Contents

LES GAZ QUANTIQUES

Yvan Castin
LKB, Ecole normale supérieure (Paris, France)

Un domaine de recherche bien présent à l'ENS :

- au LKB-ENS : équipes "Condensats de Bose-Einstein" (Jean Dalibard, Michèle Leduc, Claude Cohen-Tannoudji, Fabrice Gerbier, Jérôme Beugnon), "Gaz de Fermi ultrafroids" (Christophe Salomon, Y.C., Frédéric Chevy, Félix Werner), "Hélium polarisé et fluides quantiques" (Franck Laloë), "Microcircuits à atomes" (Jakob Reichel, Alice Sinatra, Romain Long, Jérôme Estève) [voir aussi Elisabeth Giacobino, Alberto Bramati, Dominique Delande, Benoît Grémaud au LKB-Jussieu].
- au LPS : Werner Krauth, Roland Combescot, Xavier Leyronas, Yves Pomeau, Sergio Rica, Vincent Hakim, Marc-Étienne Brachet
- au LPA : Christophe Mora, Nicolas Regnault
- au LPT : Guilhem Semerjian

Vue d'ensemble des 4 cours

- **Le condensat de Bose-Einstein : gaz parfait; gaz en interaction dans l'approximation du condensat pur; applications de l'équation de Gross-Pitaevskii**
- **Aspects multimodes : fluctuations quantiques, thermiques et superfluidité en dimension quelconque; cohérence temporelle d'un condensat**
- **Les fermions : gaz parfait; contrôle des interactions par résonance de Feshbach; le régime d'interaction forte du CBE à BCS; les polarons; le gaz unitaire; effet d'Efimov**

1 Considérations de base

1.1 Qu'est-ce qu'un gaz quantique ?

- **Constituants élémentaires : ici atomes**
- **Interactions binaires, potentiel $V(r_{12})$ à courte portée**
- **Gaz : faible densité ρ**

$$\rho b^3 \ll 1$$

avec b la portée de $V(r_{12})$

- **Donc atomes pas collectivement liés, $\neq$ liquide ou solide [1D peut faire exception], mais piégés**
- **Gaz quantique : indiscernabilité des atomes cruciale. Ici**

$$\rho\lambda^3 \gg 1$$

avec $\lambda = h/(2\pi m k_B T)^{1/2}$ longueur d'onde thermique de de Broglie. Régime dégénéré.

1.2 Quelques dates pour la théorie

1925 **Einstein : gaz de Bose parfait, condensation de B.-E.**

1947 **Bogoliubov : gaz de Bose en interaction faible, superfluidité**

1958 **Bardeen, Cooper, Schrieffer : superfluidité du gaz de Fermi avec interactions attractives**

1961 **Gross, Pitaevskii : équation de Schrödinger non linéaire pour la fonction d'onde du condensat**

1963 **Lieb, Liniger : solution exacte du gaz de Bose à 1D**

1971 **Efimov : phénomène d'Efimov (nombre infini de trimères)**

1972 **Popov : gaz de Bose en interaction faible en dimension quelconque (transition BKT à 2D)**

1980- **Leggett, Nozières, Schmitt-Rink : passage continu (*crossover*) de BCS au CBE**

1.3 Quelques dates pour l'expérience

1985- Chu, Phillips, Cohen-Tannoudji, . . . : refroidissement laser; $T \approx \mu\mathrm{K}$, $\rho < 10^{12}\mathrm{at/cm}^3$, $\rho\lambda^3 < 1$

1988 Hess, Doyle, Kleppner, Greytak : refroidissement par évaporation

1995 Cornell, Wieman, Ketterle, Hulet : premiers condensats de Bose-Einstein gazeux (Rb, Na, Li) par augmentation de $\rho \to 10^{13} - 10^{14}$ at/cm^3

1998- Une seconde vague (tsunami) de condensats

2002- Thomas, Salomon, Jin, Grimm, Ketterle, Hulet, . . . : gaz de Fermi en interaction forte

2 Le gaz de Bose parfait

2.1 La distribution de Bose-Einstein

- **États propres à une particule : modes propres de l'onde de matière**

$$\epsilon_\alpha \phi_\alpha(\mathbf{r}) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_{\mathbf{r}} + U(\mathbf{r}) \right] \phi_\alpha(\mathbf{r})$$

- **boîte cubique avec conditions aux limites périodiques ($U \equiv 0$) ou piège harmonique ($U = \sum_{\nu=x,y,z} m\omega_\nu^2 r_\nu^2/2$)**

- **Énergie grand canonique d'une configuration (n_α):**

$$E - \mu N = \sum_\alpha n_\alpha (\epsilon_\alpha - \mu)$$

avec μ potentiel chimique imposé par le réservoir.

- La probabilité d'occupation est factorisée :

$$\text{Proba} = \frac{1}{\Xi} e^{-\beta(E-\mu N)} = \prod_\alpha \frac{1}{\xi_\alpha} e^{-\beta(\epsilon_\alpha - \mu) n_\alpha}$$

avec $\beta = 1/(k_B T)$, T température du réservoir.

- Ceci impose $\mu < \epsilon_0$. Nombre moyen d'occupation :

$$\langle n_\alpha \rangle = \frac{1}{\exp[\beta(\epsilon_\alpha - \mu)] - 1}$$

2.2 Saturation des modes excités

- Nombres d'occupation fonctions croissantes de μ :

$$N' \equiv \sum_{\alpha \neq 0} \langle n_\alpha \rangle < N'_{\text{sup}}(T) \equiv \sum_{\alpha \neq 0} \frac{1}{\exp[\beta(\epsilon_\alpha - \epsilon_0)] - 1}.$$

- Augmentons N à T fixée. Quand N dépasse N'_{sup}, au moins $N - N'_{\text{sup}}$ atomes dans le mode fondamental.

- Pour un grand système, $\langle n_0 \rangle$ prend alors des valeurs "macroscopiques", $\mu \to \epsilon_0$ et $\langle n_0 \rangle \simeq N - N'_{\mathrm{sup}}(T)$.
- Dans un piège harmonique, $k_B T \gg \hbar\omega_\nu$:

$$N'_{\mathrm{sup}} \simeq \zeta(3)\frac{(k_B T)^3}{\hbar^3 \omega_x \omega_y \omega_z} \quad \text{donc} \quad \frac{\langle n_0 \rangle}{N} \simeq 1 - \frac{T^3}{T_c^3}$$

Pour $T \sim 1\mu\mathrm{K}$, $\omega \sim 10^3 \mathrm{rad/s}$, $N'_{\mathrm{sup}} \sim 10^6$. Accessible.

- Dans une boîte à 3D, si $L \gg \lambda$:

$$N'_{\mathrm{sup}} \simeq \zeta(3/2)\frac{L^3}{\lambda^3}$$

$N > N'_{\mathrm{sup}}$ possible à la limite thermodynamique (transition de phase).

- À 2D, si $L \gg \lambda$, $N'_{\mathrm{sup}} \simeq \frac{L^2}{\lambda^2} \ln \frac{L^2}{\lambda^2}$. Saturation "lentement" impossible à la lim. thermo. À 1D, $N'_{\mathrm{sup}} \propto L^2/\lambda^2$.

Densité moyenne dans un piège isotrope

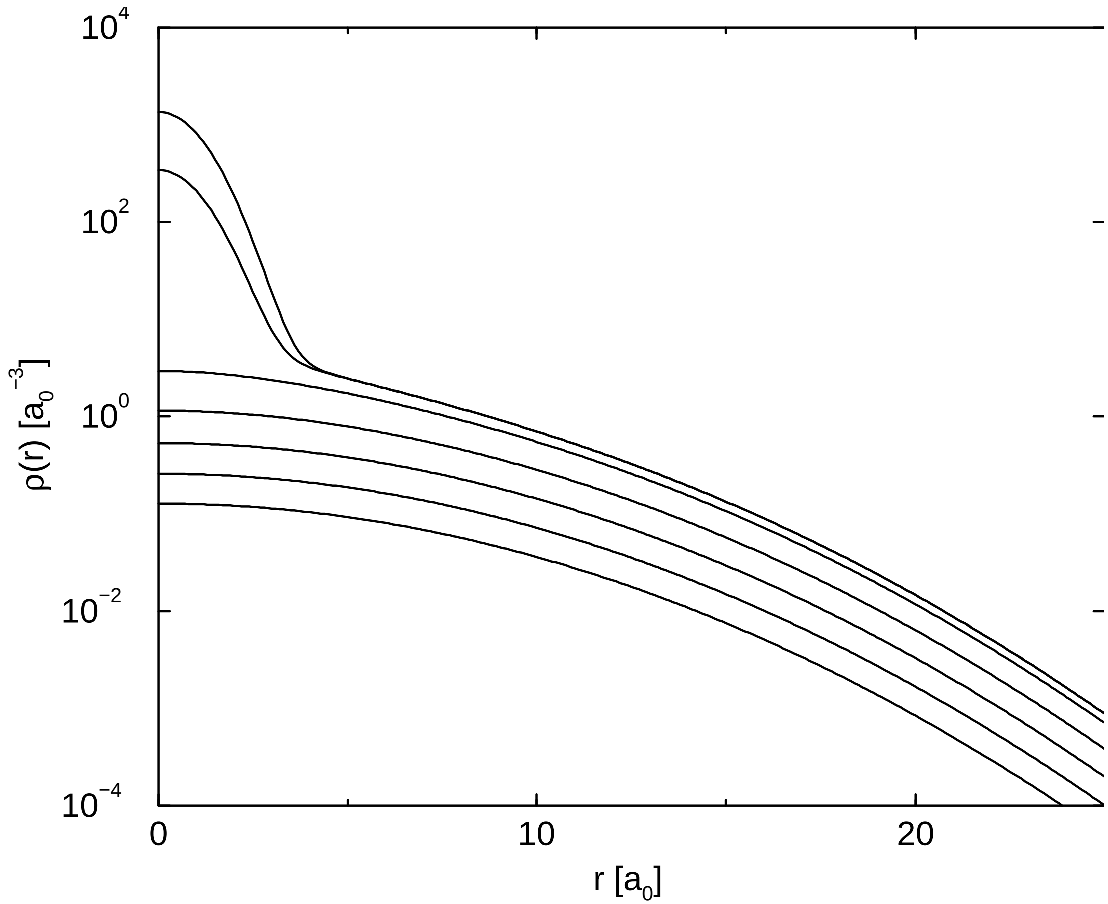


Figure 1: $\boldsymbol{k_B T = 20\hbar\omega}$, $\boldsymbol{N = 500}$ à **32 000** en progression géométrique de raison 2. $\boldsymbol{a_0 = (\hbar/2m\omega)^{1/2}}$ est la taille de l'état fondamental.

- **En seconde quantification, champ quantique bosonique $\hat{\psi}(\mathbf{r})$. $\hat{\psi}$ ($\hat{\psi}^\dagger$) annihile (crée) un boson au point $\mathbf{r}$.**
- **Cf. optique : fonction de cohérence du premier ordre :**

$$g^{(1)}(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \langle \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}')\hat{\psi}(\mathbf{r})\rangle$$

- **Dans une boîte, est la transformée de Fourier de la distribution en impulsion :**

$$g^{(1)}(\mathbf{r},0) = \frac{1}{L^3}\sum_{\mathbf{k}} \langle n_{\mathbf{k}}\rangle e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$$

- **Gaz non dégénéré : longueur de cohérence $\sim \lambda$.**
- **Gaz condensé (lim. therm.) : lg de cohérence $\sim L \to \infty$!**

$$g^{(1)}(\mathbf{r},0) \underset{r\to+\infty}{\longrightarrow} \rho_0$$

avec $\rho_0 = \langle n_0\rangle/L^3$ densité du condensat.

2.4 Des fluctuations grand canonique pathologiques

- **Distribution de probabilité de n_0 :**

$$\mathrm{Proba}(n_0) \propto e^{-n_0/\langle n_0\rangle}.$$

$n_0 = 0$ **est le plus probable, et** $\mathrm{Var}\ n_0 \simeq \langle n_0\rangle^2 \approx N^2$.

