\frac{d\ell}{dt} \sim (\varepsilon \ell)^{1/3}.$$

Cette équation s'intègre pour donner

$$\ell^{2/3} - \ell_0^{2/3} \sim \varepsilon^{1/3} t.$$

Le diamètre d'une tache de polluant évolue ainsi en

$$\varepsilon^{1/2} t^{3/2}.$$

Il est intéressant de noter que cette loi a été établie quinze ans avant la loi de Kolmogorov [6].

Vitesse limite d'un corps en chute libre

Considérons un objet de taille ℓ et de masse M en chute libre (accélération de la pesanteur g) dans un fluide de densité ρ et de viscosité cinématique ν . Sa vitesse limite est obtenue en égalant son poids Mg avec la force de résistance du fluide. Dans le régime laminaire, la force est proportionnelle à la vitesse et à la viscosité. L'analyse dimensionnelle donne: $[\nu] = L^2 T^{-1}$, $[F] = M L T^{-2}$, $[\rho] = M L^{-3}$ et donc $F_{\text{visc}} \sim \nu \rho \ell v$. Dans ce régime, on a donc

$$v_{\text{visc}} \sim \frac{Mg}{\nu \rho \ell}$$

(pour un objet sphérique on aurait au dénominateur un facteur 6π que l'analyse dimensionnelle ne peut attraper).

Dans le régime turbulent, la loi $\varepsilon \sim \frac{v^3}{\ell}$ nous indique que la puissance est proportionnelle au cube de la vitesse. Comme la puissance est le produit de la force par la vitesse, on en déduit que la force est proportionnelle au carré de la vitesse. L'expression correcte dimensionnellement est :

$$F_{\text{turb}} \sim \rho \ell^2 v^2.$$

On en déduit :

$$v_{\text{turb}} \sim \sqrt{\frac{Mg}{\rho \ell^2}}.$$

Le rapport

$$\frac{F_{\text{turb}}}{F_{\text{visc}}} = \frac{\rho \ell^2 v^2}{\nu \rho \ell v} = \frac{\ell v}{\nu}$$

est simplement le nombre de Reynolds.

Calculons l'ordre de grandeur de la vitesse de chute d'un parachutiste. Les ordres de grandeur sont : $\rho_{\text{air}} \sim 1 \text{ Kg/m}^3$, $M \sim 100 \text{ Kg}$, $g \sim 10 \text{ m/s}^2$, $\ell \sim 1 \text{ m}$. On trouve $v_{\text{turb}} \sim \sqrt{1000} = 33 \text{ m/s}$, soit environ 120 Km/h. En prenant $\ell = 10 \text{ m}$, après l'ouverture du parachute, on trouve une vitesse d'arrivée au sol d'environ 3,3 m/s. Ces ordres de grandeur sont corrects (la véritable vitesse limite de chute libre est en fait environ deux fois plus élevée). Le nombre de Reynolds est ici d'environ ($\nu_{\text{air}} \sim 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$)

$$R = \frac{1 \times 33}{10^{-5}} \sim 3.10^6.$$

Dans ces conditions, la formule laminaire donne un résultat ridicule (de l'ordre de la vitesse de la lumière).

Exercice

Deux disques contra-rotatifs de diamètre $\emptyset = 10 \text{ cm}$ tournent dans de l'eau à la vitesse angulaire $\Omega = 2\pi f$. (figure)

$$\nu_{\text{eau}} \sim 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$$

On prendra, pour échelle d'injection, la moitié du rayon des disques et, pour échelle de vitesse, la vitesse du disque à mi-rayon.

La masse d'eau en mouvement est d'environ $M = 5 \text{ kg}$. Les disques tournent à une fréquence de 20Hz.

On demande d'estimer :

- le nombre de Reynolds R_I ;
- la puissance W fournie aux disques;

- l'échelle de dissipation ℓ_d .

On se propose d'augmenter le nombre de Reynolds R_I d'un facteur 10. Pour cela, on envisage 2 solutions :

1. faire tourner les disques dix fois plus vite,
2. remplacer l'eau par du mercure ($\nu_{\text{Hg}} \sim \nu_{\text{eau}}/10$; $\rho_{\text{Hg}} = 13,6\rho_{\text{eau}}$).

Calculer la puissance nécessaire dans les deux hypothèses. Qu'en pensez-vous ?

Réponses:

$$\begin{aligned}
 R_I &= 76\,000 \\
 \ell_d &= 55\,\mu\text{m} \\
 W &= 700\,\text{W} \\
 W_{\text{eau}} &= 700\,000\,\text{W} \\
 W_{\text{Hg}} &= 7\,000\,\text{W}.
 \end{aligned}$$

Bibliographie

- [1] L. Landau et E. Lifchitz
Mécanique des fluides
Editions MIR, Moscou.
- [2] L.F. Richardson, “Weather prediction by Numerical Process”, Cambridge University Press 1922.
- [3] A. N. Kolmogorov. The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds number. *C. R. Acad. Sci. U.S.S.R.*, **30**:9–13, 1941.
- [4] A. N. Kolmogorov. On degeneration decay of isotropic turbulence in an incompressible viscous liquid. *C. R. Acad. Sci. U.S.S.R.*, **31**:538–540, 1941.
- [5] A. N. Kolmogorov. Dissipation of energy in locally isotropic turbulence. *C. R. Acad. Sci. U.S.S.R.*, **32**:16–18, 1941.
- [6] L. Richardson, Atmospheric diffusion shown on a distance neighbor graph, *Proc. Roy. Soc. London, Sci.* **110** (1926) 709-737.