Chapitre 3

Dynamique de la vorticité

Introduction

Un certain nombre d'alignements remarquables entre la direction de la vorticité et les directions propres de la matrice d'étirement, d'une part et de la matrice formée des dérivées secondes de la pression, d'autre part, ont été remarqués dans les simulations numériques. Il est possible de "comprendre" ces alignements à l'aide des considérations développées dans ce chapitre.
Nous examinerons successivement les cas 2D et 3D.

3.1 Dynamique de la vorticité 2D

Le problème de la turbulence 2D est celui de la dynamique d'un fluide gouverné par les équations de Navier-Stokes 2D :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \vec{u} + (\vec{u}.v)\vec{u} = -\nabla p + \nu \Delta \vec{u} \\ \nabla \vec{u} = 0. \end{array} \right. \tag{3.1}$$

L'équation habituelle pour la vorticité $\vec{\omega} = \text{rot } \vec{u}$

$$\partial_t \vec{\omega} + (\vec{u}.\nabla)\vec{\omega} = (\omega.\nabla)u + \nu \Delta \omega \tag{3.2}$$

ne présente pqs, en 2D, le terme d'étirement de vorticité.
En effet, que l'écoulement soit bidimensionnel, cela revient à poser :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u_x &=& u_x(x,y) \\ u_y &=& u_y(x,y) \\ u_z &=& 0 \end{array} \right.$$

on en déduit

$$\left\{\begin{array}{lcl}\omega_x & = & 0\\ \omega_y & = & 0\\ \omega_z & = & \omega_z(x,y)=\partial_x u_y-\partial_y u_x.\end{array}\right.$$

Le terme en $(\omega.\nabla)u$ est identiquement nul car les gradients de vitesse sont dans le plan de l'écoulement, perpendiculaire à la direction de $\vec{\omega}$.
Les relations précédentes peuvent encore s'écrire, en introduisant le potentiel des vitesses $\psi(x,y)$ et en utilisant div $\vec{u}=0$

$$\left\{\begin{array}{lcl}u_x & = & \partial_y\psi, u_y=-\partial_x\psi\\ \omega_z & = & -\Delta\psi.\end{array}\right.$$

Les champs ψ et $\omega\equiv\omega_z$ sont des pseudo-scalaires. (3.2) se réduit donc à

$$\partial_t\omega+(u.\nabla)\omega=\nu\Delta\omega. \tag{3.3}$$

On en déduit que la vorticité est un scalaire passif (pas n'importe quel scalaire passif car on a $\omega=\text{rot}\vec{u}$). Il en résulte, dans la limite $\nu->0$, la conservation d'une infinité de grandeurs

$$I_p=\frac{1}{2}\int\omega^{2p}d^2x.$$

On a donc, pour $\nu=0$, deux quantités quadratiques conservées :
- l'énergie $E=\frac{1}{2}\int\vec{u}^2d^2x$
- et l'enstrophie $\Omega=\frac{1}{2}\int\omega^2d^2x$.

A cause de la conservation de l'enstrophie, la dissipation d'énergie $\varepsilon=2\nu\Omega$ est interdite en 2D. C'est là la différence fondamentale entre la turbulence 2D et la turbulence 3D.
En prenant le gradient de (3.3), il vient :

$$\partial_i(\partial_t\omega+u_\alpha\partial_\alpha\omega-\nu\partial_{\alpha\alpha}\omega)=0$$

soit

$$\partial_t(\partial_i\omega)+u_\alpha\partial_\alpha(\partial_i\omega)+(\partial_i u_\alpha)\partial_\alpha\omega-\nu\partial_{\alpha\alpha}\partial_i\omega=0$$

que l'on peut écrire

$$\partial_t\nabla\omega+(u.\nabla)\nabla\omega=-(\nabla u).\nabla\omega+\nu\Delta\nabla\omega$$

ce qui montre que si ω est simplement transporté, son gradient est lui étiré par les gradients de vitesse.