- **Ensemble canonique, approx. condensat jamais vide :**

$$n_0 = N - \sum_{\alpha\neq 0} n_\alpha \quad \text{donc} \quad E = N\epsilon_0 + \sum_{\alpha\neq 0} n_\alpha(\epsilon_\alpha - \epsilon_0)$$

- **Un ensemble grand canonique pour les modes excités, condensat = réservoir de potentiel chimique ϵ_0 :**

$$\mathrm{Var}_{\mathrm{can}} n_0 \simeq \sum_{\alpha\neq 0} \langle n_\alpha\rangle(\langle n_\alpha\rangle + 1) \overset{\text{boîte 3D}}{\simeq} 1,67\,\frac{L^4}{\lambda^4} \propto N^{4/3}$$

- **Cas 1D dans un piège harmonique exactement soluble (Olshanii, Herzog). Valide l'approx. : erreur exponentiellement petite en N car** $\mathrm{Proba}_{\mathrm{can}}(n_0 = 0) = e^{-N\beta\hbar\omega}$.

2.5 Bruit de clivage d'un gaz condensé

- **Champ total = champ du condensat + champ non condensé :**

$$\hat{\psi}(\mathrm{r}) = \phi_0(\mathrm{r})\hat{a}_0 + \delta\hat{\psi}(\mathrm{r})$$

où $\hat{a}_0$ annihile un boson du condensat.

- **Densité non moyennée :**

$$\hat{\psi}^\dagger\hat{\psi} = |\phi_0|^2\hat{a}_0^\dagger\hat{a}_0 + \left[\phi_0\delta\hat{\psi}^\dagger\hat{a}_0 + \mathrm{h.c.}\right] + \delta\hat{\psi}^\dagger\delta\hat{\psi}$$

- **Voir le terme de battement dans les fluctuations de densité : compter les particules $N_+(x>0)$ et $N_-(x<0)$. Former le signal $S \equiv \mathrm{Var}\,(N_+ - N_-)$, maximum $\approx N^{4/3}$ pour $T/T_c \simeq 0,63$. Cf. groupe de Jakob Reichel (ENS).**

Bruit de clivage d'un gaz condensé

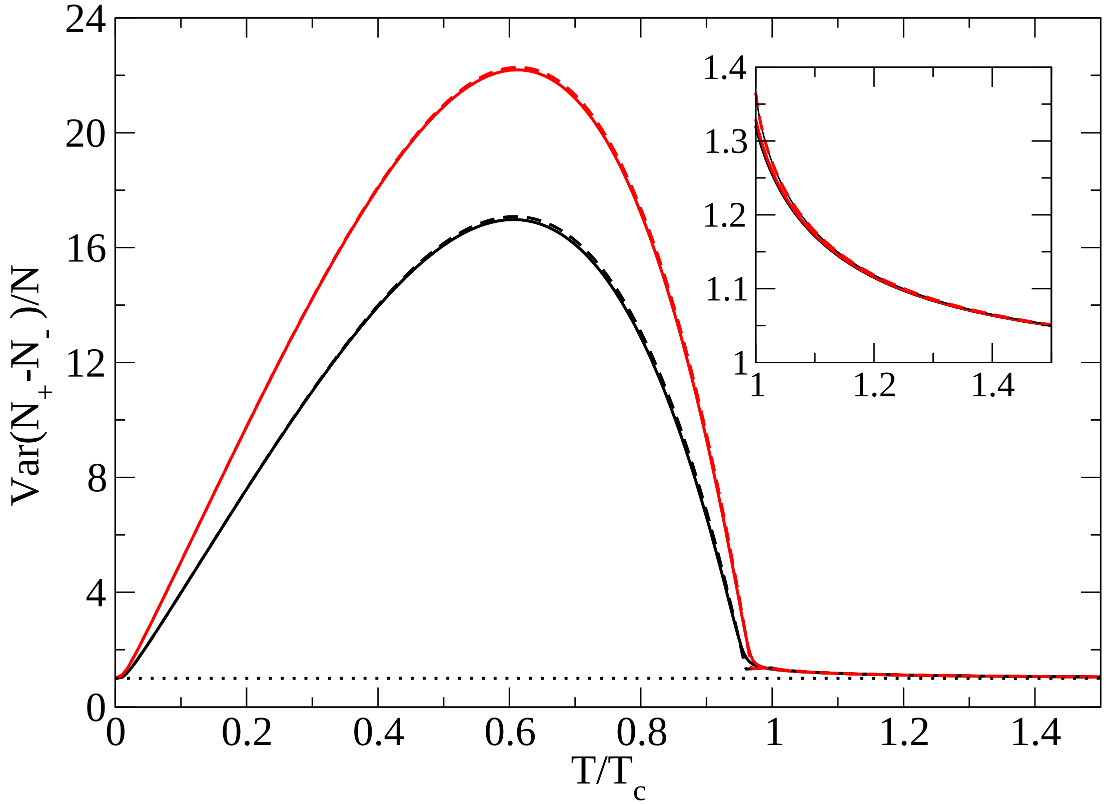


Figure 2: $\boldsymbol{\omega_y = \omega_z = 2\omega_x}$. $\boldsymbol{N = 6000}$ (noir) et $\boldsymbol{N = 13\,000}$ (rouge). A. Sinatra, Y. Castin, Yun Li, "Particle number fluctuations in a cloven trapped Bose gas at finite temperature, Phys. Rev. A **81**, 053623 (2010).

- **Doute : en général, interactions entre atomes avec états liés à deux corps, trois corps, . . . À basse T, le système se liquéfie ou se solidifie, pas de condensat gazeux.**
- **Prérequis : utiliser des pièges immatériels.**
- **Solution I : espèce atomique miraculeuse sans état lié à deux corps. Hydrogène H polarisé de spin. Condensat gazeux par Kleppner et Greytak (1998).**
- **Solution II : à basse densité, la thermalisation du gaz est plus rapide que la liquéfaction-solidification :**
  - **taux de collision (binaire) $\rho\sigma v \propto \rho$**
  - **taux de recombinaison (coll. à trois corps) $\propto \rho^2$**

  Premier condensat gazeux (rubidium 87) par Cornell et Wieman (1995).

Quelques signatures expérimentales de la CBE

- **Mesure de la densité moyenne : à basse température, un pic pousse au centre du piège, à partir de T proche de la valeur de T_c attendue**
- **La fraction d'atomes dans le pic varie approximativement en $1 - T^3/T_c^3$ pour $T < T_c$.**
- **Mesure de $g^{(1)}$: grande longueur de cohérence $\gg \lambda \simeq 0,5\mu\mathrm{m}$ pour $T < 1,01 T_c$.**

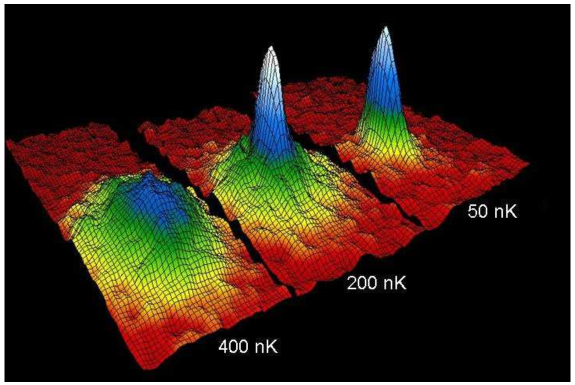


Figure 3: M.H. Anderson, J.R. Ensher, M.R. Matthews, C.E. Wieman, E.A. Cornell, Science **269**, 198 (1995).

Mesure de la longueur de cohérence près de $T = T_c$

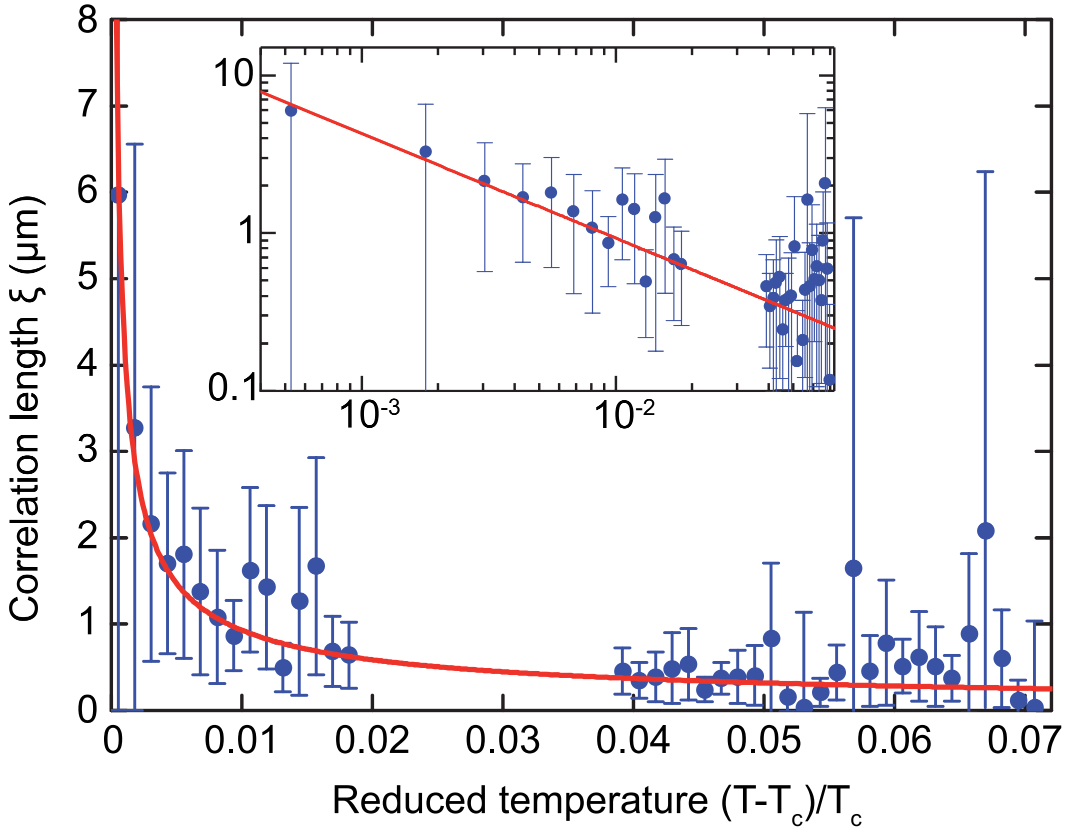


Figure 4: T. Donner, S. Ritter, T. Bourdel, A. Öttl, M. Köhl, T. Esslinger, "Critical Behavior of a Trapped Interacting Bose Gas", Science **315**, 1556 (2007). [$\boldsymbol{\nu_{\text{atomes}} = 0,67 \pm 0,13}$ et $\boldsymbol{\nu_{\text{heliumliquide}} = 0,6709(1)}$ (Lipa et al, 2003)]

Mesure de T_c en fonction de N

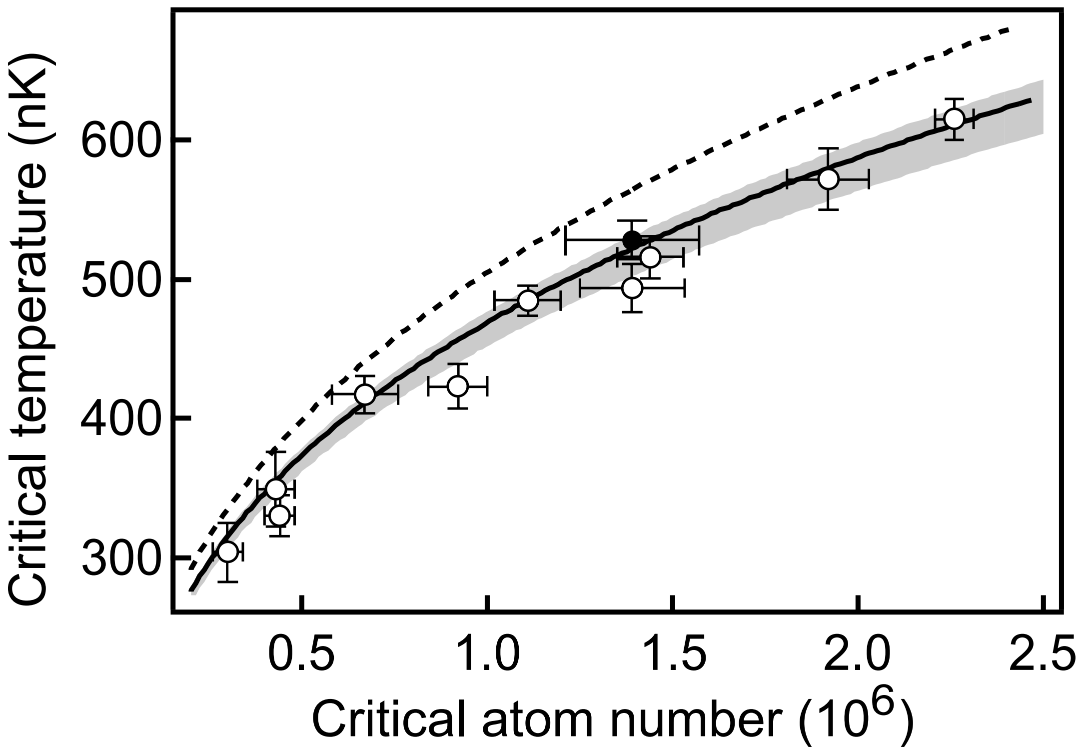


Figure 5: F. Gerbier, J.H. Thywissen, S. Richard, M. Hugbart, P. Bouyer, A. Aspect, "The critical temperature of a trapped, weakly interacting Bose gas", Phys. Rev. Lett. **92**, 030405 (2004). [gaz parfait = ligne tiretée]

