Chapitre 2

Résultats exacts pour les fonctions de structure

Nous suivrons principalement dans ce chapitre les réferences [1, 2, 3] en utilisant des notations et méthodes de démonstration proches de [4].

Introduction

Un dispositif expérimental très populaire en turbulence développée consiste à effectuer des mesures vélocimétriques en un point, à l'aide d'une sonde à fil chaud. L'anénomètrie est sensible au module de la vitesse sur la sonde. On sélectionne en général un écoulement ayant une vitesse moyenne importante, typiquement la turbulence derrière une grille placée dans une soufflerie (Figure).

Soit $\vec{u}$ la vitesse sur la sonde et $\vec{u}_T = \vec{u} - \langle \vec{u} \rangle$ les fluctuations de vitesse turbulentes. Le taux de turbulence d'un tel écoulement est défini comme le rapport à la vitesse moyenne de la valeur $r.m.s$ des fluctuations.

$$\tau = \frac{\sqrt{\langle \vec{u}_T^2 \rangle}}{|\langle \vec{u} \rangle|}.$$

Pour une turbulence de grille, on a typiquement $\tau \sim 10^{-2}$. La faible valeur de τ permet deux simplifications importantes.
D'une part, la sonde étant sensible au module de la vitesse, on mesure en fait les fluctuations longitudinales. En effet en écrivant $\vec{u}_T = \vec{u}_{T\|} + \vec{u}_{T\perp}$ avec $\vec{u}_{T\perp} \cdot \langle \vec{u} \rangle = 0$ il vient

$$(\langle \vec{u} \rangle + \vec{u}_{T\|} + \vec{u}_{T\perp})^2 = \langle \vec{u} \rangle^2 + 2\langle \vec{u} \rangle \vec{u}_{T\|} + \vec{u}_{T\|}^2 + \vec{u}_{T\perp}^2$$

ce qui montre que les fluctuations transverses ont une contribution du deuxième ordre en τ.
D'autre part, en utilisant l'invariance galiléenne, les mesures vélocimétriques temporelles en un point fixe peuvent être ramenées à des mesures spatiales à temps fixé. Pour cela on se place dans le repère où $\langle \vec{u} \rangle = 0$. La tranformation de Galilée nous donne dans ce repère

$$\vec{u}_{\mathrm{sonde}}(t) = \langle \vec{u} \rangle + \vec{u}_T(-\langle \vec{u} \rangle t, t),$$

où la fonction $\vec{u}_T$ est prise dans le repère mobile dont l'origine spatiale coïncide avec la sonde à $t = 0$. L'hypothèse de Taylor consiste à considérer que si l'intervalle de mesure n'est pas trop long, on peut considérer la turbulence comme figée dans ce repère. On a ainsi accès aux variations spatiales de la vitesse turbulente.
Typiquement, le signal vélocimétrique est alors dépouillé en terme de la statistique de ces variations spatiales. Les incréments du signal mesuré $u(t + \delta t) - u(t)$ sont considérés comme des variations spatiales longitudinales de la vitesse

$$\delta u_\| = u_\|(x + \ell) - u_\|(x) \text{ avec } \ell = -|\langle \vec{u} \rangle|\delta t$$

Les résultats des mesures sont généralement présentés sous forme de fonction de structure longitudinale d'ordre p

$$S_p(\ell) = \langle (\delta u_\|)^p \rangle.$$

Le but du présent chapitre est de démontrer certains résultats théoriques exacts relatifs aux fonctions de structure d'ordre deux et trois. Le plus important de ces résultats est la loi des quatre-cinquièmes :

$$S_3(\ell) = -\frac{4}{5}\varepsilon \ell$$

2.1 La relation de Kármán-Howarth-Monin

On considère une turbulence entretenue. Pour cela on a besoin de disposer d'un mécanisme qui injecte de l'énergie à grande échelle. Mathématiquement la méthode la plus simple consiste à ajouter aux équations de Navier-Stokes une force volumique $\rho\vec{f}(x,t)$, que l'on supposera ensuite n'agir qu'aux grandes échelles. Nous considérons donc le système décrit par les équations

$$\left\{\begin{array}{l} \partial_t \vec{u} + (\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u} = \frac{1}{\rho}\nabla p + \vec{f} \\ div\ v = 0 \end{array}\right. \tag{2.1}$$

Comme $\rho\vec{f}$ est une force volumique, $\vec{f}$ est une accélération locale, i.e. $[\vec{f}] = LT^{-2}$. A ce point nous faisons trois hypothèses :

- H_1 - Nous supposons que $f(x,t)$ est stationnaire et homogène, c'est-à-dire que ses propriétés statistiques sont invariantes par translation du temps et de l'espace.
- H_2 - Nous supposons que les équations de Navier-Stokes admettent une solution statistiquement homogène (mais pas forcément stationnaire, pour pouvoir également traiter le cas du déclin : $\vec{f} = 0$).
- H_3 - Nous supposons que les quantités que nous allons définir et manipuler existent et sont finies. Remarquons que nous ne supposons pas l'isotropie, à ce stade.

