Chapitre 4

Grandes déviations et analyse multifractale

Introduction

L'analyse multifractale a son origine dans des travaux récents de physique statistique (turbulence et systèmes dynamiques).

En turbulence, les lois d'echelles pour les fonctions de structures sont de la forme

$$S_p(\ell) =< |u(x+\ell) - u(x)|^p >\sim (\varepsilon\ell)^{p/3}(\frac{\ell}{\ell_I})^{\zeta_p - p/3}.$$

pour des echelles comprises entre les echelles d'injection et de dissipation : $\ell_d << \ell << \ell_I$.

L'ecart à la théorie de Kolmogorov 1941, $\zeta_p - p/3$, semble assez bien défini expérimentalement. Les lois d'echelles pour les fonctions de structures sont multifractales dans la mesure ou l'exposant ζ_p est une fonction convexe de p. Des lois d'echelles ou l'exposant est une fonction affine de p (comme la loi de Kolmogorov 1941 : $\zeta_p = p/3$) sont dites unifractales.

La théorie des grandes déviations représente un raffinement des lois limites en probabilité. Elle permet de donner une évaluation (de meilleure qualité que celle obtenue par le simple théoreme central limite) de la probabilité des fluctuations rares et intenses.

Comme nous le verrons plus bas, il existe un lien entre grandes déviation et multifractalité.

4.1 Théorème des grandes déviations pour des moyennes de variables alléatoires independantes

4.1.1 Un exemple simple...

On commence par donner un exemple simple montrant la porté du théorème : il s'agit de la distribution de la moyenne de N tirages à pile ou face, pile valant 0 et face valant 1.

Soit x la valeur d'un tirage, on a $x = 0$ avec probabilité $1/2$ et $x = 1$ avec probabilité $1/2$. La variable allátoire x a donc pour valeur moyenne $< x >= 1/2$ et pour ecart type $\sigma = \sqrt{< (x - < x >)^2 >} = 1/2$.

Il est facile de montrer que la moyenne partielle $\bar{x}_N$ de N tirages independants de x_i, avec i variant de 1 à N

$$\bar{x}_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i \tag{4.1}$$

admet la distribution limite gaussienne :

$$p_{\text{gauss}}(\bar{x}_N) = \sqrt{\frac{2N}{\pi}} e^{-2N\left(x-\frac{1}{2}\right)^2} \tag{4.2}$$

On verra plus bas dans le cours que le théorème des grandes déviations permet d'obtenir, dans ce cas particulier, l'expression suivante

$$p_{\text{GD}}(\bar{x}_N) = \sqrt{\frac{2N}{\pi}} e^{N\,(-\log(2)-(1-x)\,\log(1-x)-x\,\log(x))} \tag{4.3}$$

(cette expression peut se trouver directement en utilisant la formule de Stirling pour $n!$: $n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$).

Cet exemple simple nous montre que les queux de probabilité sont mieux approximés par les grandes déviations que par la gaussienne.

4.1.2 Rappels et définitions sur les variables alléatoires

Cette section a pour but de fixer les notations et de rappeler quelques propriétés de base des variables alléatoires (v.a).

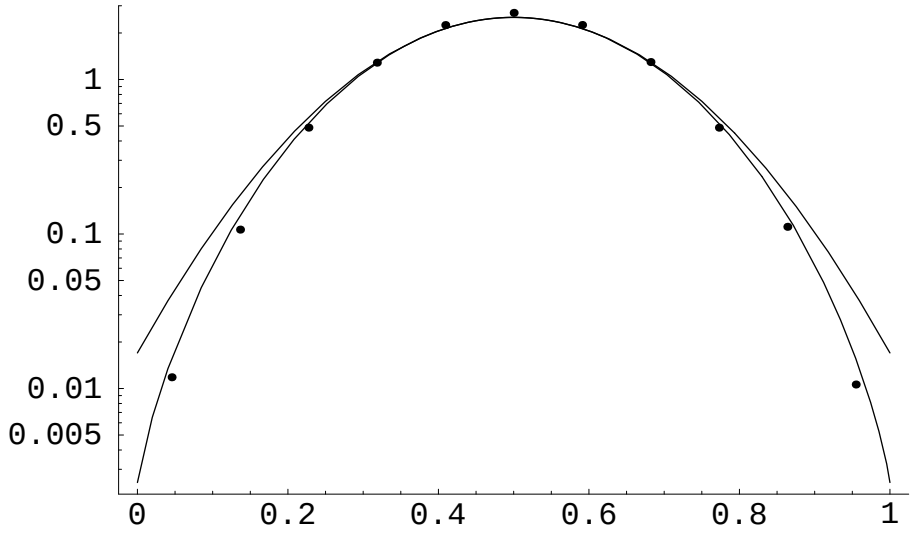

Figure 4.1: Lois $p_{\mathrm{GD}}(\bar{x}_{10})$, $p_{\mathrm{gauss}}(\bar{x}_{10})$ et distribution empirique calculée sur 200000 tirages de la moyenne (voir le notebook mathematica joint : exemple1.nb.)