Insuffisance du modèle du gaz parfait à $T \ll T_c$

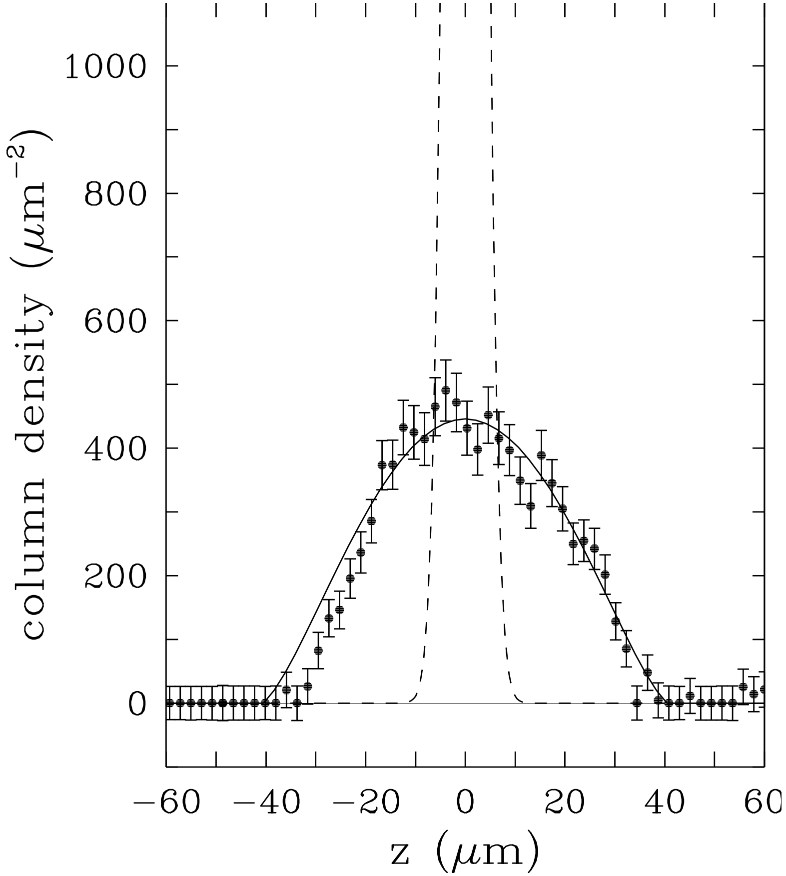


Figure 6: Pour un condensat presque pur, densité intégrée $\int_{\mathbb{R}} \boldsymbol{dy}\, \boldsymbol{\rho(x = 0, y, z)}$ dans un piège très allongé suivant $\boldsymbol{Oz}$. L. Hau, B.D. Busch, C. Liu, Z. Dutton, M.M. Burns, J.A. Golovchenko, Phys. Rev. A **58**, R54 (1998). [gaz parfait = ligne tiretée]

4 Théorie simple du gaz de Bose en interaction faible

4.1 Quel potentiel d'interaction prendre ?

- **Le vrai ?** **Queue de van der Waals attractive $V(r_{12}) \sim -C_6/r_{12}^6$ et cœur violemment répulsif à $r_{12} \lesssim$ nm.**
- **Mais pas retenu pour les alcalins car a des états à deux corps profondément liés. Permet cependant de définir la portée des interactions, typiquement quelques nm :**

$$\frac{\hbar^2}{mb^2} = \frac{C_6}{b^6}.$$

- **Dans un gaz, $\rho b^3 \ll 1$, probabilité faible d'avoir > 2 atomes "à l'intérieur du potentiel". Seule compte l'amplitude de diffusion f_k de 2 atomes. Tout modèle OK si**

$$f_k^{\text{mod}} \simeq f_k^{\text{vrai}} \quad \text{pour} \quad 0 \leq k \lesssim k_{\text{typ}}.$$

Très utile dans un gaz froid où l'on a $k_{\text{typ}} b \ll 1$.

- État stationnaire de diffusion de deux atomes $\mathbf{k}, -\mathbf{k}$:

$$\psi(\mathbf{r}_{12}) \underset{r_{12} \gg b}{\simeq} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_{12}} + f_{\mathbf{k}}(\mathbf{n}) \frac{e^{ikr_{12}}}{r_{12}} \quad \text{où} \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}}$$

- En général, pour $k_{\text{typ}} b \ll 1$, $f_{\mathbf{k}}(\mathbf{n}) \simeq f_k$: diffusion dans l'onde s ($l = 0$) seulement.

- Développement à faible k :

$$-\frac{1}{f_k} = \frac{1}{\mathrm{a}} + ik - \frac{1}{2} k^2 \mathrm{r_e} + \ldots$$

avec a longueur de diffusion, $\mathrm{r_e}$ portée effective.

- En général, ont des signes quelconques et $|\mathrm{a}| \approx |\mathrm{r_e}| \approx b$.

- On suppose désormais que $|\mathrm{r_e}| \approx b$. Seule a importe!

- a contrôlable par champ magnétique : $|a|$ de $3 \cdot 10^{-3}$nm (Inguscio, 2008) à $> 10^3$nm (Hulet, 2009).

- Idée tentante : comme seule a compte, prendre une interaction modèle de portée nulle.
- Omniprésent dans la littérature :

$$V_\delta = g\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2),$$

puis calcul de f_k à l'ordre un en V_δ (approximation de Born). $f_k^{\mathrm{Born}} = -a$ donne

$$g = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m}.$$

- Mais l'ordre deux en V_δ diverge... Le modèle V_δ n'a mathématiquement pas de sens à 3D (ni à 2D) :

$$0 = -\frac{\hbar^2}{m}\Delta_{\mathbf{r}_{12}}\psi(r_{12}) + g\delta(\mathbf{r}_{12})\psi(r_{12}),$$

sachant que $\Delta_{\mathbf{r}} 1/r = -4\pi\delta(\mathbf{r})$.

4.3 Le modèle d'interaction en δ de Kronecker

- Une solution : un δ de Kronecker sur un espace discret (positions discrétisées sur un réseau cubique de pas b) :

$$V_\delta = \frac{g_0}{b^3}\,\delta_{\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2}.$$

- Cf. onde plane $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$: k_ν a un sens modulo $2\pi/b$ donc

$$\mathbf{k} \in \mathcal{D} \equiv \left[-\frac{\pi}{b}, \frac{\pi}{b}\right[^3.$$

- Ajuster g_0 pour avoir la bonne longueur de diffusion :

$$g_0 = \frac{g}{1 - C_3 a/b} \quad \text{avec} \quad C_3 = 2,442\,749\ldots$$

$$g_0 = \frac{g}{1 - C_3 a/b} \quad \text{avec} \quad C_3 = 2,442\,749\ldots$$

- Avoir $g_0 < 0$ est dangereux : pour N bosons au même point, $E_{\text{cin}} \propto N\hbar^2/(mb^2)$, $E_{\text{int}} \propto N(N-1)g_0/b^3$.
- En particulier, pour $a \neq 0$ et $N \geq 3$, $E_0(b) \underset{b\to 0}{\longrightarrow} -\infty$: a ne peut pas être le seul paramètre décrivant l'interaction.
- Choisissons b assez grand pour être dans le régime de Born, si bien que $\mathrm{g}_0 \simeq \mathrm{g}$, et b assez petit pour que la discrétisation de l'espace n'affecte pas les propriétés macroscopiques du gaz :

$$|a| \ll b \ll \lambda, \xi$$

où la longueur de relaxation ξ sera bientôt définie.

4.4 Le cas limite du condensat pur

- Interactions faibles, très basse température $T \ll T_c$.
- Ansatz variationnel : $|\Psi\rangle = |N : \phi\rangle = |\phi\rangle \otimes \ldots \otimes |\phi\rangle$.
- Minimiser l'énergie grand canonique $\langle H - \mu\hat{N}\rangle$:

$$\mu\phi(\mathrm{r}) = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\phi + [U(\mathrm{r}) + g_0 N_0 |\phi(\mathrm{r})|^2]\phi(\mathrm{r}).$$

  Noter le terme de champ moyen proportionnel à la densité du condensat.

- L'Ansatz inclut l'approximation de Born. Voilà pourquoi g_0 apparaît. Bogoliubov fait apparaître l'ordre suivant.

$$g_0 + \sum_{n\geq 2} \text{correction d'ordre } n \text{ en } g_0 \stackrel{?}{=} g.$$

- L'équation de Gross-Pitaevskii (Gross, Pitaevskii, 1961)

$$\mu\phi(\mathbf{r}) = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\phi(\mathbf{r}) + [U(\mathbf{r}) + gN|\phi(\mathbf{r})|^2]\phi(\mathbf{r})$$

dans la limite $N \to +\infty, Na = \text{cte}$ (Castin, Dum, 1996) donne exactement la fonction d'onde du condensat (Lieb, Seiringer, 2002).

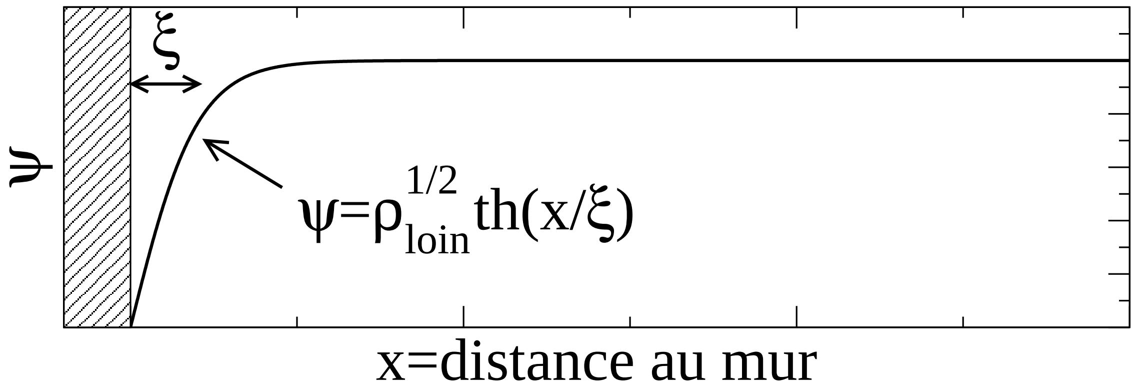
- Il est commode d'introduire le champ du condensat :

$$\psi(\mathbf{r}) \equiv N_0^{1/2}\phi(\mathbf{r}).$$

- Equation d'état du condensat pur (relation constitutive entre différentes grandeurs thermodynamiques dans le cas homogène spatialement) :

$$\mu_{\text{hom}}[\rho] = g\rho \quad \text{ou} \quad \text{pression } P_{\text{hom}}[\rho] = \frac{1}{2}g\rho^2.$$

- **Longueur de relaxation ξ telle que $\mu = \frac{\hbar^2}{m\xi^2}$:**



- **Piège, $N_0 a$ grand : le condensat gonfle, $\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi \ll \mu\psi$:**

$$\mu\phi \simeq [U(\mathbf{r}) + g|\psi(\mathbf{r})|^2]\phi \quad \text{si} \quad \mu \gg \hbar\omega_\nu$$

C'est l'approximation de Thomas-Fermi. Se retrouve par les lois de la physique macroscopiques, uniformité du potentiel chimique $\mu = U(\mathbf{r}) + \mu_{\text{hom}}[\rho(\mathbf{r})]$, loi de Pascal (principe d'Archimède) $\text{grad}\, P = -\rho\, \text{grad}\, U$.