En définissant les accroissements de vitesse

$$\delta\vec{v}(\vec{r},\vec{\ell}) = \vec{v}(\vec{r}+\vec{\ell}) - \vec{v}(\vec{r}),$$

on s'intéresse à la quantité

$$\langle|\delta\vec{v}^2(\vec{r},\vec{\ell})|\delta\vec{v}(\vec{r},\vec{\ell})\rangle$$

où les crochets indiquent une moyenne d'ensemble (moyenne sur les réalisations de $\vec{f}$). En raison de l'homogénéité, cette quantité n'est fonction que de $\vec{\ell}$ (et pas de $\vec{r}$).

En notant $v_i, f_i, r', v'_i, \partial_i, \partial'_i$ et ∇_ℓ respectivement $v_i(r), f_i(r),\ \vec{r}+\vec{\ell},\ v_i(\vec{r}+\vec{\ell}),\ \frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial x'_i}$ et $\frac{\partial}{\partial \ell_i}$ l'homogénéité entraîne pour toute moyenne d'ensemble :

$$\partial_i\langle(\bullet)\rangle = -\partial'_i\langle(\bullet)\rangle = -\nabla_{\ell_i}\langle(\bullet)\rangle. \tag{2.2}$$

En partant des équations de Navier-Stokes (2.1) on obtient :

$$\begin{aligned}\partial_t\tfrac{1}{2}\langle v_i v'_i\rangle = \ & -\tfrac{1}{2}\partial_j\langle v_i v_j v'_i\rangle - \tfrac{1}{2}\partial'_j\langle v'_i v'_j v_i\rangle \\ & -\tfrac{1}{2\rho}\langle v'_i\partial_i p\rangle - \tfrac{1}{2\rho}\langle\partial'_i p' v_i\rangle \\ & +\tfrac{1}{2}\langle v'_i f_i\rangle + \tfrac{1}{2}\langle v_i f'_i\rangle \\ & +\tfrac{1}{2}\nu(\partial_{jj}+\partial'_{jj})\langle v_i v'_i\rangle\end{aligned} \tag{2.3}$$

où on a utilisé l'incompressibilité pour écrire les termes inertiels dans la première ligne, ainsi que la commutation des dérivées et des moyennes. Les termes de la seconde ligne sont nuls à cause de l'incompressibilité. Les termes faisant intervenir la force peuvent, en utilisant l'homogénéité, se regrouper sous la forme :

$$\left\langle \vec{v}(r)\cdot\frac{\vec{f}(\vec{r}+\vec{\ell})+\vec{f}(\vec{r}-\vec{\ell})}{2}\right\rangle. \tag{2.4}$$

De même le terme visqueux peut se récrire

$$\nu\nabla^2_{\vec{\ell}}\langle\vec{v}(\vec{r})\vec{v}(\vec{r}+\vec{\ell})\rangle. \tag{2.5}$$

Les termes inertiels peuvent eux s'exprimer à partir de $\langle|\delta\vec{v}|^2\delta v_j\rangle$ en effet :

$$\begin{aligned}\langle|\delta\vec{v}|^2\delta v_j\rangle &= \langle(v'_i-v_i)(v'_i-v_i)(v'_j-v_j)\rangle \\ &= -\langle v'_i v'_i v_j\rangle + \langle v_i v_i v'_j\rangle \\ &\quad -2\langle v_i v'_i v'_j\rangle + 2\langle v_i v'_i v_j\rangle \\ &\quad +\langle v'_i v'_i v'_j\rangle - \langle v_i v_i v_j\rangle\end{aligned} \tag{2.6}$$

Les deux derniers termes se simplifient par homogénéité.

Evaluons $\nabla_{\vec{\ell}_j}\ \langle|\delta\vec{v}|^2\delta v_j\rangle$. Par incompressibilité, les deux premiers termes ont une contribution nulle. On obtient alors :

$$\nabla_{\vec{\ell}_j}\langle|\delta\vec{v}|^2\delta v_j\rangle = -2\partial'_j\langle v_i v'_i v'_j\rangle - 2\partial_j\langle v_i v'_i v_j\rangle \tag{2.7}$$

ce qui est quatre fois les termes inertiels de (2.3).

Donc, en regroupant (2.3), (2.4), (2.5) et (2.7) il vient finalement la relation de Kármán-Howarth-Monin :

$$\begin{aligned} \varepsilon(\vec{\ell}) &\equiv -\tfrac{1}{4}\nabla_{\vec{\ell}} \cdot \langle |\delta\vec{v}(\vec{\ell})|^2 \delta\vec{v}(\vec{\ell})\rangle \\ &= -\partial_t \tfrac{1}{2}\langle \vec{v}(\vec{r}) \cdot \vec{v}(\vec{r}+\vec{\ell})|\rangle \\ &\quad + \langle \vec{v}(\vec{r}) \cdot \tfrac{\vec{f}(\vec{r}+\vec{\ell})+\vec{f}(\vec{r}-\vec{\ell})}{2}\rangle \\ &\quad + \nu\nabla_{\ell}^2 \langle \vec{v}(\vec{r}) \cdot \vec{v}(\vec{r}+\vec{\ell})\rangle. \end{aligned} \tag{2.8}$$

La quantité $\varepsilon(\vec{\ell})$ que nous venons de définir peut recevoir l'interprétation suivante.