Soit une variable alléatoire ξ de distribution de probalité (ddp) $p(\xi)$. La signification de $p(\xi)$ est que $p(\xi)d\xi$ est la probabilité de trouver la v.a. dans l'intervalle $[\xi, \xi + d\xi]$. On a donc : $p(\xi) \geq 0$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} p(\xi)d\xi = 1$. La valeur moyenne d'une fonction quelconque f de la v.a. est donnée par l'expression :

$$< f(\xi) >= \int_{-\infty}^{+\infty} p(\xi)f(\xi)d\xi \tag{4.4}$$

En général p est une distribution. Par exemple dans l'exemple précédent du jeux de pile ou face, on a : $p(x) = 1/2(\delta(x) + \delta(x-1))$, où δ est la distribution de Dirac.

Une quantité importante est la fonction caractéristique $z(u)$ (aussi appelée fonction génératrice des moments) définie par :

$$z(u) =< e^{iu\xi} > \tag{4.5}$$

En utilisant la formule générale pour la moyenne, on voit aisément que $z(u)$ est la transformée de fourier de $p(\xi)$:

$$z(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(\xi)e^{iu\xi}d\xi \tag{4.6}$$

L'appellation fonction génératrice des moments correspond à la propriété

$$< \xi^n >= m_n = \frac{1}{i^n}\frac{d^n Z(u)}{du^n}|_{u=0} \tag{4.7}$$

ou encore :

$$z(u) = 1 + \sum_1^\infty m_n \frac{(iu)^n}{n!} \tag{4.8}$$

Notons au passage que les cumulants sont définis comme ayant comme fonction génératrice

$$w(u) = \log(z(u)) \tag{4.9}$$

c'est a dire que :

$$z(u) = \exp(\sum_{1}^{\infty} c_n \frac{(iu)^n}{n!}) \tag{4.10}$$

où c_n est le n-ième cumulant. Une distribution est gaussienne si et seulement si seuls ses deux premiers cumulants sont non nuls. Le notebook mathematica joint, exemple2.nb, permet le calcul des premiers cumulants en fonction des moments, et inversement.

Rappelons que deux v.a. sont dites indépendantes si leurs ddp jointe est le produit de leurs ddp individuelles : ξ_1 et ξ_2 sont indépendantes si et seulement si $p(\xi_1, \xi_2) = p_1(\xi_1)p_2(\xi_2)$. La propriété principale de la fonction génératrice est la suivante.

Théorème :

La fonction génératrice correspondant â la somme de deux v.a. indépendantes est le produit de leurs fonctions génératrices.

Démonstration :

$$z_{\xi_1+\xi_2} =< e^{iu(\xi_1+\xi_2)} >=< e^{iu\xi_1}e^{iu\xi_2} > \tag{4.11}$$

les v.a. étant indépendantes l'intégrale double donnant la moyenne se factorise et

$$< e^{iu\xi_1}e^{iu\xi_2} >=< e^{iu\xi_1} >< e^{iu\xi_2} >= z_{\xi_1}z_{\xi_2} \tag{4.12}$$

Remarquons que la ddp de la somme de deux v.a. indépendantes est le produit de convolution de leurs ddp :

$$p_{\text{somme}}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} d\xi_1 d\xi_2 \delta(\xi_1 + \xi_2 - \xi)p_1(\xi_1)p_2(\xi_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi_1 p_1(\xi_1)p_2(\xi - \xi_1) \tag{4.13}$$

Le théorème précédent n'est que la traduction du fait bien connu que la transformée de fourier d'un produit de convolution est le produit des transformées de fourier.

4.1.3 Distrubution des moyennes partielles sur N tirages indépendants

On veut obtenir une expression pour la ddp de la moyenne partielle $\bar{\xi}_N$ de N tirages indépentants ξ_i. L'expression $\bar{\xi}_N = \frac{1}{N}\sum_1^N \xi_i$ peut aussi s'écrire $\bar{\xi}_N = \frac{1}{N}S_N$ avec $S_N = \sum_1^N \xi_i$.

Grace au théorème précédent, nous savons que la fonction caractéristique associée à S_N est la puissance n-ième de la fonction caractéristique associée à ξ.

Remarquons que si $z(u)$ est la fonction caractéristique associée à la v.a. x alors, pour toute constante α, $z(\alpha u)$ est la fonction caractéristique associée à la v.a. αx. Démonstration :

$$< e^{iu(\alpha x)} >=< e^{i(\alpha u)x} > \tag{4.14}$$

Donc, la fonction caractéristique associée à $\bar{\xi}_N$ est la fonction caractéristique associée à S_N, prise avec un argument u/N :

$$z_{\bar{\xi}_N}(u) = z_\xi^N(u/N) \tag{4.15}$$

Cette expression va nous permettre d'obtenir une expression intégrale explicite pour $p_{\bar{\xi}_N}(\bar{\xi}_N)$, ddp de la v.a. $\bar{\xi}_N$.