Rappel : Insuffisance du modèle du gaz parfait à $T \ll T_c$

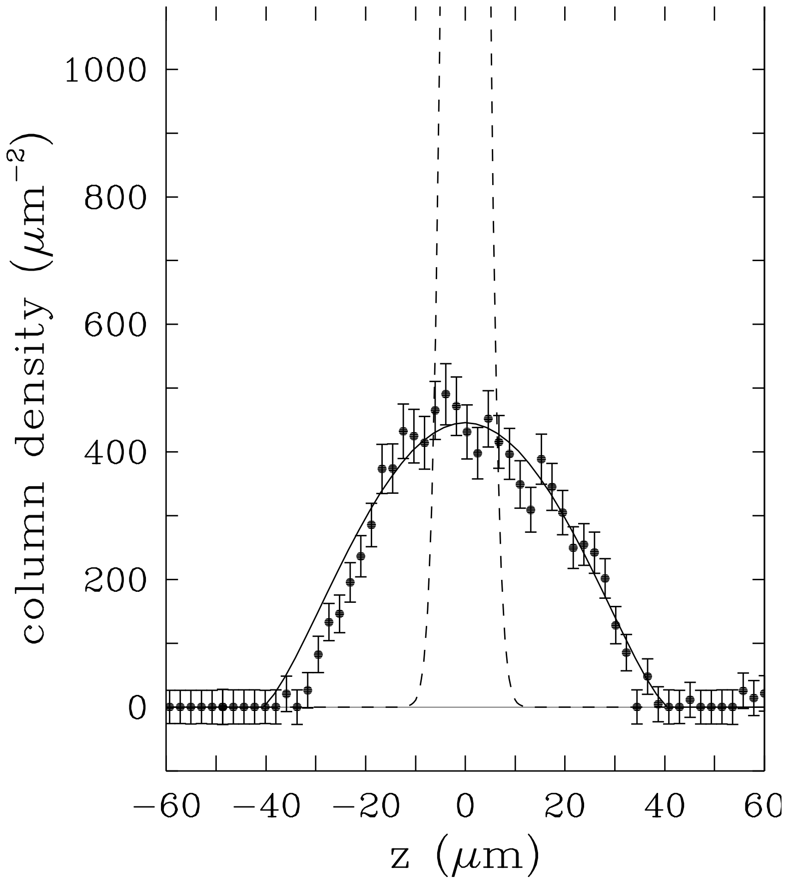


Figure 7: Pour un condensat presque pur, densité intégrée $\int_{\mathbb{R}} \boldsymbol{dy}\, \boldsymbol{\rho(x = 0, y, z)}$ dans un piège très allongé suivant $\boldsymbol{Oz}$. L. Hau, B.D. Busch, C. Liu, Z. Dutton, M.M. Burns, J.A. Golovchenko, Phys. Rev. A **58**, R54 (1998). [gaz parfait = ligne tiretée]

4.6 Gross-Pitaevskii dépendant du temps

- L'équation de Gross-Pitaevskii se généralise au cas dépendant du temps : équation de Schrödinger non linéaire

$$i\hbar\partial_t\psi(\mathrm{r},t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi(\mathrm{r},t)+\left[U(\mathrm{r},t)+g(t)|\psi(\mathrm{r},t)|^2-\mu\right]\psi(\mathrm{r},$$

- Quel est l'équivalent de l'approximation de Thomas-Fermi ?

$$\psi(\mathrm{r},t) = \rho^{1/2}(\mathrm{r},t)e^{iS(\mathrm{r},t)/\hbar}$$

Si l'on pose $\mathrm{v} \equiv \mathrm{grad}\, S/m$, l'équation de G.-P. se récrit

$$\partial_t\rho + \mathrm{div}\,\rho\mathrm{v} = 0$$

$$-\partial_t S = \frac{1}{2}mv^2 + U + g\rho - \mu - \frac{\hbar^2}{2\mathrm{m}}\frac{\Delta\rho^{1/2}}{\rho^{1/2}}$$

- Si ρ varie peu à l'échelle de ξ, on néglige le terme vert. Le gradient de la seconde équation donne alors l'équation hydrodynamique inviscide d'Euler [$\mathrm{rot}\,\mathrm{v} = 0$, $P = g\rho^2/2$].

- Équations de l'hydrodynamique superfluide :

$$\partial_t \rho + \mathrm{div}\, \rho \mathrm{v} = 0$$

$$-\partial_t S = \frac{1}{2} m v^2 + U + g\rho - \mu$$

- Pour un condensat initialement au repos, on peut résoudre exactement ces équations par un ansatz quadratique :

$$\rho(\mathrm{r}, t), S(\mathrm{r}, t) = \text{polynômes de degré deux en } x, y, z$$

- Application 1 : coupure brutale du piège. L'étalement de ρ est un changement d'échelle, agit comme une loupe (Kagan, Surkov, Shlyapnikov, 1996; Castin, Dum, 1996).
- Application 2 : changement faible du piège. Fréquences de modes hydrodynamiques calculables et mesurables très précisément (Stringari, 1996; Ketterle, Cornell, ...).

Etalement d'un condensat (MIT)

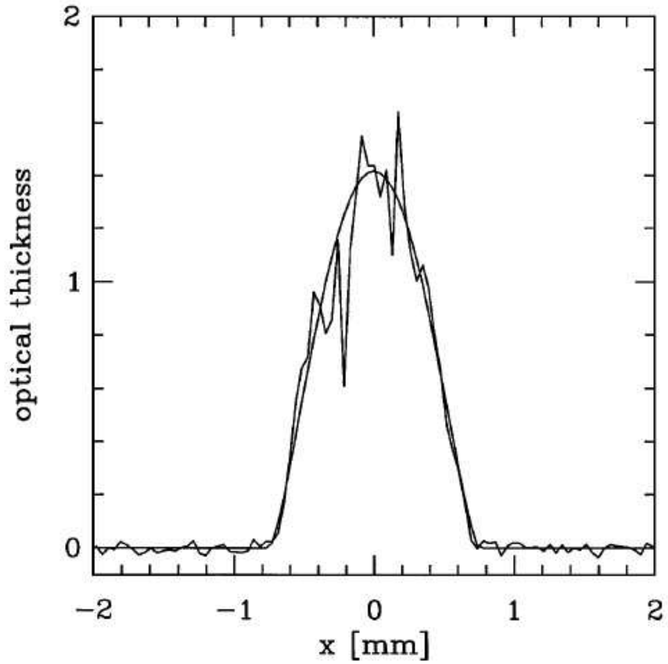
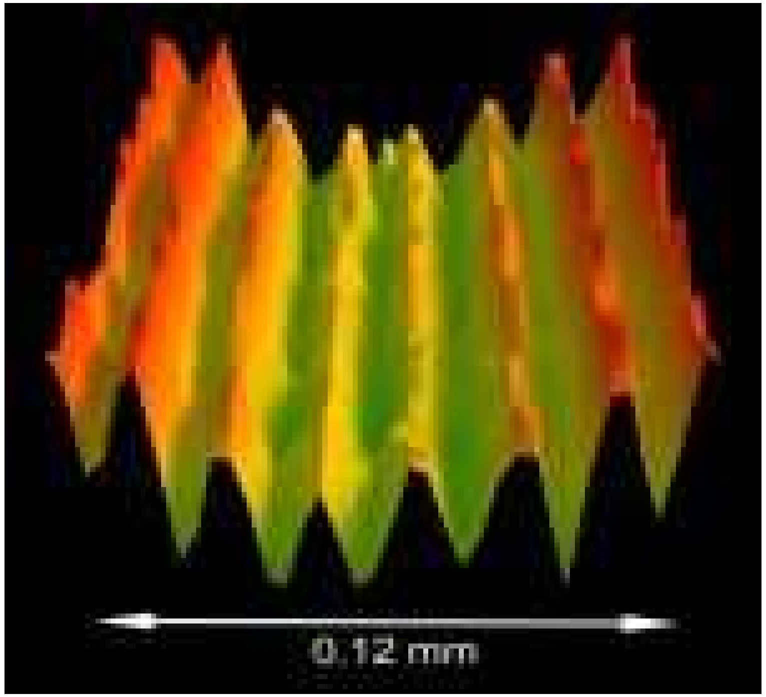


FIG. 1. Spatial density of an expanding condensate integrated along the y axis, cut along the x axis (that is, at $z = 0$). Experimental data obtained at MIT (expansion time of 40 ms) and fit from theory.



$$[S_1 - S_2](\mathrm{r}, t) \simeq C(t) + \frac{m}{2t}[(\mathrm{r} - \mathrm{r}_1)^2 - (\mathrm{r} - \mathrm{r}_2)^2]$$

4.7 Condensat en rotation

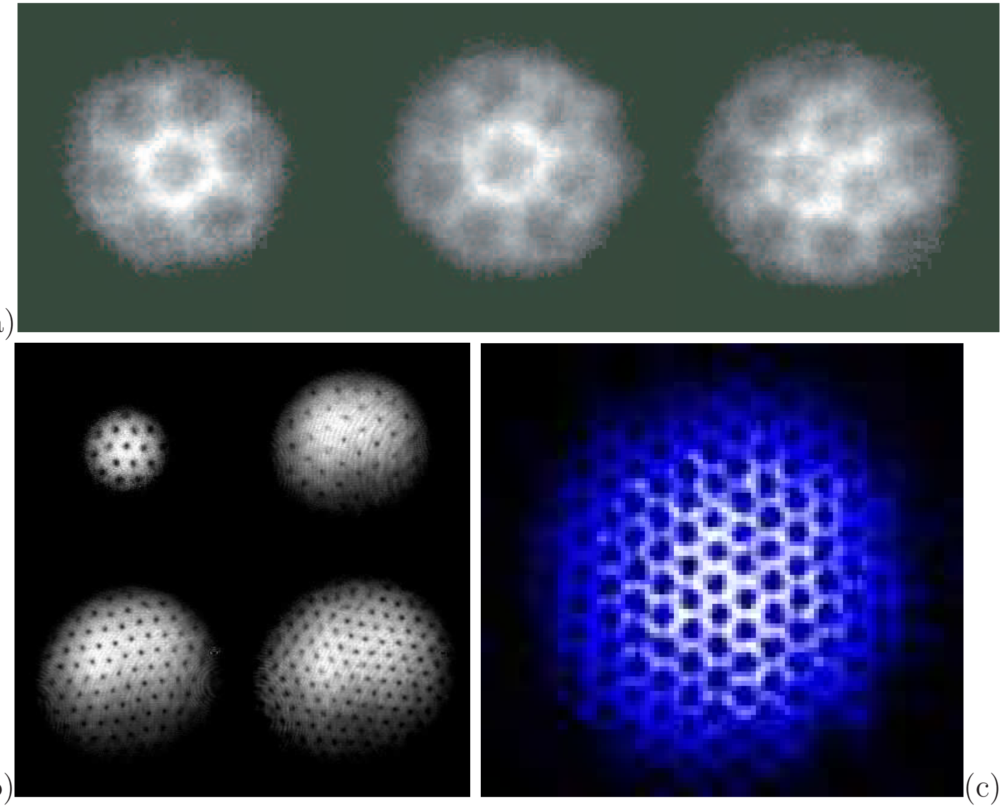
- Faire tourner le piège suivant l'axe propre Oz à la fréquence Ω. Le piège est faiblement anisotrope dans le plan xOy.
- Pourquoi ? Créer des tourbillons quantiques, lignes de densité nulle et de singularité de la phase :

fluide normal : $\mathbf{v}_{\mathrm{eq}}(\mathbf{r}) = \mathbf{\Omega} \wedge \mathbf{r}$ $\qquad$ $\mathbf{rot}\, \mathbf{v} = 2\mathbf{\Omega}$

superfluide : $\mathbf{v}_{\mathrm{eq}}(\mathbf{r}) = \mathbf{grad}\, \frac{S_{\mathrm{eq}}}{m}$ $\qquad$ $\mathbf{rot}\,|_{\mathbf{r} \notin \mathrm{tourb}} \mathbf{v} = 0$

- Rayon du cœur d'un tourbillon $\sim \xi$.
- Réseau triangulaire (Abrikosov) signale la superfluidité.
- Atomes froids bien isolés (contrairement à l'hélium liquide) : mécanisme intrinsèque de formation du réseau ?