En partant des équation de Navier-Stokes, on calcule $-\partial_t \frac{1}{2}\langle \vec{v}(r) \cdot \vec{v}(\vec{r}+\vec{\ell})\rangle$. Il vient une contribution due à la force d'agitation, une due aux termes non linéaires. $\varepsilon(\vec{\ell})$ est la contribution des termes non linéaires.

2.2 Bilan d'énergie dans l'espace spectral

Prenons la transformée de Fourier par rapport à $\vec{\ell}$ de la relation de Kármán-Howarth-Monin.

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\ell e^{i\vec{\ell}\vec{k}} \partial_t \tfrac{1}{2}\langle v(\vec{r}) \cdot v(\vec{r}+\vec{\ell})\rangle &= \tfrac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\ell e^{i\vec{\ell}\vec{k}} \Big[\tfrac{1}{4}\nabla_{\vec{\ell}} \langle |\delta\vec{v}(\vec{\ell})|^2 \delta\vec{v}(\ell)\rangle \\ &\quad + \nu\nabla_{\vec{\ell}}^2 \langle \vec{v}(\vec{r})\vec{v}(\vec{r}+\vec{\ell})\rangle \\ &\quad + \left\langle \vec{v}(\vec{r}) \cdot \tfrac{\vec{f}(\vec{r}+\vec{\ell})+\vec{f}(\vec{r}-\vec{\ell})}{2} \right\rangle\Big] \end{aligned} \tag{2.9}$$

en définissant,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\vec{k}) &= \tfrac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\ell e^{i\vec{\ell}\vec{k}} \tfrac{1}{2}\langle \vec{v}(r) \cdot v(\vec{r}+\vec{\ell})\rangle \\ \mathcal{F}(\vec{k}) &= \tfrac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\ell e^{i\vec{\ell}\vec{k}} \langle \vec{v}(r) \tfrac{f(\vec{r}+\vec{\ell})+f(\vec{r}-\vec{\ell})}{2}\rangle \\ \mathcal{T}(\vec{k}) &= \tfrac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\ell e^{i\vec{\ell}\vec{k}} \tfrac{1}{4}\nabla_{\vec{\ell}} \langle |\delta\vec{v}(\vec{\ell})|^2 \delta\vec{v}(\vec{\ell})\rangle \end{aligned} \tag{2.10}$$

(2.9) s'écrit

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{E}(\vec{k}) = \mathcal{T}(\vec{k}) - 2\nu\vec{k}^2\mathcal{E}(\vec{k}) + \mathcal{F}(\vec{k}) \tag{2.11}$$

Cette relation exprime le bilan d'énergie dans l'espace spectral. En effet, la définition de $\mathcal{E}(\vec{k})$ (2.10) est la généralisation à 3D du théorème de Winer-Kitchtine qui énonce que la densité spectrale d'énergie d'un signal est la transformée de Fourier de sa fonction de corrélation. On a bien, en utilisant la relation

$$\int d^3k e^{ik\ell} = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{\ell}), \ \int d^3k \mathcal{E}(\vec{k}) = \frac{1}{2}\langle \vec{v}^2 \rangle. \tag{2.12}$$

Les relations exactes que nous avons obtenues jusqu'à présent ont été établies en utilisant, en plus des équations de Navier-Stokes, l'homogénéité de la turbulence. Elles sont donc en général applicables à une situation homogène anisotrope.

Pour une turbulence isotrope (par exemple la turbulence de grille) ces relations se simplifient grandement. En particulier, les quantités présentes dans (2.11) ne sont plus fonction de la direction du vecteur $\vec{k}$. Dans le cas isotrope, il est usuel de définir les densités intégrées sur les angles

$$\begin{aligned} E(k) &= 4\pi k^2 \mathcal{E}(\vec{k}) \\ F(k) &= 4\pi k^2 \mathcal{F}(\vec{k}) \\ T(k) &= 4\pi k^2 \mathcal{T}(\vec{k}) \end{aligned} \tag{2.13}$$

de façon à avoir, par exemple, $\int_0^\infty E(k)dk = \frac{1}{2}\langle \vec{v}^2 \rangle$. Dans le cas isotrope, (2.11) se réduit à

$$\frac{\partial}{\partial t} E(k) = T(k) - 2\nu k^2 E(k) + F(k). \tag{2.14}$$

Les différents termes de cette équation s'appellent respectivement les spectres d'énergie, de transfert, de dissipation d'énergie, et de forçage.