Il est possible de présenter ce résultat d'une manière plus semblable formellement à l'équation 3D (3.2).
Pour cela introduisons le rotationnel de la vorticité

$$\eta = \nabla \times \omega = \left[\begin{array}{c} \partial_y \omega \\ -\partial_x \omega \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \partial_y \partial_x u_y - \partial_y \partial_y u_x \\ \partial_y \partial_x u_x - \partial_x \partial_x u_y \end{array} \right]$$

en utilisant div $u = 0$ soit $\partial_x u_x = -\partial_y u_y$, on trouve

$$\eta = -\nabla^2 \left[\begin{array}{c} u_x \\ u_y \end{array} \right].$$

Le vecteur η se déduit de $\nabla \omega$ par une rotation de $\pi/2$.
En prenant le rotationnel de (3.3), il vient

$$\partial_t \eta + \left(\begin{array}{c} \partial_y [u_x \partial_x + u_y \partial_y] \omega \\ -\partial_x [u_x \partial_x + u_y \partial_y] \omega \end{array} \right) = \nu \Delta \eta$$

soit

$$\partial_t \vec{\eta} + (\vec{u}.\nabla)\vec{\eta} = \left(\begin{array}{c} -\partial_y u_x \partial_x \omega - \partial_y u_y \partial_y \omega \\ \partial_x u_x \partial_x \omega + \partial_x u_y \partial_y \omega \end{array} \right) + \nu \Delta \vec{\eta}$$

Le premier terme du membre de droite s'écrit, en utilisant $\partial_x u_x = -\partial_y u_y$,

$$\left(\begin{array}{c} -\partial_y u_x \partial_x \omega + \partial_x u_x \partial_y \omega \\ -\partial_y u_y \partial_x \omega + \partial_x u_y \partial_y \omega \end{array} \right)$$

soit, avec $\eta_x = \partial_y \omega$ et $\eta_y = -\partial_x \omega$

$$\left(\begin{array}{c} \eta_x \partial_x u_x + \eta_y \partial_y u_x \\ \eta_x \partial_x u_y + \eta_y \partial_y u_y \end{array} \right)$$

nous avons donc finalement

$$\partial_t \vec{\eta} + (\vec{u}.\nabla)\vec{\eta} = \vec{\eta}.(\nabla u) + \nu \Delta \vec{\eta}. \tag{3.4}$$

Cette équation est formellement identique à (3.2). Il faut remarquer que dans (3.2) seule la partie symétrique de la matrice (∇u) contribue, alors que dans (3.4) la partie anti-symétrique contribue également.

3.1.1 Structure des petites échelles dans la turbulence 2D

En supposant une séparation d'échelle entre (∇u) et $\vec{\eta}$ (3.4) peut s'écrire (pour $\nu = 0$)

$$D_t\vec{\eta} = \eta.(\nabla u).$$

Il est clair que ce sont les valeurs propres de la matrice (∇u) qui vont déterminer la dynamique des petites échelles. En posant

$$S = (\nabla u) + (\nabla u)^{\mathrm{tr}}$$

il vient

$$\nabla u = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} S_{11} & S_{12}+\omega \\ S_{12}-\omega & -S_{11} \end{pmatrix}$$

L'équation aux valeurs propres de cette matrice de trace nulle est :

$$\lambda^2 + \det(\nabla u) = 0$$

soit

$$\lambda\pm = \pm\sqrt{-\det(\nabla u)} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{S_{11}^2 + S_{12}^2 - \omega^2}$$

en posant $\sigma^2 = S_{11}^2 + S_{12}^2$

$$\lambda\pm = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 - \omega^2}$$

Le déterminant $\det(\nabla u)$ est appelé "déterminant de Weiss". On voit que suivant son signe les valeurs propres sont soit imaginaires pures (régions elliptiques) soit rélles (régions hyperboliques). Il est intéressant de noter que le déterminant de Weiss $\det(\nabla u) = \omega^2 - \sigma^2$ peut également s'écrire comme Δp. Les régions où la vorticité domine sur le strain correspondant aux zones de basse pression et celles où le strain domine aux hautes pressions.

3.2 Dynamique de vorticité 3D

Notre point de départ sera les équations d'Euler incompressibles

$$\begin{cases} \partial_t\vec{u} + (\vec{u}.\nabla)\vec{u} = -\nabla p \\ \nabla\vec{u} = 0, \end{cases}$$

que nous écrirons ici sous la forme

$$\begin{cases} \partial_t u_j + (u_\alpha \partial_\alpha) u_j = -\partial_j p \\ \partial_\alpha u_\alpha = 0 \end{cases}$$