Remarquons que la définition de la fonction caractéristique

$$z(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(\xi) e^{iu\xi} d\xi \tag{4.16}$$

s'inverse sous la forme (formule reciproque des intégrales de fourier)

$$p(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} z(u) e^{-iu\xi} du \tag{4.17}$$

En appliquant cette formule à l'expression ci-dessus de $z_{\bar{\xi}_N}(u)$, on obtient :

$$p_{\bar{\xi}_N}(\bar{\xi}_N) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} z_\xi^N(\tilde{u}/N) e^{-i\tilde{u}\bar{\xi}_N} d\tilde{u} \tag{4.18}$$

ou encore

$$p_{\bar{\xi}_N}(\bar{\xi}_N) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\tilde{u}\bar{\xi}_N + N\log(z_\xi(\tilde{u}/N))} d\tilde{u} \tag{4.19}$$

en faisant le changement de variable $u = \tilde{u}/N$, Il vient finalement

$$p_{\bar{\xi}_N}(\bar{\xi}_N) = \frac{N}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{N[\log(z_\xi(u)) - iu\bar{\xi}_N]} du \tag{4.20}$$

4.1.4 Formules assymptotiques

Le but de cette section est d'obtenir une expression assymptotique ($N- > \infty$) pour l'expression intégrale obtenue pour $p_{\bar{\xi}_N}$. Nous utiliserons les outils standards exposés dans le chapitre 6 de l'ouvrage "Advanced mathematical methods for scientists and engineers" de Bender et Orszag (photocopie jointe au cours).

(a) Méthode de Laplace

Soit $I(N)$ l'intégrale de Laplace

$$I(N) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{N[\Phi(u)]} du \tag{4.21}$$

où la fontion $\phi(u)$ verifie $\Phi'(u_c) = 0$. Si la valeur Φ_c au point stationnaire u_c est le maximum global de Φ ($\Phi'' < 0$) alors $I(N)$ admet la représentation assymptotique (c.f. Bender & Orszag) :

$$I(N) = \sqrt{\frac{2\pi}{-N\Phi''(u_c)}} e^{N\Phi_c}[1 + \mathcal{O}(1/N)] \tag{4.22}$$

(b) Méthode du col

Cette méthode (aussi appelée 'steepest descent method' en anglais) permet de calculer, en utilisant la méthode de Laplace, des intégrales complexes. L'idée est de déformer le contours d'intégration pour se ramener à une intégrale de Laplace.

Soit $f(z) = R(x, y) + iI(x, y)$ une fonction analytique de la variable $z = x + iy$. En un point où la dérivée df/dz existe, on a

$$\frac{df}{dz} = \lim_{|h|->0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \tag{4.23}$$

pour h réel on trouve

$$\frac{df}{dz} = \frac{\partial R(x,y)}{\partial x} + i\frac{\partial I(x,y)}{\partial x} \tag{4.24}$$

et pour h imaginaire pur

$$\frac{df}{dz} = -i\frac{\partial R(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial I(x,y)}{\partial y} \tag{4.25}$$

Comme $\frac{df}{dz}$admet une valeur bien définie, les fonctions R et I vérifient les relations de Cauchy-Reimann

$$\frac{\partial R(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial I(x,y)}{\partial y} \tag{4.26}$$

$$\frac{\partial I(x,y)}{\partial x} = -\frac{\partial R(x,y)}{\partial y} \tag{4.27}$$

Ces expressions montrent (entre autre) que les lignes $I(x, y) =$ cte et $R(x, y) =$ cte sont orthogonales. En effet, les relations de Cauchy Reimann impliquent que les vecteurs $\nabla R = (\frac{\partial R(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial R(x,y)}{\partial y})$ et $\nabla I = (\frac{\partial I(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial I(x,y)}{\partial y})$ sont orthogonaux.

L'Idée de base de la méthode du col pour évaluer une intégrale du type

$$I(N) = \int_C e^{N[\Phi(u)]} du \tag{4.28}$$

est de déformer le contour C pour arriver à un contour C' sur lequel $Im(\phi(u)) = \text{cte}$. Si on a pu déformer le contour (sans croiser de pôles et en pouvant refermer le contours à l'infini), l'intégrale pourra être évaluée comme

$$I(N) = \int_{C'} e^{N[\Phi(u)]} du = e^{N[Im(\Phi(u))]} \int_{C'} e^{N[Re(\Phi(u))]} du \tag{4.29}$$

Remarquons que l'intégrale qui reste à évaluer pourra être estimée grace à la méthode de Laplace.

Calcul de $p_{\bar{\xi}_N}$ par la méthode du col (cas particulier)

Nous commençons par faire les calculs sur un cas particulier, pour fixer les idées. Le cas général sera abordé par la suite.