Pour rendre quantitative la notion de "taux de cascade de Richardson" on définit également le flux d'énergie

$$\pi(k) = -\int_0^k dk\ T(k) \tag{2.15}$$

de façon à ce que $T(k)$, qui est la partie provenant des nonlinéarités de la variation temporelle de $E(k)$, puisse s'écrire comme

$$T(k) = -\frac{\partial}{\partial k} \pi(k) \tag{2.16}$$

En regroupant (2.10), (2.11), (2.13) et (2.15) on a, pour le flux d'énergie l'expression:

$$\pi(k) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{|\vec{k}|<k} d^3k \int d^3\ell e^{i\vec{k}\vec{\ell}} \left[-\frac{1}{4} \nabla_{\vec{\ell}} \langle |\delta\vec{u}|\vec{\ell})|^2 \delta\vec{u}(\vec{\ell}) \right] \tag{2.17}$$

Cette relation justifie la notation $\varepsilon(\vec{\ell})$ adoptée dans la section précédente. Remarquons que (2.17) est valable également dans le cas anisotrope, à condition d'écrire le bilan d'énergie sous la forme cumulée

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{|\vec{k}|<k} d^3k\mathcal{E}(\vec{k}) + \pi(k) = \int_{|\vec{k}|<k} d^3k[\mathcal{F}(\vec{k}) - 2\nu k^2\mathcal{E}(\vec{k})]. \tag{2.18}$$

Le materiel de la section suivante va nous permettre d'ecrire (2.17) sous une forme plus simple.

2.2.1 Transformée de Fourier d'une fonction isotrope

Les formules générales définissant la transformée de Fourier à 3D

$$\begin{aligned} f(\vec{\ell}) &= \int d^3k e^{-i\vec{k}\vec{\ell}}\hat{f}(\vec{k}) \\ \hat{f}(\vec{k}) &= \tfrac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\ell e^{ik\ell} f(\vec{\ell}) \end{aligned} \tag{2.19}$$

peuvent se réduire à des intégrales unidimensionnelles dans le cas où la fonction f dépend uniquement de ℓ. En effet, dans ce cas les définitions (2.19) donnent, en coordonnées sphériques k, θ, φ,

$$\begin{aligned} f(\ell) &= \int_0^\infty dk \int_0^\pi kd\theta \int_0^{2\pi} k\sin\theta d\varphi e^{-ikl\cos\theta}\hat{f}(k) \\ f(\ell) &= \int_0^\infty 4\pi k^2 dk \int_0^\pi \tfrac{d\theta}{2}\sin\theta e^{-ik\ell\cos\theta}\hat{f}(k) \end{aligned} \tag{2.20}$$

soit, en effectuant l'intégrale sur θ

$$f(\ell) = \int_0^\infty 4\pi k^2 dk \left[\frac{e^{-ik\ell\cos\theta}}{2ik\ell}\right]_0^\pi \hat{f}(k) \tag{2.21}$$

et donc finalement

$$f(\ell) = \int_0^\infty 4\pi k^2 dk \frac{\sin(k\ell)}{k\ell}\hat{f}(k) \tag{2.22}$$

la relation inverse étant

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_0^\infty 4\pi\ell^2 d\ell \frac{\sin(k\ell)}{k\ell} f(\ell) \tag{2.23}$$

Les relations (2.22) et (2.23) déduites de (2.19) peuvent également s'écrire, en posant

$$\begin{aligned} F(k) &= 4\pi k^2\hat{f}(k) \\ f(\ell) &= \int_0^\infty dk \tfrac{\sin(k\ell)}{k\ell} F(k) \\ F(k) &= \tfrac{2}{\pi}\int_0^\infty d\ell\ k\ell\ \sin(k\ell) f(\ell) \end{aligned} \tag{2.24}$$

Ces relations permettent d'écrire $\pi(k)$ à partir de (2.17) sous la forme

$$\pi(k) = \frac{2}{\pi} \int_0^k dk \int_0^\infty d\ell \; k\ell \; \sin(k\ell)\varepsilon(\ell) \tag{2.25}$$

soit, en faisant l'integrale sur k

$$\pi(k) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty d\ell \; \frac{\sin(k\ell) - k\ell \cos(k\ell)}{\ell} \; \varepsilon(\ell). \tag{2.26}$$

Cette intégrale peut être mise sous la forme

$$\pi(k) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty d\ell \left[\frac{\sin(k\ell)}{\ell} - \frac{d}{d\ell} \sin(k\ell) \right] \varepsilon(\ell), \tag{2.27}$$

et en intégrant par partie le dernier terme, il vient

$$\pi(k) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty d\ell \frac{\sin(k\ell)}{\ell} (1 + \ell\partial_\ell)\varepsilon(\ell) \tag{2.28}$$

2.3 Fonctions de structures isotropes

La relation de Kármán-Howarth-Monin fait intervenir des fonctions de corrélation, ainsi qu'une combinaison de dérivées des composantes de la fonction de structure d'ordre 3. Pour obtenir les relations utilisables dans un cadre expérimental, où pratiquement seules les composantes longitudinales sont accessibles, il faut utiliser l'isotropie pour tout exprimer à partir de ces composantes.
Le calcul de la fonction de structure d'ordre 3 etant assez compliqué, nous commençons par calculer la fonction de structure d'ordre 2. Bien que non nécessaire à l'établissement de la loi des 4/5, l'expression de la fonction de structure isotrope d'ordre 2 va nous permettre de définir, à partir de la fonction longitudinale, l'échelle de Taylor ainsi que le le nombre de Reynolds associé.