(sommation sur les indices répétés.)
En définissant la dérivée lagrangienne

$$\frac{D}{Dt} \equiv \partial_t + u_\alpha \partial_\alpha,$$

qui est la dérivée “en suivant le mouvement”, notre but est de trouver des équations pour les dérivées lagrangiennes de la matrice des dévivées spatiales de la vitesse. Cette dernière peut s'écrire sous la forme

$$\partial_i u_j = \sigma_{ij} + \omega_{ij} \tag{3.5}$$

avec

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \sigma_{ji} \\ \omega_{ij} &= -\omega_{ji} \end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \tfrac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i) \\ \omega_{ij} &= \tfrac{1}{2}(\partial_i u_j - \partial_j u_i). \end{aligned} \tag{3.6}$$

Dans ce qui suit nous aurons à utiliser le tenseur complètement anti-symétrique

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ijk} &= +1 \text{ si } (i,j,k) = \text{ Perm } (1,2,3) \\ \varepsilon_{ijk} &= -1 \text{ si } (i,j,k) = \text{ Perm } (2,1,3) \\ \varepsilon_{ijk} &= 0 \text{ autrement.} \end{aligned}$$

Il est facile de vérifier qu'avec ces définitions

$$\omega_i = (\text{rot } \vec{u})_i = \varepsilon_{ijk} \partial_j u_k \tag{3.7}$$

D'autre part, on a la relation

$$\varepsilon_{ij\alpha} \varepsilon_{\alpha k \ell} = \delta_{ik} \delta_{j\ell} - \delta_{i\ell} \delta_{jk} \tag{3.8}$$

qui s'établit facilement, en remarquant que les seuls termes non nuls de la somme sont ceux pour lesquels on a simultanément $i \neq \alpha, j \neq \alpha$ et $k \neq \alpha, \ell \neq \alpha$. Cette relation nous permet, par exemple de calculer

$$\begin{aligned} (\text{rot } \omega)_i &= \varepsilon_{ijk} \partial_j \omega_k \\ &= \varepsilon_{ijk} \partial_j [\varepsilon_{k\ell m} \partial_\ell u_m] \\ &= (\delta_{i\ell} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{j\ell}) \partial_j \partial_\ell u_m \\ &= \partial_i (\partial_j u_j) - \partial_j \partial_j u_i. \end{aligned}$$

ce qui donne bien, comme il se doit la formule

$$\text{rot rot } \vec{u} = \text{grad div } \vec{u} - \Delta\vec{u}.$$

Les relations (3.7) (3.8) permettent d'écrire ω_{ij} dans (3.6) sous la forme

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\omega_k \tag{3.9}$$

Ces notations étant posées, nous voulons calculer

$$\frac{D}{Dt}\partial_i u_j = (\partial_t + u_\alpha\partial_\alpha)\partial_i u_j.$$

Pour cela, appliquons l'opérateur ∂_i aux équations d'Euler. Il vient

$$\partial_i[\partial_t u_j + (u_\alpha\partial_\alpha)u_j] = -\partial_i\partial_j p$$

soit

$$\frac{D}{Dt}\partial_i u_j = -\partial_i u_\alpha\partial_\alpha u_j - \partial_i\partial_j p. \tag{3.10}$$

Le terme $\partial_i u_\alpha\partial_\alpha u_j$ peut se calculer en utilisant (3.5) sous la forme

$$\partial_i u_\alpha\partial_\alpha u_j = (\sigma_{i\alpha} + \omega_{i\alpha})(\sigma_{\alpha j} + \omega_{\alpha j})$$

$$\partial_i u_\alpha\partial_\alpha u_j = \sigma_{i\alpha}\sigma_{\alpha j} + \omega_{i\alpha}\omega_{\alpha j} + \omega_{i\alpha}\sigma_{\alpha j} + \sigma_{i\alpha}\omega_{\alpha j}.$$

En utilisant (3.9) ainsi que les symétries de ω et σ, il vient

$$\begin{aligned}\partial_i u_\alpha\partial_\alpha u_j = \; & \sigma_{i\alpha}\sigma_{\alpha j} + \tfrac{1}{4}\varepsilon_{i\alpha\beta}\omega_\beta\varepsilon_{\alpha j\gamma}\omega_\gamma \\ & +\sigma_{i\alpha}\omega_{\alpha j} - \sigma_{j\alpha}\omega_{\alpha i}\end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned}\partial_i u_\alpha\partial_\alpha u_j = \; & \sigma_{i\alpha}\sigma_{\alpha j} - \tfrac{1}{4}\varepsilon_{i\beta\alpha}\varepsilon_{\alpha_j\gamma}\omega_\beta\omega_\gamma \\ & +\sigma_{i\alpha}\omega_{\alpha j} - \sigma_{j\alpha}\omega_{\alpha i}\end{aligned}$$