Réalisations expérimentales de “réseaux” de tourbillons



(a) (b) (c)

Figure 8: (a) K.W. Madison, F. Chevy, W. Wohlleben, J. Dalibard, “Vortices in a stirred Bose-Einstein condensate”, J. Mod. Opt. **47**, 2715 (2000) : 7, 8 et 10 tourbillons; (b) J.R. Abo-Shaeer, C. Raman, J.M. Vogels, W. Ketterle, “Observation of Vortex Lattices in Bose-Einstein Condensates”, Science **292**, 476 (2001) : 16, 32, 80 et 130 tourbillons. (c) I. Coddington, P. Engels,V. Schweikhard, E. A. Cornell, Phys. Rev. Lett. **91**, 100402 (2003) [oscillations de Tkachenko]

- **Procédure de l'ENS : on part d'un condensat au repos, et on met soudainement en rotation le piège harmonique.**
- **Ansatz quadratique OK pour ρ et S, pas de tourbillons!?**
- **Explication I : rôle crucial de la fraction non condensée. Elle est mise en rotation, le gaz atteint l'équilibre thermique dans le référentiel tournant. Dès que condensat sans tourbillon est thermodyn. défavorable, un ou des tourbillons apparaissent : $0,5\omega_\perp \lesssim \Omega < \omega_\perp$.**
- **Ne marche pas : dans l'expérience, tourbillons si $\Omega \in$ intervalle étroit proche de $0,7\omega_\perp$. Par ex., $]0,68,0,78[$.**
- **Explication II : instabilité hydrodynamique. Résonance avec un mode quadrupolaire du condensat (Sinha, Castin, 2001) : $2\Omega \simeq \sqrt{2}\,\omega_\perp$ [ansatz polynômial pour $\delta\rho, \delta S$].**
- **Confirmé par simulations de G.-P. dépendant du temps (Lobo, Sinatra, Castin, 2004; Parker, Adams, 2005).**

Film d'une simulation 3D montrant la formation d'un réseau de tourbillons

Film disponible à l'adresse

http://www.lkb.ens.fr/~castin/movies.html

C. Lobo, A. Sinatra, Y. Castin, Phys. Rev. Lett. 92, 020403 (2004)

4.8 Théorie de champ moyen à $T > T_c$

- **Théorie variationnelle de Hartree-Fock : opérateur densité à N corps gaussien**

$$\hat{\rho}_{\mathrm{HF}} \propto e^{-\beta H_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{quad}}[\hat{\psi},\hat{\psi}^\dagger]}$$

- **Minimisation du grand potentiel $E - TS - \mu N$: gaz parfait dans le potentiel autocohérent**

$$U_{\mathrm{eff}}(\mathbf{r}) = U(\mathbf{r}) + 2 g_0 \rho(\mathbf{r})$$

- **Pourquoi 2 : effet Hanbury-Brown et Twiss. Densité de proba. de trouver 2 bosons au même point (boîte) :**

$\lvert\Psi\rangle = \lvert\mathbf{k}=0\rangle \otimes \lvert\mathbf{k}=0\rangle$ $\lvert\psi(\mathbf{r},\mathbf{r})\rvert^2 = 1/L^6$	$\lvert\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[\lvert\mathbf{k}_1\rangle \otimes \lvert\mathbf{k}_2\rangle + \lvert\mathbf{k}_2\rangle \otimes \lvert\mathbf{k}_1\rangle]$ $\lvert\psi(\mathbf{r},\mathbf{r})\rvert^2 = 2/L^6$

4.9 Application de Hartree-Fock : changement de T_c dans un piège

- **Approx. densité locale pour le gaz parfait : à $T = T_c$,**

$$\rho(\mathrm{r} = 0)\lambda_c^3 = \zeta(3/2)$$

- **Reste vraie dans le cadre de Hartree-Fock (même T_c^{hom})**
- **$a > 0$: champ moyen répulsif, réduit T_c dans le piège :**

$$\left(\frac{\delta T_c}{T_c}\right)_{\text{piège}} \simeq -3,43\frac{a}{\lambda_c}$$ **(Giorgini, Pitaevskii, Stringari, 1996)**

- **En excellent accord avec les mesures d'Aspect.**
- **Il existe une correction à T_c^{hom} (F. Laloë, M. Holzmann, P. Grüter, G. Baym, J.P. Blaizot, D. Vautherin, 1999)**

Mesure de T_c en fonction de N

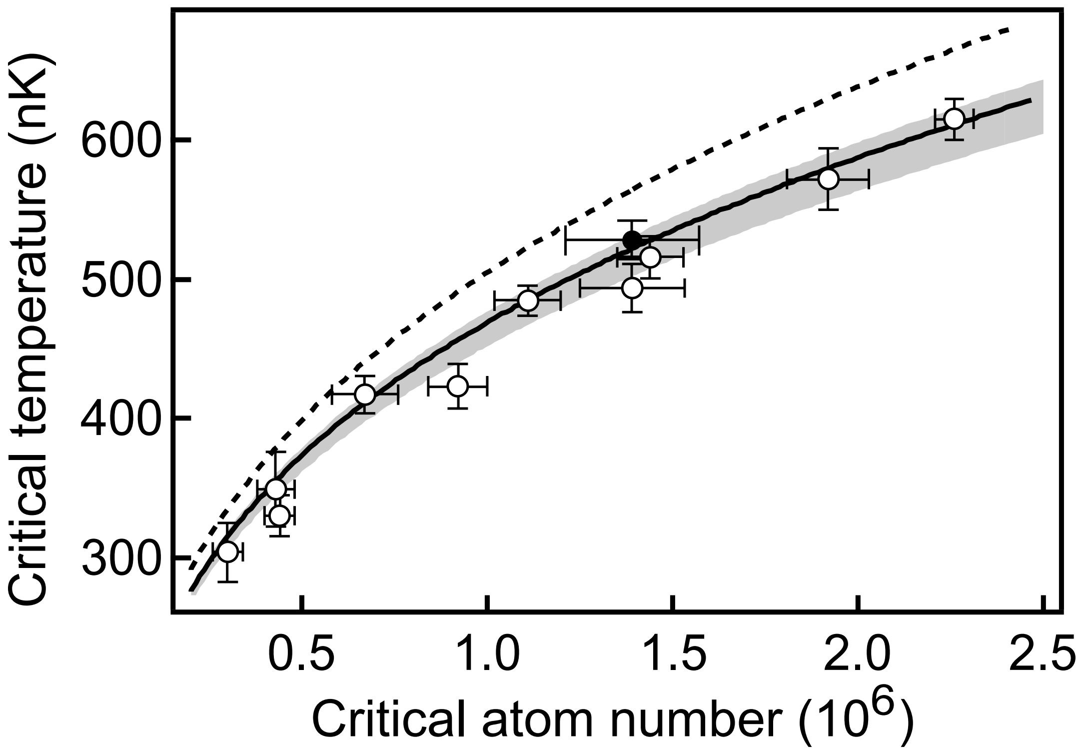


Figure 9: F. Gerbier, J.H. Thywissen, S. Richard, M. Hugbart, P. Bouyer, A. Aspect, "The critical temperature of a trapped, weakly interacting Bose gas", Phys. Rev. Lett. **92**, 030405 (2004). [gaz parfait = ligne tiretée]

5 Théorie avancée du gaz de Bose en interaction faible : Bogoliubov et au-delà

5.1 Motivations

- Effet sur le condensat, sur les fonctions de corrélation, des fluctuations quantiques ? thermiques ?
- Que se passe-t-il en dimension réduite ?
- Différence entre superfluidité et CBE ?
- La théorie historique de Bogoliubov ne suffit pas. Utiliser quelques-unes de ses améliorations successives (ce qui inclut Popov).
- La dernière amélioration en date : Capogrosso-Sansone, Giorgini, Pilati, Pollet, Prokof'ev, Svistunov, Troyer (2010). Chercher à aller jusqu'à $T \lesssim T_c$.

5.2 Théorie historique de Bogoliubov (formulation moderne)

- **Hamiltonien canonique, modèle sur réseau, dimension d :**

$$H = \sum_{\mathbf{r}} b^d \left[\hat{\psi}^\dagger h_0 \hat{\psi} + \frac{g_0}{2} \hat{\psi}^\dagger \hat{\psi}^\dagger \hat{\psi} \hat{\psi} \right]$$

- **Pour simplifier, boîte : $h_0 = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_{\mathbf{r}}$.**
- **Développement du Hamiltonien autour du condensat pur :**

$$\hat{\psi}(\mathbf{r}) = \phi(\mathbf{r}) \hat{a}_0 + \hat{\psi}_\perp(\mathbf{r})$$

avec ici $\phi(\mathbf{r}) = 1/L^{d/2}$.

- **Point crucial : éliminer l'amplitude $\hat{a}_0$ dans le mode du condensat. Approx. du condensat jamais vide :**

$$\hat{n}_0 = \hat{N} - \hat{N}_\perp$$

avec $\hat{n}_0 = \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0$ et $\hat{N}_\perp = \sum_{\mathbf{r}} b^d \hat{\psi}_\perp^\dagger \hat{\psi}_\perp$.

Elimination de la phase du condensat

- **Représentation approchée phase-module :**

$$\hat{a}_0 = e^{i\hat{\theta}}\hat{n}_0^{1/2}$$

avec opérateur phase hermitien, $[\hat{n}_0, \hat{\theta}] = i$.

- **Cf. opérateurs position** $\hat{x}$ **et impulsion** $\hat{p}$ **d'une particule :**

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar \Longrightarrow e^{i\hat{p}a/\hbar}|x\rangle = |x - a\rangle$$

$$[\hat{n}_0, \hat{\theta}] = i \Longrightarrow e^{i\hat{\theta}}|n_0 : \phi\rangle = |n_0 - 1 : \phi\rangle$$

donc $\hat{a}_0$ **a les bons éléments de matrice.**

- **Ça déraille quand le mode du condensat est vide :**

$$e^{i\hat{\theta}}|0 : \phi\rangle \overset{?!}{=} |-1 : \phi\rangle$$

- **Redéfinition du champ non condensé (Castin, Dum; Gardiner, 1996) ; reste bosonique, mais conserve** $\hat{N}$ **:**

$$\Lambda(\mathbf{r}) = e^{-i\hat{\theta}}\hat{\psi}_\perp(\mathbf{r})$$

- **Développement de H au second order en $\hat{\psi}_\perp$:**

$$\boxed{H_{\mathrm{Bog}} = \frac{g_0 N^2}{2L^d} + \sum_{\mathbf{r}} b^d \left[\Lambda^\dagger (h_0 - \mu_0)\Lambda + \mu_0 \left(\frac{1}{2}\Lambda^2 + \frac{1}{2}\Lambda^{\dagger 2} + 2\Lambda^\dagger \Lambda \right) \right]}$$

- **Du grand canonique pour les modes non condensés, avec un potentiel chimique $\mu_0 = g_0 \rho$.**

- **Interaction élastique $C - NC$: Hartree-Fock**

$$C, 0 + NC, \mathrm{k} \longrightarrow C, 0 + NC, \mathrm{k}$$

Ne pas le traiter de manière incohérente (collision) !

- **Interaction inélastique $C - NC$: superfluidité**

$$C, 0 + C, 0 \longrightarrow NC, \mathrm{k} + NC, -\mathrm{k}$$

Pas interdit par la conservation de l'énergie !