2.3.1 Fonction de structure d'ordre 2

Un certain nombre de relations, portant sur les fonctions de structure peuvent être établies en supposant, en plus de l'homogénéité, l'isotropie.
La fonction de structure d'orde deux

$$B_{ij}(\vec{\ell}) = \langle (v'_i - v_i)(v'_j - v_j) \rangle$$

(avec les notations de la section 2.1) ne peut dépendre, en raison de l'isotropie d'aucune direction spatiale privilégiée. Le seul vecteur pouvant figurer dans son expression est $\vec{\ell}$. En appelant $\ell_i^0 = \frac{\ell_i}{\ell}$ le vecteur unitaire dans la direction de $\vec{\ell}$, la forme la plus générale pour B_{ij} est

$$B_{ij} = A(\ell)\delta_{ij} + B(\ell)\ell_i^0\ell_j^0. \tag{2.29}$$

En posant

$$b_{ij} = \langle v_i v'_j \rangle \tag{2.30}$$

la définition de B_{ij} donne

$$B_{ij} = \langle v_i v_j \rangle + \langle v'_i v'_j \rangle - b_{ij} - b_{ji}. \tag{2.31}$$

En utilisant les relations

$$\langle v_i v_j \rangle = \langle v'_i v'_j \rangle = \frac{1}{3}\langle v^2 \rangle \delta_{ij} \tag{2.32}$$

et

$$b_{ij}(\vec{\ell}) = b_{ji}(-\vec{\ell}) = b_{ji}(\vec{\ell}) \tag{2.33}$$

il vient

$$B_{ij} = \frac{2}{3}\langle \vec{v}^2 \rangle \delta_{ij} - 2b_{ij}. \tag{2.34}$$

D'autre part l'incompressibilité entraîne

$$\frac{\partial}{\partial \ell_i} B_{ij} = 0 \tag{2.35}$$

En utilisant les relations

$$\frac{\partial \ell}{\partial \ell_k} = \ell_k^o \text{ et } \frac{\partial \ell_i^0}{\partial \ell_k} = \frac{1}{\ell}(\delta_{ik} - \ell_i^0 \ell_k^0) \tag{2.36}$$

soit

$$\frac{\partial}{\partial \ell_i} \equiv \ell_i^0 \frac{\partial}{\partial \ell} + \frac{1}{\ell}(\delta_{ik} - \ell_i^0 \ell_k^0)\frac{\partial}{\partial \ell_k^0} \tag{2.37}$$

(2.29) donne

$$\ell_j^0(A'(\ell) + B'(\ell)) + 2\ell_j^0 \frac{B(\ell)}{\ell} = 0 \tag{2.38}$$

soit

$$A'(\ell) + B'(\ell) + \frac{2}{\ell} B(\ell) = 0. \tag{2.39}$$

ou encore,

$$B(\ell) + \frac{1}{2}\ell\partial_\ell (A+B) = 0. \tag{2.40}$$

De sorte qu'en définissant les composantes longitudinales et tranverses

$$\begin{array}{ll} A+B & = B_{\ell\ell} \\ A & = B_{tt} \end{array} \tag{2.41}$$

on a

$$B_{\ell\ell} - B_{tt} + \frac{1}{2}\ell\partial_\ell B_{\ell\ell} = 0 \tag{2.42}$$

soit

$$B_{tt} = (1 + \frac{1}{2}\ell\partial_\ell) B_{\ell\ell} \tag{2.43}$$

de sorte que, pour $\ell \ll \ell d$
$B_{\ell\ell} = a\ell^2$, et donc

$$B_{tt} = 2a\ell^2 \tag{2.44}$$

2.3.2 Echelle de Taylor

Ces expressions permettent de relier a à la dissipation d'énergie ε. En effet, la relation $\varepsilon = \langle \frac{1}{2}\nu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)^2 \rangle$ nous donne

$$\varepsilon = \nu \left[\langle \frac{\partial v_i \partial v_i}{\partial x_j \partial x_j} \rangle + \langle \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \rangle \right] \tag{2.45}$$

et (2.29) donne

$$\langle v_i v'_j \rangle = \langle v_i v_j \rangle - \frac{1}{2} B_{ij} \tag{2.46}$$

soit, en utilisant (2.41), (2.43), et (2.44)

$$\langle v_i v'_j \rangle = \langle v_i v_j \rangle - \left[a\ell^2 \delta_{ij} - \frac{a}{2}\ell_i \ell_j \right] \tag{2.47}$$