Considérons une suite de tirages à pile ou face, pile valant -1 et face $+1$. On a $p(\xi) = 1/2(\delta(\xi+1) + \delta(\xi-1))$ et $z_\xi(u) = 1/2(e^{iu} + e^{-iu}) = \cos(u)$.

L'intégrale à calculer s'écrit

$$p_{\bar{\xi}_N}(\bar{\xi}_N) = \frac{N}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{N[\log(\cos(u)) - iu\bar{\xi}_N)]} du \tag{4.30}$$

ou encore

$$p_{\bar{\xi}_N}(x) = \frac{N}{2\pi} \int_C e^{N[\log(\cos(u)) - iux)]} du \tag{4.31}$$

où le contour C est l'axe réel.

La fonction en facteur de N dans l'exponentielle $\Phi(u) = \log(\cos(u)) - iux$ est réelle pour u imaginaire pur. De plus, si on évalue $\Phi(u)$ sur l'axe imaginaire on trouve que $g(p) = \Phi(ip)$ a la valeur $g(p) = \log(\cosh(p)) + px$. Cette fonction admet un point col en p_c si $\frac{dg}{dp} = \tanh(p) + x = 0$, soit $p_c = -\text{argth}(x)$. Autours de p_c, la fonction g admet le développement de Taylor

$$(-(x\,\text{argth}(x)) + \log(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}})) + \frac{(1-x^2)\ (p+\text{argth}(x))^2}{2} + \mathcal{O}(p+\text{argth}(x))^3 \tag{4.32}$$

Du point $u = ip_c$ partent 2 courbes sur lequelles $Im(g)$=0 : d'une part l'axe imaginaire et d'autre part une courbe le long de laquelle nous allons effectuer l'intégrale (c.f. programme mathematica col.nb et figure).

Avec $q = Re(u)$ comme variable pour parametrer la courbe, en remarquant que $d^2\Phi/dq^2 = -d^2g/dp^2$, l'expression générale pour l'intégrale de Laplace donne

$$p_{\bar{\xi}_N}(x) = e^{N\left(-(x\,\text{argth}(x)) + \log(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}})\right)} \sqrt{\frac{N}{2\pi\ (1-x^2)}} \tag{4.33}$$

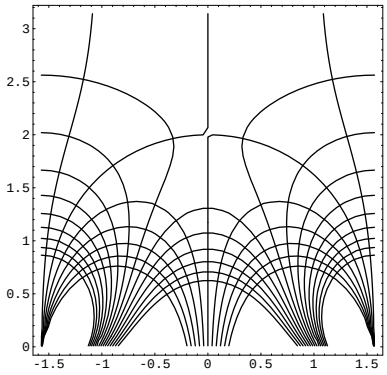

Figure 4.2: Lignes de niveau des fonctions $Re(\Phi(u))$ et $Im(\Phi(u))$ avec $x = -\text{arctanh}(-2)$ remarquer le col en $u = 2i$ (voir texte et le notebook mathematica joint : col.nb.)

Soit finalement, en utilisant $\text{argth}(x) = 1/2\log((1+x)/(1-x))$,

$$p_{\bar{\xi}_N}(x) = e^{N\frac{-x\ \log(\frac{1+x}{1-x})-\log(1-x^2)}{2}}\sqrt{\frac{N}{2\pi\ (1-x^2)}} \tag{4.34}$$

Calcul de $p_{\bar{\xi}_N}$ par la méthode du col (cas général)

Pour une ddp quelconque $p(\xi)$), en posant

$$w(u) = \log(< e^{iu\xi} >) = \log(\int_{-\infty}^{+\infty} p(\xi)e^{iu\xi}d\xi) \tag{4.35}$$

l'intégrale à calculer s'écrit

$$p_{\bar{\xi}_N}(x) = \frac{N}{2\pi}\int_C e^{N[w(u)-iux)]}du \tag{4.36}$$

où le contour C est l'axe réel. On évalue $\Phi(u) = w(u) - iux$ sur l'axe imaginaire. En posant

$$\bar{w}(p) = w(ip) = \log(< e^{-p\xi} >) \tag{4.37}$$

on obtient pour la fonction $g(p) = \Phi(ip)$ l'expression

$$g(p) = \bar{w}(p) + px \tag{4.38}$$

Cette fonction admet un point col en p_c si

$$\frac{dg}{dp}|_{p=p_c} = \frac{d\bar{w}(p)}{dp}|_{p=p_c} + x = 0 \tag{4.39}$$

notons

$$p_c = p_c(x) \tag{4.40}$$

la solution de cette équation. Appelons

$$g_c = g(p_c(x)) \tag{4.41}$$

la fonction de x définie par $\bar{w}(p) + px|_{p=p_c(x)}$ (il s'agit d'une transformation de Legendre, voir plus bas dans le cours).