Mise du Hamiltonien sous forme normale

- H_{Bog} quadratique donc équations du mvt linéaires :

$$i\hbar\partial_t \begin{pmatrix} \Lambda \\ \Lambda^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_0 + \mu_0 & \mu_0 \\ -\mu_0 & -(h_0 + \mu_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda \\ \Lambda^\dagger \end{pmatrix} \equiv \mathcal{L} \begin{pmatrix} \Lambda \\ \Lambda^\dagger \end{pmatrix}$$

- $\mathcal{L}$ "hermitienne" pour produit scalaire de signature $(1, -1)$.
- Décomposition sur les modes propres d'énergie $\pm\epsilon_k$:

$$\begin{pmatrix} \Lambda \\ \Lambda^\dagger \end{pmatrix} = \sum_{\mathbf{k}\neq 0} \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{L^{d/2}} \begin{pmatrix} U_k \\ V_k \end{pmatrix} \hat{b}_{\mathbf{k}} + \frac{e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{L^{d/2}} \begin{pmatrix} V_k^* \\ U_k^* \end{pmatrix} \hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger$$

avec $|U_k|^2 - |V_k|^2 = 1.$

- Un gaz parfait grand canonique de quasi-particules bosoniques

$$H_{\text{Bog}} = E_0 + \sum_{\mathbf{k}\neq 0} \epsilon_k \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}} \quad \text{avec} \quad \epsilon_k = \left[\frac{\hbar^2 k^2}{2m}\left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} + 2\mu_0\right)\right]^{1/2}$$

Variante grand canonique de Bogoliubov

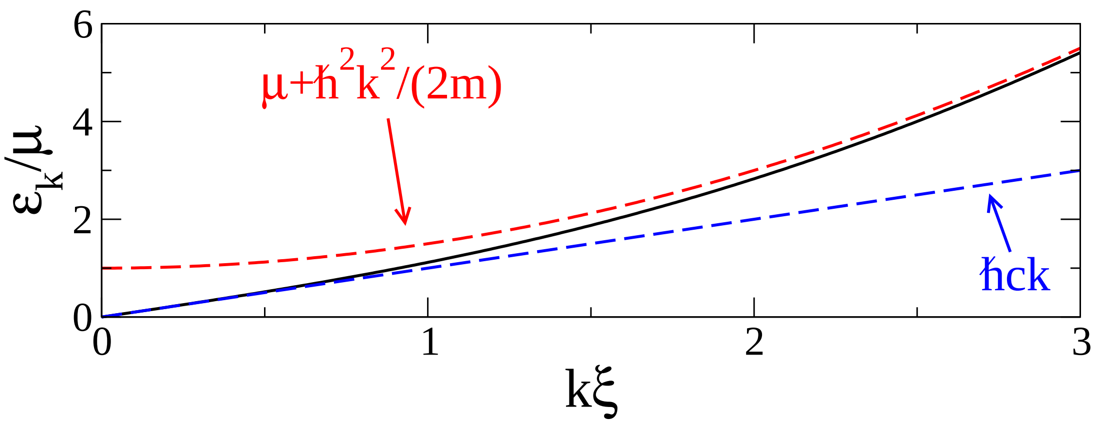
- Le spectre de Bogoliubov dépend de $\mu_0 = g_0\rho$: dépendance non physique en le pas du réseau ?
- Pas de pb à 1D : $V = g\delta(x_1 - x_2)$ donc $g_0 \to g$ si $b \to 0$.
- Pb déjà vu à 3D : $g_0 = g/(1 - C_3 a/b)$ mais Born...
- Pb présent aussi à 2D (Mora, Castin, 2003) :

$$g_0 = \frac{2\pi\hbar^2}{m}\frac{1}{\ln(C_2 b/a)} \quad \text{avec} \quad C_2 = 0,32019\ldots$$

- Longueur de diffusion : cf. état stationnaire de diffusion à énergie nulle en dehors du potentiel, $0 = \Delta_{\mathbf{r}_{12}}\psi(r_{12})$:

$d=3$	$d=2$	$d=1$
$\psi(r_{12}) = 1 - a/r_{12}$	$\psi(r_{12}) = \ln(r_{12}/a)$	$\psi(r_{12}) = 1 - r_{12}/a$

- Le spectre de Bogoliubov grand canonique dépend de μ. Le problème est transféré sur la densité : $\rho_0 = \mu/g_0$.



- Vitesse du son : $mc^2 = \mu$ [$c \approx$ cm/s]
- Superfluidité à la Landau : une particule discernable arrivant à la vitesse $\mathrm{v} = \mathrm{p}/M$ crée une quasi-particule k. Conservation de l'énergie :

$$\frac{p^2}{2M} + E_0 = \frac{(\mathrm{p} - \hbar\mathrm{k})^2}{2M} + E_0 + \epsilon_{\mathrm{k}} \quad \text{donc} \quad \mathrm{v} \cdot \hbar\mathrm{k} = \epsilon_{\mathrm{k}} + \frac{\hbar^2 k^2}{2M}$$

Ceci implique (aussi pour $n > 1$ excitations déposées) :

$$v \geq \left| \mathrm{v} \cdot \frac{\mathrm{k}}{k} \right| \geq \inf_k \frac{\epsilon_k}{\hbar k} = c$$

Vérification expérimentale du critère de Landau

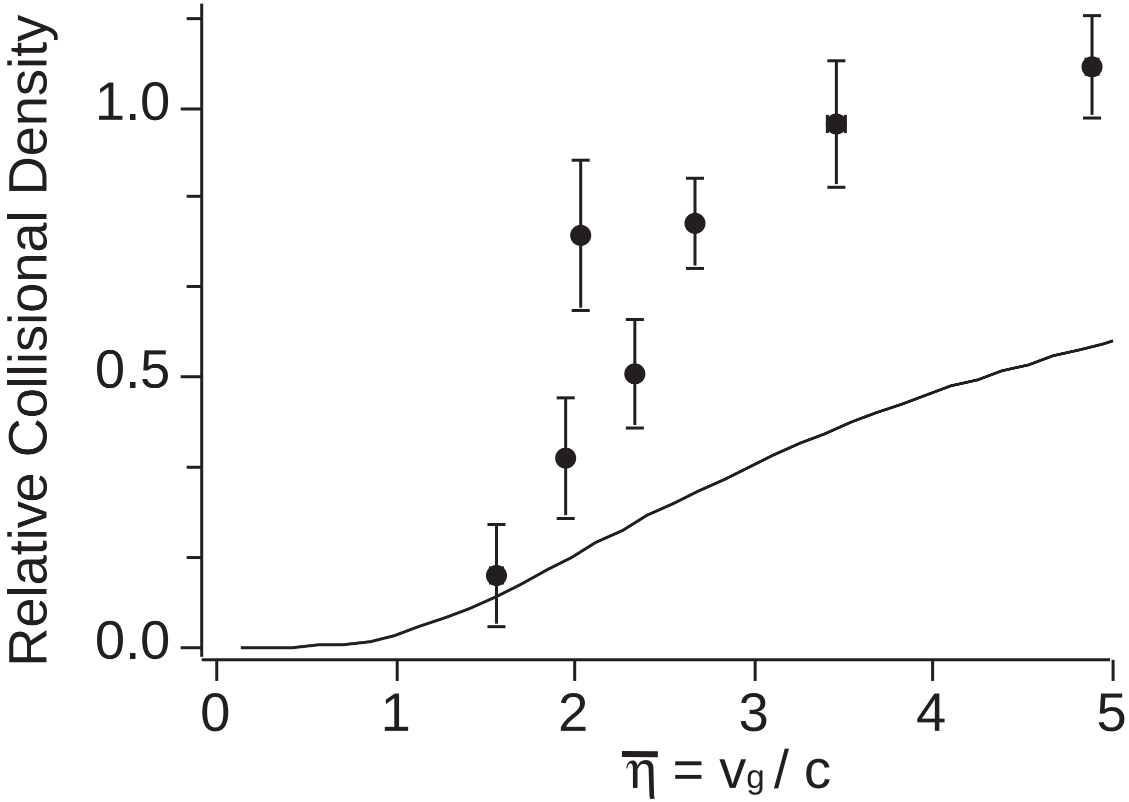


Figure 10: A. P. Chikkatur, A. Görlitz, D. M. Stamper-Kurn, S. Inouye, S. Gupta, W. Ketterle, Phys. Rev. Lett. **85**, 483 (2000).

Récapitulatif de la méthode de Bogoliubov

- **Décomposition de l'opérateur champ**

$$\hat{\psi}(\mathrm{r}) = \phi(\mathrm{r})\hat{a}_0 + \hat{\psi}_\perp$$

- **Représentation phase-module de $\hat{a}_0$:**

$$\hat{a}_0 = e^{i\hat{\theta}}\hat{n}_0^{1/2} \quad \text{avec} \quad [\hat{n}_0, \hat{\theta}] = i$$

qui permet d'éliminer le mode du condensat par $\hat{n}_0 = \hat{N} - \hat{N}_\perp$ et $\hat{\Lambda} = e^{-i\hat{\theta}}\hat{\psi}_\perp$.

- **On développe le Hamiltonien au second ordre en $\hat{\psi}_\perp$.**

- **H_{Bog} est un gaz parfait de quasi-particules. Décomposition sur les modes propres :**

$$\Lambda(\mathrm{r}) = \frac{1}{L^{d/2}} \sum_{\mathrm{k}\neq 0} \left[e^{i\mathrm{k}\cdot\mathrm{r}} U_k \hat{b}_\mathrm{k} + e^{-i\mathrm{k}\cdot\mathrm{r}} V_k \hat{b}_\mathrm{k}^\dagger \right]$$

avec $U_k^2 - V_k^2 = 1$.

Application 1 : Equation d'état de l'état fondamental

$$\rho = \frac{\mu}{g_0} - \int_{[-\frac{\pi}{b},\frac{\pi}{b}]^d} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} V_k (U_k + V_k)$$

- **Pas de divergence infrarouge :** $V_k(U_k + V_k) = O(1)$
- **Limite** $b \ll \xi$ **: divergence ultraviolette si** $d = 2$ **ou** 3, $V_k \sim -\frac{1}{(k\xi)^2}$. **Mais la divergence de** $1/g_0$ **pour** $b \to 0$ **compense celle de l'intégrale. Car** $\exists \lim_{b\to 0}$ **pour** $N = 2$.

$$\mu_{3\mathrm{D}} = g\rho \left(1 + \frac{32}{3\sqrt{\pi}}\sqrt{\rho a^3} + \dots\right) \quad \text{Lee, Huang, Yang, 1957}$$

- $$\boxed{\rho_{2\mathrm{D}} \simeq \frac{m\mu}{4\pi\hbar^2} \ln\left(\frac{4\hbar^2}{e^{2\gamma+1}\mu m a^2}\right) \quad \text{Popov, 1972}}$$

Pas d'invariance d'échelle à 2D (contredit Pitaevskii, Rosch, 1997). Log. difficile à voir expérimentalement.

Tests numériques à 2D et théories au-delà de Popov

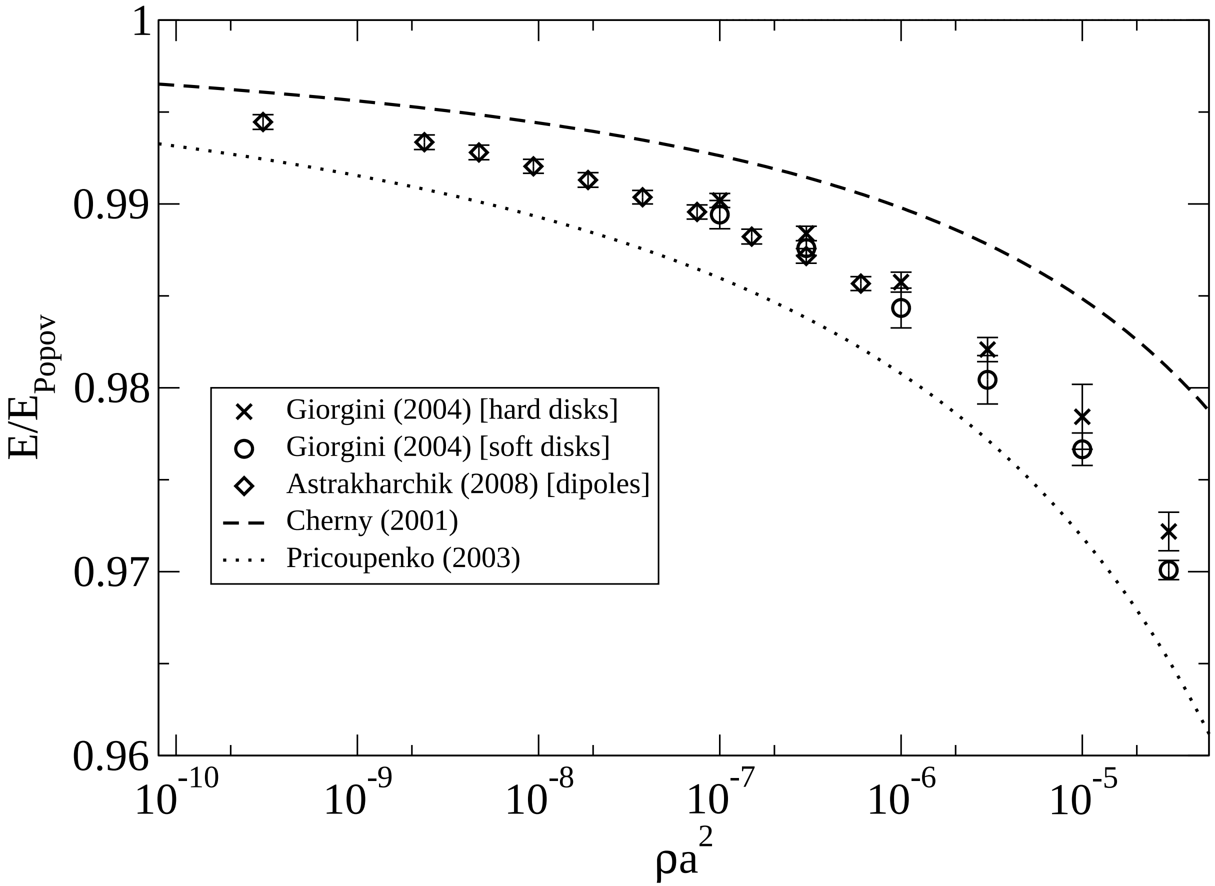


Figure 11: A 2D, Monte-Carlo diffusif de Giorgini (2004), Astrakharchik (2008). Théories de Cherny (2001), Pricoupenko (2003).