En utilisant les relations

$$\frac{\partial}{\partial x'_i} = \frac{\partial}{\partial \ell} \text{ et } \frac{\partial}{\partial x_i} = -\frac{\partial}{\partial \ell_i} \tag{2.48}$$

on a

$$\langle\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\frac{\partial v'_j}{\partial x'_\ell}\rangle = +\frac{\partial^2}{\partial \ell_k \partial \ell_\ell}[a\ell^2\delta_{ij} - \frac{a}{2}\ell_i\ell_j] \tag{2.49}$$

soit

$$\langle\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\frac{\partial v'_j}{\partial x'_\ell}\rangle = a\left[2\delta_{k\ell}\delta_{ij} - \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{j\ell} + \delta_{jk}\delta_{i\ell}\right] \tag{2.50}$$

Le premier terme de (2.45) est obtenu à la limite $\ell \to 0$ comme $j \to 1$, $\ell \to k$

$$\nu a \sum_{i,k}[2 - \delta_{ik}^2] = \nu a[18 - 3] = 15\nu a \tag{2.51}$$

Le second terme est obtenu en faisant $j \to k,\ \ell \to i$

$$\nu a \sum_{i,k}[2\delta_{ik}^2 - \frac{1}{2}(\delta_{ik}^2 + 1)] = \nu a \sum_{i,k}\left[\frac{3\delta_{ik} - 1}{2}\right] = 0 \tag{2.52}$$

On a donc

$$\varepsilon = 15\nu a. \tag{2.53}$$

(2.44) peut donc s'écrire

$$\begin{aligned} B_{\ell\ell} &= \tfrac{1}{15}\tfrac{\varepsilon}{\nu}\ell^2 \\ B_{tt} &= \tfrac{2}{15}\tfrac{\varepsilon}{\nu}\ell^2 \end{aligned} \tag{2.54}$$

En définissant l'échelle de Taylor λ comme

$$B_{\ell\ell} = v_{rms}^2\frac{\ell^2}{\lambda^2} \tag{2.55}$$

avec

$$v_{rms} = \sqrt{\langle\vec{v}^2\rangle} \tag{2.56}$$

il vient

$$\varepsilon = 15\nu v_{rms}^2/\lambda^2 \tag{2.57}$$

ou

$$\lambda = \sqrt{\frac{15\nu}{\varepsilon}}v_{rms} \tag{2.58}$$

Dans un régime à la Kolmogorov, on a (en utilisant les notations du chapitre 1)

$$\varepsilon \sim \delta u_I^3/\ell_I \quad v_{rms} \sim \delta u_I \tag{2.59}$$

et

$$\lambda \sim \sqrt{\frac{\nu \delta u_I^2}{\delta u_I^3/\ell_I}} = \ell_I \sqrt{\frac{\nu}{\delta u_I \ell_I}} = \frac{\ell_I}{\sqrt{R_I}} \tag{2.60}$$

L'échelle de Taylor λ et la vitesse u_{rms} permettent de définir un nombre de Reynolds entièrement basé sur des échelles internes $R_\lambda = \frac{u_{rms}\lambda}{\nu}$, en régime de Kolmogorov, on a $R_\lambda \sim \sqrt{R_I}$.

2.3.3 Fonction de structure d'ordre 3

Nous passons maintenant au calcul de la fonction de structure isotrope d'ordre 3. Dans ce but considérons les quantités (avec les notations de la section 2.1)

$$b_{ij,m} = \langle v_i v_j v'_m \rangle \tag{2.61}$$

à cause de l'isotropie, $b_{ij,m}$ doit s'exprimer comme fonction de δ_{ij}, $\ell_i^0 \equiv \frac{\ell_i}{\ell}$ et de ℓ. En tenant compte de la symétrie en i, j, la forme la plus générale pour $b_{ij,m}$ est

$$b_{ij,m} = C(\ell)\delta_{ij}\ell_m^0 + D(\ell)(\delta_{im}\ell_j^0 + \delta_{jm}\ell_i^0) + F(\ell)\ell_i^0\ell_j^0\ell_m^0 \tag{2.62}$$

l'incompressibilité entraîne

$$\partial'_m b_{ij,m} = 0 \tag{2.63}$$

pour calculer la divergence, rappelons les relations

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ell}{\partial \ell_k} &= \ell_k^0 \\ \frac{\partial \ell_i^0}{\partial \ell_k} &= \frac{1}{\ell}(\delta_{ik} - \ell_i^0 \ell_k^0) \end{aligned} \tag{2.64}$$

qui s'obtiennent facilement en calculant les dérivées de $\ell = \sqrt{\ell_i^2}$, (2.64) entraîne en particulier $\frac{\partial \ell_i^0}{\partial \ell_i} = \frac{2}{\ell}$ et $\ell_i^0 \frac{\partial \ell_j^0}{\partial \ell_i} = 0$.