En considérant x fixé, la fonction $g(p)$ admet autours de $p_c(x)$ le développement de Taylor

$$g(p) = g_c + \frac{d^2\bar{w}(p)}{dp^2}|_{p=p_c}(p-p_c)^2 + \mathcal{O}(p-p_c)^3 \tag{4.42}$$

En faisant le même changement de contours que pour le cas particulier, il vient pour l'intégrale de Laplace l'expression

$$p_{\bar{\xi}_N}(x) = e^{Ng_c}\sqrt{\frac{N}{2\pi\bar{w}''(p_c)}}(1+\mathcal{O}(1/N)) \tag{4.43}$$

Cette expression est le résultat principal de cette partie du cours (Théorème des grandes déviations). Il s'énonce ainsi : "La fonction de Cràmer est la transformée de Legendre du logarithme de la fonction caractéristique (prise sur l'axe imaginaire) $< e^{-p\xi} >$".

Nous avons obtenu également le "terme sous-dominant" $\sqrt{\frac{N}{2\pi\bar{w}''(p_c)}}$ et l'ordre de grandeur du terme suivant dans le developpement $\mathcal{O}(1/N)$.

4.2 Modèle de cascade multiplicative et multifractalité

Soit un intervalle I_{ℓ_Λ} de longueur initiale ℓ_Λ que l'on décompose en 2^N intervalles de longueur

$$\ell = \ell_\Lambda\, 2^{-N}. \tag{4.44}$$

On attribue à chaque intervalle une variable aléatoire u_ℓ, produit de N variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées $(v_i)_{i=1\ldots N}$, vérifiant les hypothèses suivantes

$$v \geq 0, \langle v\rangle = 1, \langle v^r\rangle < \infty, \forall r > 0. \tag{4.45}$$

On a

$$u_\ell = \prod_{i=1}^{N} v_i. \tag{4.46}$$

Les moments associés à la variable u_ℓ ont pour expression

$$S(r) = \langle u_\ell^r \rangle = \langle \prod_{j=1}^{N} v_j^r \rangle = \prod_{j=1}^{N} \langle v_j^r \rangle = [\langle v^r \rangle]^N . \tag{4.47}$$

ou, sous forme logarithmique

$$\log S(r) = N \log \langle v^r \rangle. \tag{4.48}$$

D'après la définition de l'échelle ℓ (4.44),

$$\log S(r) = \zeta_r \log \frac{\ell}{\ell_\Lambda} \tag{4.49}$$

avec

$$\zeta_r = -\log_2 \langle v^r \rangle. \tag{4.50}$$

Ce type de comportement (lois d'échelle avec un exposant dépendant de r) est appelé multifractal. Quand l'exposant est une fonction linéaire de r on parle de comportement 'unifractal'.

Le modèle de cascade multiplicative nous a permis d'obtenir une famille de ddp vérifiant explicitement des lois d'échelle multifractales. Remarquons qu'en prenant le log des variables aléatoires, la multiplication est transformée en addition. Il est donc clair que la ddp limite pourrait être obtenue, dans ce cadre, par la théorie des grandes déviations. Cependant, ayant en vue l'application à un cadre empirique, nous allons redériver les formules asymptotiques, en nous fondant uniquement sur l'existence de lois d'échelles multifractales.

4.2.1 Relations intégrales entre moments et ddp

L'objet principal est la famille des moments d'ordre r (r n'est pas forcément entier) des valeurs absolues des incréments, pris sur une échelle ℓ.

En finance, $v(x)$ est une valeur (taux de change, indice boursier, etc...) et $S(r)$ représente une mesure de la volatilité (par exemple variance pour $r = 2$) des variations de prix sur un temps ℓ. En turbulence $v(x)$ est la vitesse et les $S(r)$ portent le nom de « fonctions de structure ».

Appelons $p_{\rm u}(u)$ la ddp des incréments $u_\ell = |v(x+\ell) - v(x)|$. Le moment d'ordre r s'écrit

$$S(r) = \langle u^r \rangle = \int_0^\infty u^r p_{\rm u}(u) du. \tag{4.51}$$

Dans ce qui suit nous allons effectuer des changements de variable du type $L_u = \log u$. De tels changements de variable introduisent de nouvelles ddp. Nous noterons, par convention, les densités par $p_{\rm u}$ pour la variable u et $p_{\rm L_u}$ pour la variable $L_u = \log u$. On a

$$p_{\rm L_u}(L_u)\, dL_u = p_{\rm u}(u)\, du \tag{4.52}$$

, où $udL_u = du$ et donc $p_{\mathrm{L_u}}(L_u) = p_{\mathrm{u}}(e^{L_u})e^{L_u}$. Pour éviter toute confusion, remarquons que les symboles u mis en index de "p" permettent de distinguer les différentes ddp et ne sont pas des variables, contrairement aux mèmes lettres figurant dans les parenthèses.