Premières corrections à Bogoliubov

- Poursuivre le développement de H en puissances de $\hat{\psi}_\perp$: termes H_3 cubique et H_4 quartique en Λ.
- Traiter H_4 au premier ordre et H_3 au second ordre de la théorie des perturbations. Puis limite $b \ll \xi$.
- A 3D, divergence en $\ln(\xi/b)$ (Wu, 1959). Le résultat pour $b \to 0$ dépend du paramètre à trois corps R_t (Braaten, Hammer, Mehen, 2002).
- A 2D, tout se passe bien (Mora, Castin, 2009)

Tests numériques à 2D et théories au-delà de Popov

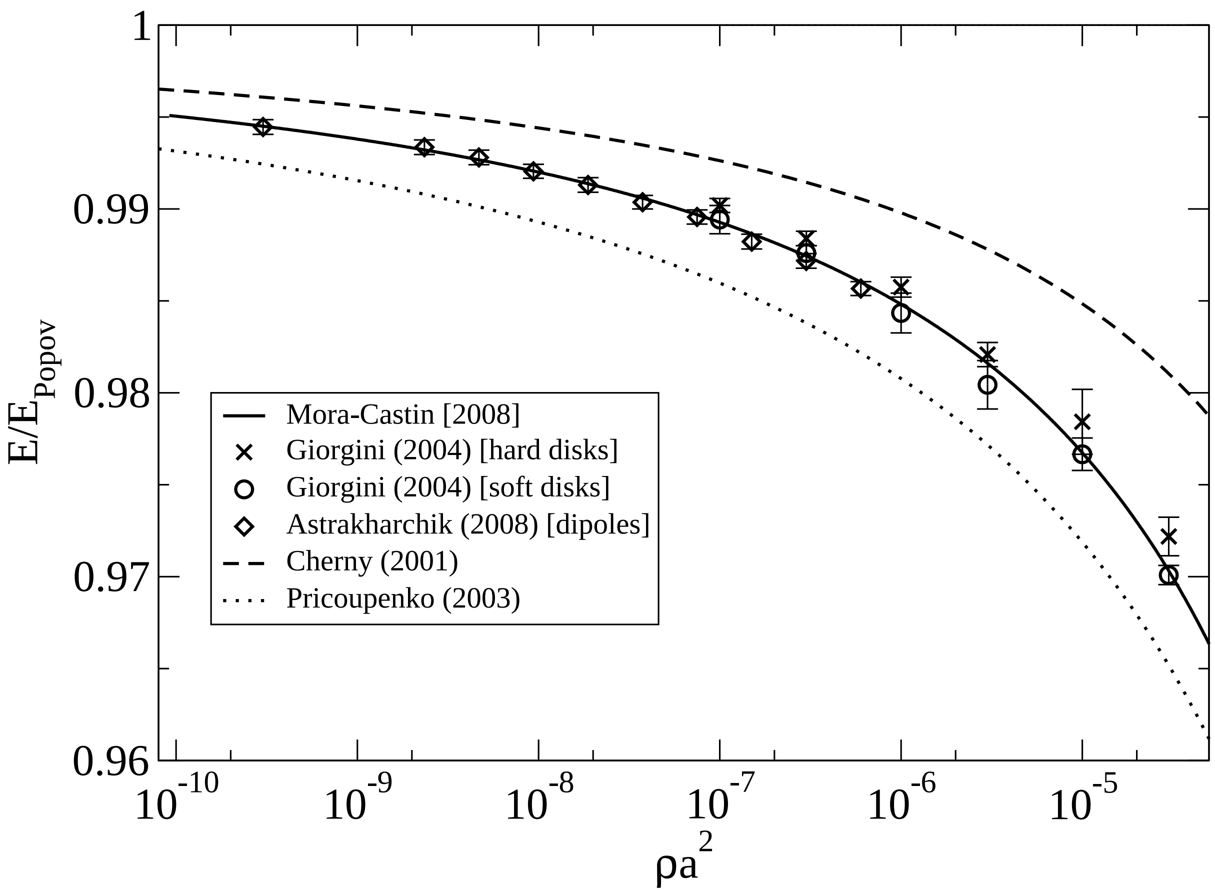


Figure 12: A 2D, Monte-Carlo : Giorgini (2004), Astrakharchik (2008). Théories : Cherny (2001), Pricoupenko (2003), Mora-Castin (2009).

Application 2 : L'énergie cinétique moyenne (1)

- Ailes de la distrib. en impulsion selon Bogoliubov, $\forall T$:

$$\langle a_{\mathrm{k}}^{\dagger} a_{\mathrm{k}} \rangle \underset{k \gg k_{\mathrm{typ}}}{\sim} V_k^2 \underset{k\xi \gg 1}{\sim} \frac{1}{(k\xi)^4}$$

- Dans un gaz froid, une particule a un grand vecteur d'onde k, $k \gg k_{\mathrm{typ}}$, seulement si elle est en train de diffuser sur une autre particule de vecteur d'onde $\approx -\mathrm{k}$.
- La queue de la distribution en impulsion reflète donc celle de l'état stationnaire de diffusion à énergie nulle :

$$L^3 \langle a_{\mathrm{k}}^{\dagger} a_{\mathrm{k}} \rangle \underset{k \gg k_{\mathrm{typ}}}{\sim} C |\tilde{\psi}(\mathrm{k})|^2$$

- Interaction de contact : $\Delta\psi \propto \delta$ donc $\tilde{\psi}(\mathrm{k}) \propto 1/k^2$.
- Queue en $1/k^4$ vue par Jin (2010) avec des fermions.

Application 2 : L'énergie cinétique moyenne (2)

- $d \geq 2$: E_{cin} diverge si $b \to 0$.
- On se ramène à l'énergie d'interaction :

$$E_{\text{cin}} = E - E_{\text{int}}$$

- Espace continu, interaction $V(\mathbf{r}_{12})$ à 3D, relation exacte séparant facteurs faiblement/fortement dépendant du modèle (Zhang, Leggett, 2009; Werner, Castin, 2010) :

$$E_{\text{int}} = \frac{dE}{dg} \times \int_{\mathbb{R}^3} d^3r_{12}\, V(\mathbf{r}_{12}) |\psi(r_{12})|^2$$

- Implication à la limite $b \to 0$ (1D : Olshanii, Dunjko, 2003; 3D : Tan, 2008; vérif. exp. Jin, 2010) :

$$C = \frac{2}{L^3}\frac{dE}{dg}$$

Application 3 : Fraction non condensée à $T = 0$ et $T > 0$

- Densité non condensée à la lim. thermo. et $k_{\mathrm{typ}} b \to 0$:

	$d = 3$	$d = 2$	$d = 1$
$T = 0$	$\frac{\langle \Lambda^\dagger \Lambda \rangle}{\rho} = \frac{(3\pi^2)^{-1}}{\rho \xi^3}$	$\frac{\langle \Lambda^\dagger \Lambda \rangle}{\rho} = \frac{(4\pi)^{-1}}{\rho \xi^2}$	$\frac{\langle \Lambda^\dagger \Lambda \rangle}{\rho} \sim \frac{\ln(L/\xi)}{2\pi \rho \xi}$
$T > 0$	$\frac{\langle \Lambda^\dagger \Lambda \rangle}{\rho} < +\infty$	$\frac{\langle \Lambda^\dagger \Lambda \rangle}{\rho} \underset{L\to\infty}{\sim} \frac{\ln(L/\lambda)}{\rho \lambda^2}$	$\frac{\langle \Lambda^\dagger \Lambda \rangle}{\rho} \underset{L\to\infty}{\sim} \frac{\pi L}{6\rho \lambda^2}$

- Régime d'interaction faible : $\rho \xi^d \gg 1$ avec $\hbar^2 / m \xi^2 \equiv \mu$.

- Dans les cas sans condensat, $g^{(1)}_{\mathrm{Bog}}(\mathbf{r}) \underset{r\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$?!

L'approche de Bogoliubov phase-module

- Ne plus supposer propriété globale de C.B.E. mais propriétés locales : faibles fluctuations de densité, grande longueur de cohérence. Quasi-condensats.
- Méthode de Popov (1972) : intégrale fonctionnelle.
- Mora, Castin (2003) : Bogoliubov phase-module

$$\hat{\psi}(\mathbf{r}) = e^{i\hat{\theta}(\mathbf{r})}\hat{\rho}^{1/2}(\mathbf{r})$$

avec $\hat{\rho}(\mathbf{r}) = \hat{\psi}^{\dagger}(\mathbf{r})\hat{\psi}(\mathbf{r})$ et $[\hat{\rho}(\mathbf{r}), \hat{\theta}(\mathbf{r})] = i/b^d$.

- Développer H autour du quasi-condensat pur de phase uniforme et de densité $\rho_0 = \mu/g_0$:

$$\hat{\rho}^{1/2} = [\rho_0 + \delta\hat{\rho}]^{1/2} = \rho_0^{1/2} + \frac{\delta\hat{\rho}}{2\rho_0^{1/2}} + \ldots$$

- Voir aussi Svistunov, Prokof'ev, Kagan, Shlyapnikov, Stoof, Proukakis,...

Résultats principaux de Bogoliubov phase-module

- Observables locales (équation d'état, fluctuations de densité,...) : identiques à Bogoliubov.
- Observables non locales (fonction de cohérence du premier ordre, distribution en impulsion) : problème résolu

$$g^{(1)}(\mathbf{r}) = \rho \exp\left[\frac{g^{(1)}_{\mathrm{Bog}}(\mathbf{r})}{\rho} - 1\right]$$

- Etude asymptotique pour $r \to +\infty$:

	$d=1$	$d=2$
$T=0$	$g^{(1)}(\mathbf{r}) \sim \rho \left(\frac{e^{2-\gamma}\xi}{4r}\right)^{\frac{1}{2\pi\rho\xi}}$	$g^{(1)}(\mathbf{r}) \longrightarrow \rho_{\mathrm{cond}}$
$T>0$	$g^{(1)}(\mathbf{r}) \sim \rho\, K_{1d}(T) e^{-\frac{\pi r}{\rho\lambda^2}}$	$g^{(1)}(\mathbf{r}) \sim \rho\, K_{2d}(T) \left(\frac{\lambda}{r}\right)^{\frac{1}{\rho\lambda^2}}$

Conditions de validité

- Opérateur phase sur un site du réseau : $\rho b^d \gg 1$ et Proba(site vide) négligeable.
- Nature discrète du réseau pas importante : $\lambda, \xi \gg b$.
- Donc régime dégénéré en interaction faible :

$$\rho \xi^d \gg 1 \quad \text{et} \quad \rho \lambda^d \gg 1$$

- Fluctuation relative de densité faible sur un site :

$$\frac{\langle \delta \hat{\rho}^2 \rangle}{\rho^2} = \frac{1}{\rho b^d} + \frac{\langle \psi^\dagger \psi^\dagger \psi \psi \rangle - \rho^2}{\rho^2} = \frac{1}{\rho b^d} + g^{(2)}(0) - 1$$