A l'aide de ces expressions, (2.63) donne

$$\begin{aligned} C'(\ell)\delta_{ij} \quad & +\tfrac{2}{\ell}C(\ell)\delta_{ij} \\ & +2D'(\ell)\ell_i^0\ell_j^0 + D(\ell)\tfrac{2}{\ell}(\delta_{ij} - \ell_i^0\ell_j^0) \\ & +F'(\ell)\ell_i^0\ell_j^0 + F(\ell)\left[\tfrac{2}{\ell}\ell_i^0\ell_j^0\right] = 0 \end{aligned} \tag{2.65}$$

soit

$$[C' + \frac{2}{\ell}(C+D)]\delta_{ij} + \left[(2D+F)' + \frac{2(F-D)}{\ell}\right]\ell_i^0\ell_j^0 = 0. \tag{2.66}$$

Ces équations s'écrivent sous la forme équivalente

$$\begin{array}{ll} [\ell^2(3C+2D+F)]' & = 0 \text{ (en prenant la trace)} \\ C' + \frac{2}{\ell}(C+D) & = 0. \end{array} \tag{2.67}$$

La seule solution de la première équation compatible avec un $b_{ij,m}$ non infini en $\ell = 0$ est :

$$3C + 2D + F = 0 \tag{2.68}$$

On peut donc exprimer D et F en fonction de C et C', sous la forme :

$$\begin{array}{ll} D & = -(C + \frac{\ell C'}{2}) \\ F & = \ell C' - C. \end{array} \tag{2.69}$$

En utilisant ces expressions, il vient

$$\begin{array}{ll} b_{ij,m} = C\delta_{ij}\ell_m^0 & -(C + \frac{\ell C'}{2})(\delta_{im}\ell_j^0 + \delta_{jm}\ell_i^0) \\ & +(\ell C' - C)\ell_i^0\ell_j^0\ell_m^0. \end{array} \tag{2.70}$$

Nous pouvons utiliser cette expression pour trouver la forme d'une composante quelconque de la fonction de structure d'ordre 3.

$$\begin{array}{ll} B_{ijm} & = \langle (v_i' - v_i)(v_j' - v_j)(v_m' - v_m)\rangle \\ B_{ijm} & = 2(b_{ij,m} + b_{jm,i} + b_{mi,j}). \end{array} \tag{2.71}$$

Il vient

$$\begin{array}{ll} B_{ijm} = & -2(\ell C' + C)(\delta_{ij}\ell_m^0 + \delta_{jm}\ell_i^0 + \delta_{mi}\ell_j^0) \\ & +6(\ell C' - C)\ell_i^0\ell_j^0\ell_m^0 \end{array} \tag{2.72}$$

Ce résultat général nous permet d'exprimer la fonction de structure longitudinale d'ordre 3 sous la forme

$$\begin{array}{ll} S_3(\ell) = \langle (\delta v_\parallel(\vec{\ell}))\rangle & = -6(\ell C' + C) + 6(\ell C' - C) \\ \text{Soit } S_3(\ell) & = -12C. \end{array} \tag{2.73}$$

Il permet également de trouver l'expression isotrope de

$$\begin{array}{ll} \langle |\delta\vec{v}|^2\delta v_m\rangle & = B_{iim} \\ B_{iim} & = [-10(\ell C' + C) + 6(\ell C' - C)]\ell_m^0 \\ B_{iim} & = [-4\ell C' - 16C]\ell_m^0 \end{array} \tag{2.74}$$

et donc

$$\begin{aligned}\varepsilon(\ell) &\equiv -\tfrac{1}{4}\nabla\vec{\ell}\langle|\delta\vec{v}|^2\delta\vec{v}\rangle \quad = (\tfrac{2}{\ell}+\partial_\ell)(\ell C'+4C)\\ \varepsilon(\ell) &= \ell C''+7C'+\tfrac{8C}{\ell}.\end{aligned} \tag{2.75}$$

Cette équation étant homogène à $\frac{C}{\ell}$, elle peut se mettre sous la forme

$$(\ell\partial_\ell+\alpha)(\ell\partial_\ell+\beta)\frac{C(\ell)}{\ell} = \ell C''(\ell)+(\alpha+\beta-1)C'(\ell)+(\alpha-1)(\beta-1)\frac{C(\ell)}{\ell} \tag{2.76}$$

en identifiant, on trouve

$$\alpha+\beta=8\ ,\ (\alpha-1)(\beta-1)=8 \text{ et donc } \alpha=3, \beta=5. \tag{2.77}$$

$$\varepsilon(\ell) = (3+\ell\partial_\ell)(5+\ell\partial_\ell)\frac{C(\ell)}{\ell} \tag{2.78}$$

En regroupant (2.73) et (2.78) on a l'expression reliant $\varepsilon(\ell)$ à la fonction de structure longitudinale d'ordre 3.

$$\varepsilon(\ell) = -\frac{1}{12}(3+\ell\partial_\ell)(5+\ell\partial_\ell)\frac{S_3(\ell)}{\ell} \tag{2.79}$$

L'expression finale du flux spectral d'énergie à partir de la fonction de structure longitudinale d'ordre 3 est obtenue en reportant (2.79) dans (2.28), il vient

$$\pi(k) = \left(-\frac{1}{12}\right)\frac{2}{\pi}\int_0^\infty d\ell\frac{\sin(k\ell)}{\ell}(1+\ell\partial_\ell)(3+\ell\partial_\ell)(5+\ell\partial_\ell)\frac{S_3(\ell)}{\ell} \tag{2.80}$$

Cette relation, avec (2.28) permet d'établir la loi des quatre-cinquièmes, comme nous allons le voir en détail dans la section suivante.