La fonction de structure $S(r)$ peut s'exprimer en fonction de $p_{\mathrm{L_u}}(.)$ sous la forme

$$S(r) = \int_0^\infty u^{r-1} p_{L_u}(\log u)\, du \tag{4.53}$$

ce qui est une transformation de Mellin. En utilisant la variable L_u, les moments s'écrivent

$$S(r) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{rL_u} p_{\mathrm{L_u}}(L_u) dL_u. \tag{4.54}$$

Dans ce qui suit, nous écrirons $p_{\mathrm{L_u}}(.)$ sous la forme $p(.)$.

La fonction caractéristique associée a la ddp $p(L_u)$ est

$$Z_{L_u}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikL_u}\, p(L_u) dL_u \tag{4.55}$$

il vient

$$\begin{aligned} S(r) &= Z_{L_u}(-ir) && (4.56)\\ Z_{L_u}(k) &= S(ik). && (4.57) \end{aligned}$$

(ici encore l'indice L_u de "Z" fait partie du nom de la fonction et ne représente pas une variable). En inversant la transformation de Fourier, on obtient

$$p(L_u) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikL_u} Z_{L_u}(k) dk. \tag{4.58}$$

Les moments et les ddp sont donc reliés par (4.54) et (4.58).

4.2.2 Approximation par la méthode du col

Méthode directe

L'idée est d'évaluer les intégrales (4.54) et (4.58) par la méthode du col. La validité asymptotique de ces expressions sera étudiée plus loin.

La méthode de Laplace permet d'évaluer l'intégrale (4.54),

$$S(r) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{rL_u} p(L_u) dL_u \tag{4.59}$$

. Posons

$$L_p(.) = \log p_{L_u}(.) = \log p(.) \tag{4.60}$$

Le moment d'ordre r est défini par

$$S(r) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{rL_u + L_p} dL_u \tag{4.61}$$

où L_p est une notation pour $L_p(L_u)$. Cette intégrale admet un point critique en L_u si r vérifie la relation

$$r = -\frac{dL_p}{dL_u}. \tag{4.62}$$

En faisant un développement de Taylor à l'ordre 2 et en effectuant l'intégrale gaussienne, on obtient

$$S(r) \sim \left[-\frac{2\pi}{\frac{d^2 L_p}{dL_u^2}} \right]^{1/2} e^{rL_u + L_p}. \tag{4.63}$$

En posant $L_S = \log S(r)$, nous avons ainsi une représentation paramétrique (le paramètre est L_u) de la fonction $S(r)$

$$r = -\frac{dL_p}{dL_u} \tag{4.64}$$

$$L_S \sim -\frac{dL_p}{dL_u} L_u + L_p + \frac{1}{2} \log \left[-\frac{2\pi}{\frac{d^2 L_p}{dL_u^2}} \right]. \tag{4.65}$$

Méthode inverse

La relation (4.58) peut s'écrire, en utilisant (4.57):

$$p(L_u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{f(k)}\, dk \tag{4.66}$$

où

$$f(k) = -ikL_u + \log S(ik). \tag{4.67}$$

L'intégrale (4.66) peut s'évaluer par la méthode du col, en déformant le contour, exactement comme nous l'avons déjà fait pour la démonstration du théorème des grandes déviations dans le chapitre correspondant. Au point col de f, on a $f^{'}(k_s) = 0$ (f est définie dans l'Eq. (4.67)). La condition $f^{'}(k_s) = 0$ est equivalente à la relation $L_u = dL_S/dr$. La mème méthode que celle utilisée pour les grands déviations donne pour l'intégrale l'expression

$$p(L_u) \sim (2\pi)^{-1} \left[\frac{2\pi}{\frac{d^2 L_S}{dr^2}} \right]^{1/2} e^{-rL_u + L_S}. \tag{4.68}$$

La représentation paramétrique de la fonction $L_p(L_u)$ (le paramètre est r) s'écrit

$$L_u = \frac{dL_S}{dr} \tag{4.69}$$

$$L_p \sim -r\frac{dL_S}{dr} + L_S - \frac{1}{2} \log \left[2\pi \frac{d^2 L_S}{dr^2} \right]. \tag{4.70}$$

4.2.3 L'asymptotique $\ell \to 0$

Dans cette section, nous montrons que l'hypothèse de lois d'échelle multifractales (du type de celles obtenues dans le cadre du modèle de cascade multiplicative aléatoire de la section xxx) permet de justifier les calculs précédents dans le cadre rigoureux d'un développement asymptotique.