La relation (3.8) donne

$$\begin{aligned}\partial_i u_\alpha\partial_\alpha u_j = \; & \sigma_{i\alpha}\sigma_{\alpha j} - \tfrac{1}{4}[\delta_{ij}\omega_\gamma\omega_\gamma - \omega_i\omega_j] \\ & +\sigma_{i\alpha}\omega_{\alpha j} - \sigma_{j\alpha}\omega_{\alpha i}\end{aligned} \tag{3.11}$$

Les deux premiers termes du membre de droite sont symétriques $i \leftrightarrow j$ et le dernier est anti-symétrique.
En regroupant (3.10), (3.11) et (3.6), il vient

$$\frac{D}{Dt}\sigma_{ij} = \frac{1}{4}[\delta_{ij}\omega_\gamma\omega_\gamma - \omega_i\omega_j] - \sigma_{i\alpha}\sigma_{\alpha j} - \partial_i\partial_j p \tag{3.12}$$

$$\frac{D}{Dt}\omega_{ij} = \sigma_{j\alpha}\omega_{\alpha i} - \sigma_{i\alpha}\omega_{\alpha j}$$

En remarquant que $\varepsilon_{i\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} = +2\delta_{i\gamma}$
et donc, d'après (3.9)

$$\omega_j = \varepsilon_{jk\ell}\omega_{k\ell},$$

la dernière expression donne

$$\begin{aligned}
\tfrac{D}{Dt}\omega_k &= -\varepsilon_{kij}[\sigma_{i\alpha}\omega_{\alpha j} - \sigma_{j\alpha}\omega_{\alpha i}] \\
&= -\tfrac{1}{2}\varepsilon_{kij}[\sigma_{i\alpha}\varepsilon_{\alpha j\ell} - \sigma_{j\alpha}\varepsilon_{\alpha i\ell}]\omega_\ell \\
&= -\tfrac{1}{2}[\sigma_{i\alpha}\varepsilon_{kij}\varepsilon_{j\ell\alpha} + \sigma_{j\alpha}\varepsilon_{kji}\varepsilon_{i\ell\alpha}]\omega_\ell
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tfrac{D}{Dt}\omega_k = \quad & -\tfrac{1}{2}[\sigma_{i\alpha}[\delta_{k\ell}\delta_{i\alpha} - \delta_{k\alpha}\delta_{\ell i}] \\
& +\sigma_{j\alpha}[\delta_{k\ell}\delta_{j\alpha} - \delta_{k\alpha}\delta_{\ell j}]]\omega_\ell
\end{aligned}$$

soit,

$$\frac{D}{Dt}\omega_k = -\sigma_{ii}\omega_k + \sigma_{k\ell}\omega_\ell$$

soit, en utilisant l'incompressibilité $\sigma_{ii} = 0$ la relation habituelle :

$$\frac{D}{Dt}\omega_k = \sigma_{ij}\omega_j \tag{3.13}$$

Les équations (3.12) et (3.13) permettent de calculer simplement

$$\begin{aligned}
\tfrac{D^2}{Dt^2}\omega_i &= \tfrac{D}{Dt}\sigma_{ij}\omega_j \\
&= \tfrac{D}{Dt}(\sigma_{ij})\omega_j + \sigma_{ij}\tfrac{D}{Dt}\omega_j \\
&= \Big(\tfrac{1}{4}[\delta_{ij}\omega_\gamma\omega_\gamma - \omega_i\omega_j] - \sigma_{i\alpha}\sigma_{\alpha j} - \partial_i\partial_j p)\omega_j + \sigma_{ij}\sigma_{jk}\omega_k
\end{aligned}$$

soit

$$\frac{D^2}{Dt^2}\omega_i = -\partial_i\partial_j P\omega_j$$

Donc, nous venons de montrer la propriété suivante des matrices d'étirement σ_{ij} et de dérivées de pression $P_{ij} = \partial_i\partial_j p$.

$$\left\{\begin{array}{ll}
\frac{D\omega}{Dt} & = \sigma_{ij}\omega_j \\
\frac{D^2\omega}{Dt^2} & = -P_{ij}\omega_j \\
\frac{D}{Dt}\sigma_{ij} & = \frac{1}{4}[\delta_{ij}\omega_\gamma\omega_\gamma - \omega_i\omega_j] - \sigma_{i\alpha}\sigma_{\alpha j} - P_{ij}
\end{array}\right.$$