2.4 La loi des quatre-cinquièmes

2.4.1 3 hypothèses pour les $\frac{4}{5}$

La relation (2.80) peut être utilisée pour obtenir la loi des $\frac{4}{5}$ en écrivant les 3 hypothèses suivantes :

- H_1 le terme de forçage n'agit qu'en petit k
- H_2 on peut prendre la limite $t\to\infty$, et dans cette limite (ν fixé) il existe un taux de dissipation fini par unité de masse.

- H_3 on peut ensuite prendre la limite $\nu \to 0$, le taux de dissipation reste fixé.

La relation de bilan d'énergie (2.15) et (2.16)

$$\frac{\partial E(k)}{\partial t} = -\frac{\partial \pi(k)}{\partial k} - 2\nu k^2 E(k) + F(k) \tag{2.81}$$

donne, en utilisant H_2

$$0 = -\frac{\partial \pi(k)}{\partial k} - 2\nu k^2 E(k) + F(k). \tag{2.82}$$

En intégrant cette relation sur k on obtient que

$$\varepsilon_{\text{injection}} = \int_0^\infty F(k)dk = \varepsilon_d = 2\nu \int_0^\infty k^2 E(k)dk \tag{2.83}$$

En utilisant H_1 on obtient

$$F(k) = 0 \;\text{ pour } k \gg k_I \tag{2.84}$$

Et H_3 donne (en posant $\varepsilon = \lim_{\nu\to 0} \varepsilon_d$ et en integrant le bilan d'énergie entre 0 et k)

$$\pi(k) = \varepsilon \text{ pour } k \gg k_I. \tag{2.85}$$

L'expression de $\pi(k)$ (2.80) est de la forme

$$\pi(k) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty d\ell \frac{\sin(k\ell)}{\ell} G(\ell) \tag{2.86}$$

avec

$$G(\ell) = -\frac{1}{12}(1+\ell\partial_\ell)(3+\ell\partial_\ell)(5+\ell\partial_\ell)\frac{S_3(\ell)}{\ell} \tag{2.87}$$

Le comportement à grand k de $\pi(k)$ est dominé par le comportement à petit ℓ de $G(\ell)$. En effet, en posant $x = k\ell$ on trouve

$$\pi(k) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty dx \frac{\sin x}{x} G\left(\frac{x}{k}\right) \tag{2.88}$$

et donc

$$\lim_{k\to\infty} \pi(k) = G(0)\frac{2}{\pi}\int_0^\infty dx \frac{\sin x}{x}. \tag{2.89}$$

l'intégrale $\int_0^\infty dx \frac{\sin x}{x}$ peut se calculer comme

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} dk e^{ikx} = \frac{1}{4}\int_{-1}^{+1} dk 2\pi\delta(k) = \frac{\pi}{2}. \tag{2.90}$$

On trouve donc la relation, qui doit être valable pour des $\ell \ll \ell_I$

$$-\frac{1}{12}(1+\ell\partial_\ell)(3+\ell\partial_\ell)(5+\ell\partial_\ell)\frac{S_3(\ell)}{\ell} = \varepsilon. \tag{2.91}$$

En posant $y = \frac{S_3(\ell)}{\ell}$, $x = \log(\ell)$ cette relation s'écrit

$$-\frac{1}{12}(1+\partial_x)(3+\partial_x)(5+\partial_x)y = \varepsilon \tag{2.92}$$

et en posant $y = -\frac{4}{5}\varepsilon + u$, on a

$$(1+\partial_x)(3+\partial_x)(5+\partial_x)u = 0 \tag{2.93}$$

soit

$$u = Ae^{-x} + Be^{-3x} + Ce^{-5x}, \tag{2.94}$$

la seule solution finie, en $\ell \to 0$ ($x \to -\infty$) est $A = B = C = 0$.
Donc

$$S_3(\ell) = -\frac{4}{5}\varepsilon\ell \tag{2.95}$$

C.Q.F.D.

Bibliographie

[1] L. Landau et E. Lifchitz
Mécanique des fluides
Editions MIR, Moscou.

[2] G. K. Batchelor. *The theory of homogeneous turbulence.* Cambridge university press, Cambridge, 1960.

[3] A. S. Monin and A. M. Yaglom. *Statistical Fluid Mechanics.* MIT press, Cambridge, 1971.

[4] U. Frisch. *Turbulence: the Legacy of A.N Kolmogorov.* Cambridge University Press, 1995.