La loi d'échelle multifractale $S(r) = \left[\frac{\ell}{\ell_\Lambda}\right]^{\zeta_r}$ nous suggère fortement d'effectuer dans les intégrales (4.54) et (4.58) les changements de variable suivants

$$\zeta_r = \frac{L_S}{\log(\ell/\ell_\Lambda)} \tag{4.71}$$

$$h = \frac{L_u}{\log(\ell/\ell_\Lambda)} \tag{4.72}$$

$$\mu = \frac{L_p}{\log(\ell/\ell_\Lambda).} \tag{4.73}$$

On obtient donc, à partir de (4.54)

$$S_r(\ell) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\{\log(\ell/\ell_\Lambda)(rh+\mu)\}} dL_u. \tag{4.74}$$

D'un autre coté, (4.57) and (4.58), donnent pour la densité

$$p(L_u) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\{\log(\ell/\ell_\Lambda)(-ikh+\zeta_{(ik)})\}} dk. \tag{4.75}$$

Les intégrales ont donc, comme il se doit, le paramètre asymptotique $-\log(\ell/\ell_\Lambda)$ factorisé dans l'exponentielle. De cette manière, (4.70) produit l'expression asymptotiquement correcte pour la probabilité $L_p(L_u)$

$$L_u = \log(\frac{\ell}{\ell_\Lambda})\frac{d\zeta_r}{dr} \tag{4.76}$$

$$L_p = \log(\frac{\ell}{\ell_\Lambda})(-r\frac{d\zeta_r}{dr} + \zeta_r) - \frac{1}{2}\log(2\pi) - \frac{1}{2}\log\left[\log(\frac{\ell}{\ell_\Lambda})\frac{d^2\zeta_r}{dr^2}\right] + \mathcal{O}\left[\frac{1}{\log(\ell/\ell_\Lambda)}\right]. \tag{4.77}$$

De la mème façon, en utilisant (4.72), (4.73), (4.71), et (4.65) on obtient l'expressions asymptotiquement correcte pour les moments

$$r = -\frac{d\mu}{dh} \tag{4.78}$$

$$L_S = \log(\frac{\ell}{\ell_\Lambda})(rh+\mu) + \frac{1}{2}\log(2\pi) - \frac{1}{2}\log\left[-\frac{1}{\log(\ell/\ell_\Lambda)}\frac{d^2\mu}{dh^2}\right] + \mathcal{O}\left[\frac{1}{\log(\ell/\ell_\Lambda)}\right]. \tag{4.79}$$

En posant

$$\bar{\mu} = -r\frac{d\zeta_r}{dr} + \zeta_r, \tag{4.80}$$

la relation (4.77) peut s'écrire

$$L_p = \bar{\mu}\log(\frac{\ell}{\ell_\Lambda}) - \frac{1}{2}\log(2\pi) - \frac{1}{2}\log\left[\log(\frac{\ell}{\ell_\Lambda})\frac{d^2\zeta_r}{dr^2}\right] + \mathcal{O}\left[\frac{1}{\log(\ell/\ell_\Lambda)}\right].$$

On peut alors définir la relation entre μ (4.73) et $\bar{\mu}$ (4.80) en utilisant (4.73) et (4.77) :

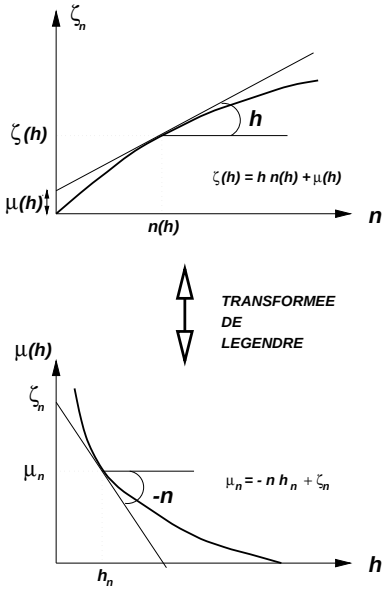

Figure 4.3: La transformation de Legendre du modèle de Parisi-Frisch.

$$\mu = \bar{\mu} - \frac{1}{\log(\frac{\ell}{\ell_\Lambda})}\left\{-\frac{1}{2}\log(2\pi) - \frac{1}{2}\log\left[\log(\frac{\ell}{\ell_\Lambda})\frac{d^2\zeta_r}{dr^2}\right]\right\}. \tag{4.81}$$

En exprimant μ en fonction de $\bar{\mu}$, (4.79) peut s'écrire

$$L_S = (rh + \bar{\mu})\ \log(\frac{\ell}{\ell_\Lambda}) - \frac{1}{2}\log\left[\frac{d^2\zeta_r}{dr^2}\right] - \frac{1}{2}\log\left[-\frac{d^2\bar{\mu}}{dh^2}\right] + \mathcal{O}\left[\frac{1}{\log(\ell/\ell_\Lambda)}\right]. \tag{4.82}$$

Où nous avons utilisé le fait qu'étant donné (4.81) la correction entre μ et $\bar{\mu}$ est d'ordre $\frac{1}{\log(\frac{\ell}{\ell_\Lambda})}$. Donc, à l'ordre requis nous pouvons remplacer $\frac{d^2\mu}{dh^2}$ par $\frac{d^2\bar{\mu}}{dh^2}$ dans (4.79).

Les expressions (4.77) et (4.82) conduisent naturellement au formalisme de Parisi-Frisch [1], qui est la transformation de Legendre reliant ζ_r à $\bar{\mu}(h)$. Cette transformation de Legendre est définie par $\zeta_r = \inf_h [rh + \bar{\mu}(h)]$, ainsi $d\bar{\mu}/dh = -r$ admet une représentation géométrique simple (voir Figure (4.3)). De même, la transformation inverse est définie par $\bar{\mu}(h) = \sup_r(\zeta_r - rh)$ soit $d\zeta_r/dr = h$.

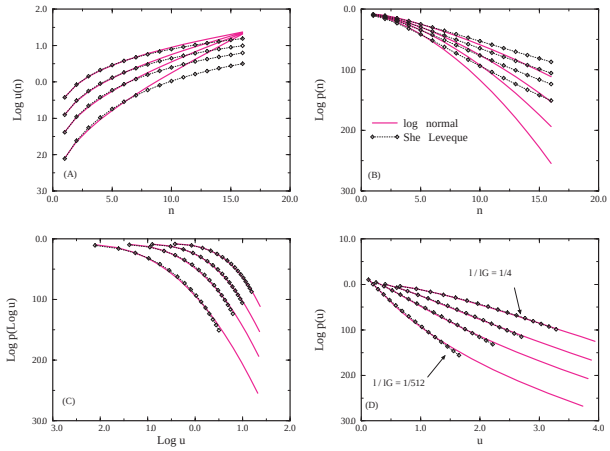

Figure 4.4: Reconstruction de la ddp (voir le texte) pour different modèles (voir table (4.1)) aux echelles $\ell/\ell_\Lambda = 1/4, 1/16, 1/64, 1/512$. Figure (A) : $\log u(n,\ell)$ fonction du parametre r. Figure (B) : $\log p(n,\ell)$ fonction du parametre r. Figure (C) : Représentation classique $\log p(\log u,\ell)$. Figure (D) : Représentation classique $\log p(u,\ell)$.

4.2.4 Expressions multifractales explicites pour les densités

Nous montrons dans cette section qu'il est possible d'utiliser les relations asymptotiques de la section précédente pour reconstruire les densités de probabilité.

Écrivons la fonction de structure sous la forme

$$\log S_r(\ell) = A_r + \zeta_r \log \ell \tag{4.83}$$

$$= \log S_r(\ell_\Lambda) + \zeta_r \log \frac{\ell}{\ell_\Lambda} \tag{4.84}$$

with $A_r = \log S_r(\ell_\Lambda) + \zeta_r \log \ell_\Lambda$.

Supposons qu'a l'échelle de référence ℓ_Λ (qui représente une « grande échelle » voir plus bas) la ddp est gaussienne. En utilisant la relation

$$\int_0^\infty e^{-x^2/(2\sigma^2)}\, x^r\, dx = \frac{\Gamma\left[\dfrac{r+1}{2}\right]}{\left[\dfrac{1}{2}\right]^{r/2} \sqrt{\pi}\, [\sigma^{-2}]^{r/2}} \int_0^\infty e^{-x^2/(2\sigma^2)}\, dx.$$

on obtient

$$\log S_r(\ell_\Lambda) = \log \Gamma\left[\frac{r+1}{2}\right] - \frac{1}{2}\log \pi + r \log u_\Lambda - \frac{r}{2}\log\left[\frac{1}{2}\right]. \tag{4.85}$$

où u_Λ est une variation typique de u à l'échelle ℓ_Λ.

Tableau 4.1: Modèles d'exposants ζ_n

modèles	exposants	parametres
Log-normal	$\zeta_n = n/3 + \eta\,(3n - n^2)/18$	$\eta = 0.2$
She-Lévêque	$\zeta_n = n/9 + 2\,(1 - (2/3)^{n/3})$	pas de parametre

4.2.5 Reconstruction de la ddp

En utilisant la relation asymptotique

$$L_u = \frac{d \log S_r(\ell)}{dr} \tag{4.86}$$

$$L_p \sim -r\frac{d \log S_r(\ell)}{dr} + \log S_r(\ell) - \frac{1}{2}\log\left[2\pi\,\frac{d^2 \log S_r(\ell)}{dr^2}\right] \tag{4.87}$$

et l'expression de $\log S_r(\ell)$, (4.84) et (4.85) avec les exposants donnés dans la table (4.1) on génère les ddp présentés dans la Figure (4.4).

Il est apparent sur la figure que les ddp changent de forme quand ℓ varie.

Bibliographie

[1] G. Parisi and U. Frisch. On the singularity structure of fully developed turbulence. In M. Ghil, R. Benzi, and G. Parisi, editors, *Turbulence and Predictability in Geophysical Fluid Dynamics, Proceedings Intern. School of Physics 'E. Fermi', 1983, Varenna, Italy*, pages 84–87. North Holland, Amsterdam, 1985.