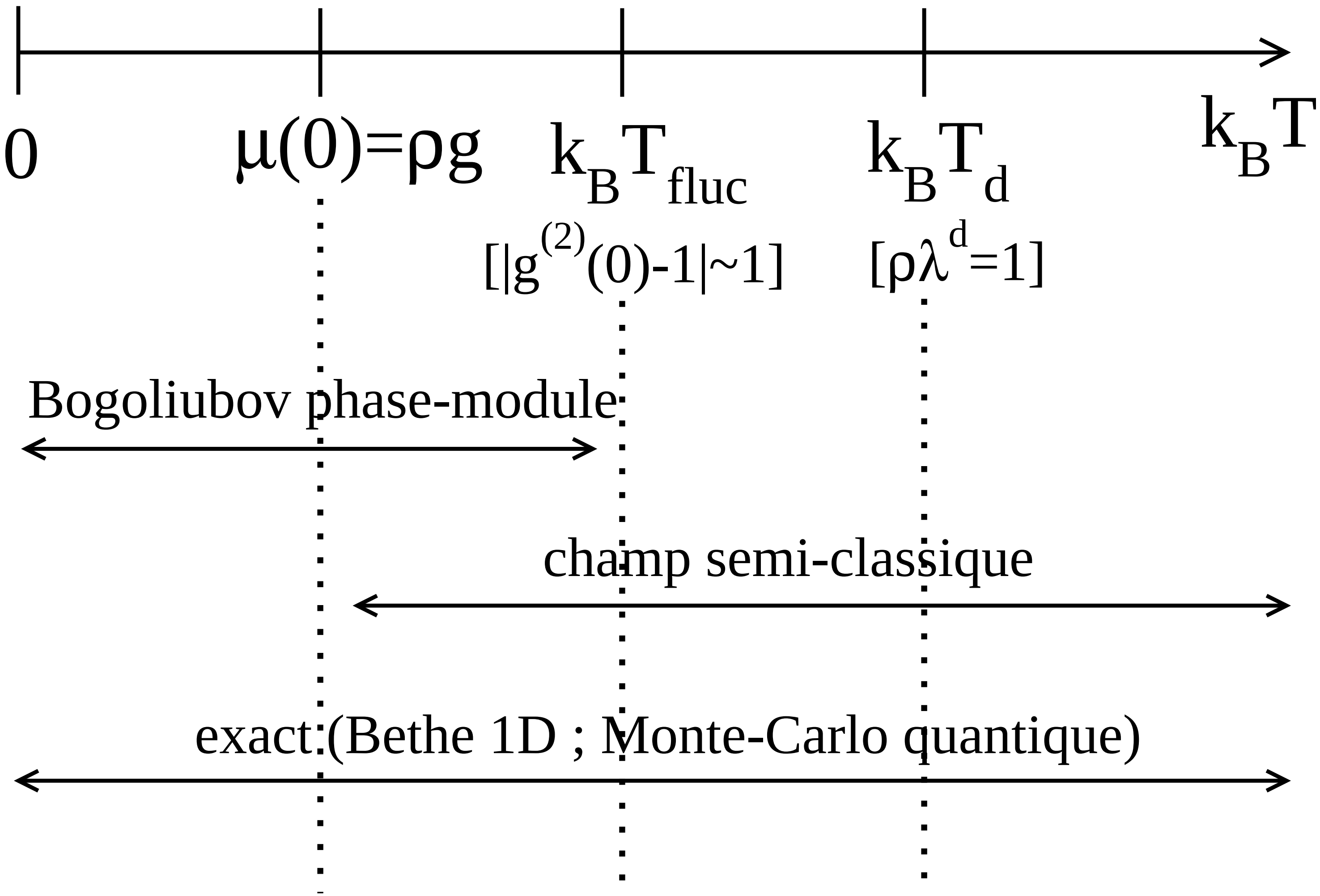
donc imposer $\left| g^{(2)}(0) - 1 \right| \ll 1$.

Estimation de $|g^{(2)}(0)-1|$

	quantique	thermique, $k_BT<\mu$	thermique, $k_BT>\mu$
$d=1$	$\frac{1}{\rho\xi}$	$\frac{(k_BT/\mu)^2}{\rho\xi}$	$\frac{(k_BT/\mu)^{1/2}}{\rho\lambda}$
$d=2$	$\frac{\ln(\xi/b)}{\rho\xi^2}$	$\frac{(k_BT/\mu)^3}{\rho\xi^2}$	$\frac{\ln(k_BT/\mu)}{\rho\lambda^2}$
$d=3$	$\frac{1}{\rho\xi^2 b}$	$\frac{(k_BT/\mu)^4}{\rho\xi^3}$	$\frac{1}{\rho\lambda^3}$

A 1D et 2D, dans la limite d'interactions faibles $\mu\to 0$, $\exists$ un régime fortement fluctuant et fortement dégénéré.

À densité fixée ρ : $\mu(0)$ est le potentiel chimique à $T = 0$.



Champ classique, champ semi-classique

- Opérateur densité $\hat{\rho} = e^{-\beta \hat{H}}$ résulte d'une évolution en temps imaginaire pendant une durée β, $\frac{d}{d\tau}\hat{\rho} = -\frac{1}{2}\{\hat{H}, \hat{\rho}\}$ avec $\hat{\rho}(0) = 1$. Haute température = évolution brève.
- Distribution P de Glauber sur les états cohérents :

$$\hat{\rho} = \int \mathcal{D}\psi \, P[\psi] \, |\mathrm{coh} \; : \psi\rangle\langle \mathrm{coh} \; : \psi|$$

- Equation de Fokker-Planck pour l'évolution de P en τ :

$$\partial_\tau P[\psi] = -\mathrm{E}[\psi]\mathrm{P}[\psi] - \sum_{\mathbf{r}} \partial_{\psi(\mathbf{r})}(F[\psi]P[\psi] + \mathrm{c.c.})$$

$$+ \text{ terme de “diffusion” non positif}$$

- Champ classique : seulement terme rouge, $P[\psi] = e^{-\beta E[\psi]}$
- Champ semi-classique : aussi terme noir. $\partial_\tau \psi = F[\psi]$ (G.-P. en temps imaginaire). Exact pour le gaz parfait.

Gaz 2D : transition BKT

- Il existe une transition de phase marquée par une discontinuité de la fraction superfluide ρ_S/ρ à $T = T_c$ (Berezinskii, 1972; Kosterlitz et Thouless, 1973)
- Transition due à prolifération de tourbillons thermiques $+/-$ à $T > T_c$ (seulement paires $+/-$ isolées à $T < T_c$)
- Saut "universel" de ρ_S à $T = T_c$: $\rho_S(T = T_c^-)\lambda_c^2 = 4$
- Estimation de T_c par Popov (1972). Fraction normale :

$$\frac{\rho_n}{\rho} = \frac{\langle \hat{P}_x^2 \rangle}{N m k_B T} \quad \text{avec} \quad \hat{P}_x \underset{\text{Bogoliubov}}{\overset{\text{théorie de}}{\simeq}} \sum_{\mathbf{k}} \hbar k_x \hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}}$$

$$\boxed{k_B T_c = \frac{k_B T_d}{\ln[C k_B T_c/\mu(0)]}} \quad \text{avec} \quad k_B T_d = 2\pi\hbar^2 \rho/m$$

- $C_{\text{Bog}} \simeq 43/(2\pi)$. Champ semi-classique : $C = 380(3)/(2\pi)$ (Prokof'ev, Ruebenacker, Svistunov, 2001).

Les tourbillons thermiques à 2D

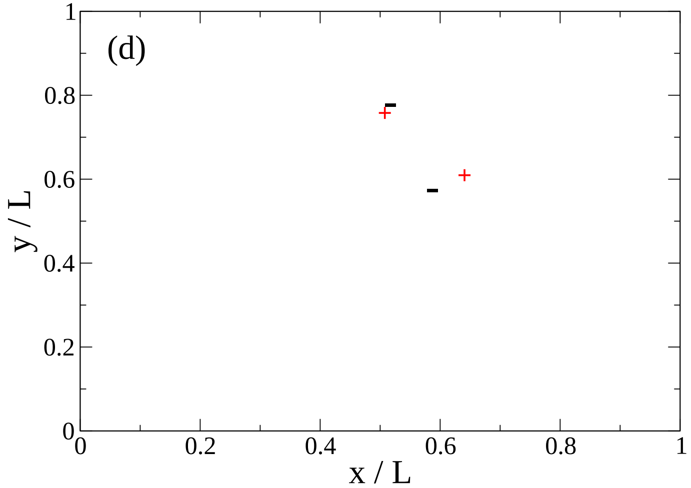
- Différents de ceux d'un condensat tournant. Sont dans un champ classique $\psi(\mathbf{r})$ fluctuant d'une réalisation à l'autre. Pas dans fonction d'onde du condensat $\phi(\mathbf{r})$ définie par une moyenne [état propre de la matrice $g^{(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$.]
- Expériences : BKT vu sur $\rho(\mathbf{r})$, $g^{(1)}$ (Hadzibabic, Krüger, Cheneau, Battelier, Dalibard, 2006); tourbillon therm. non écranté. Voir aussi Cladé, Helmerson, Phillips (2008).
- Densité moyenne de tourbillons, gaz parfait grand canonique (Halperin, 1981; Berry, Dennis, 2000) :

$$\rho_+(T) = \rho_-(T) \underset{T \ll T_d}{\sim} \frac{\pi^2}{12}\, \rho \left(\frac{T}{T_d}\right)^2$$

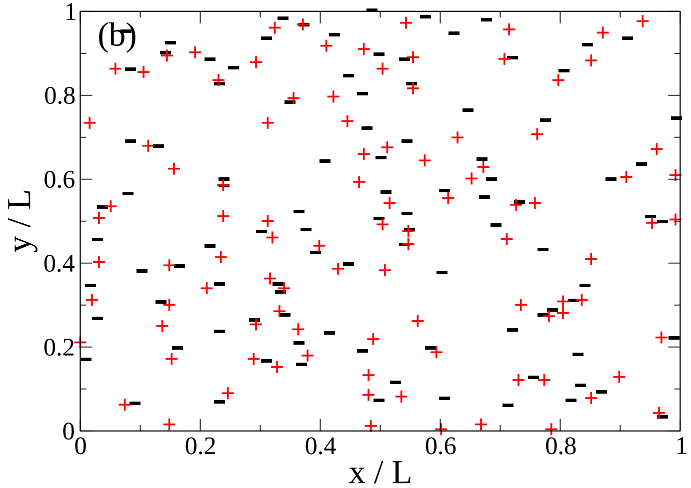
- Simulations semi-classiques, ensemble canonique, interactions : à basse température, décroissance de $\rho_\pm(T)$ beaucoup plus rapide, même pour le gaz parfait.

Simulations semi-classiques à 2D (1)

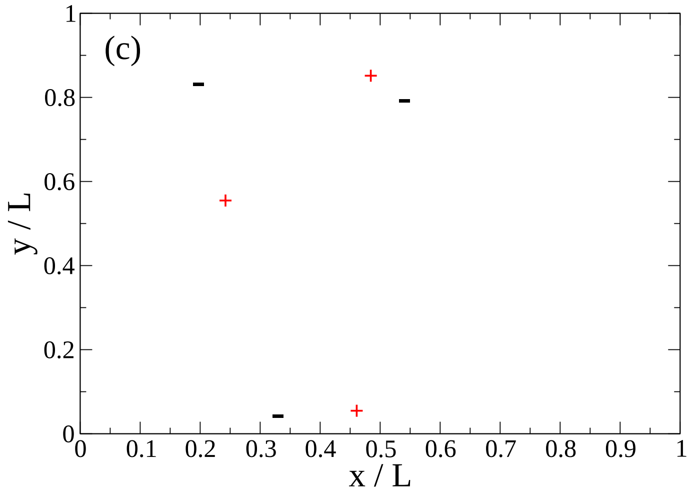
interaction, basse T



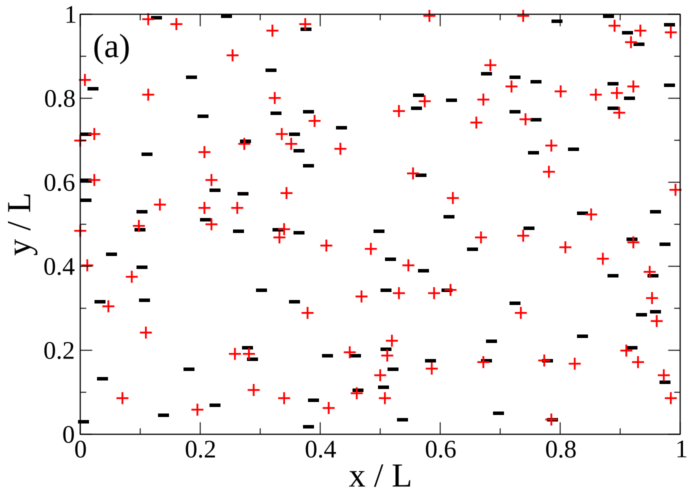
interaction, haute T



gaz parfait, basse T



gaz parfait, haute T



Simulations semi-classiques à 2D (2)

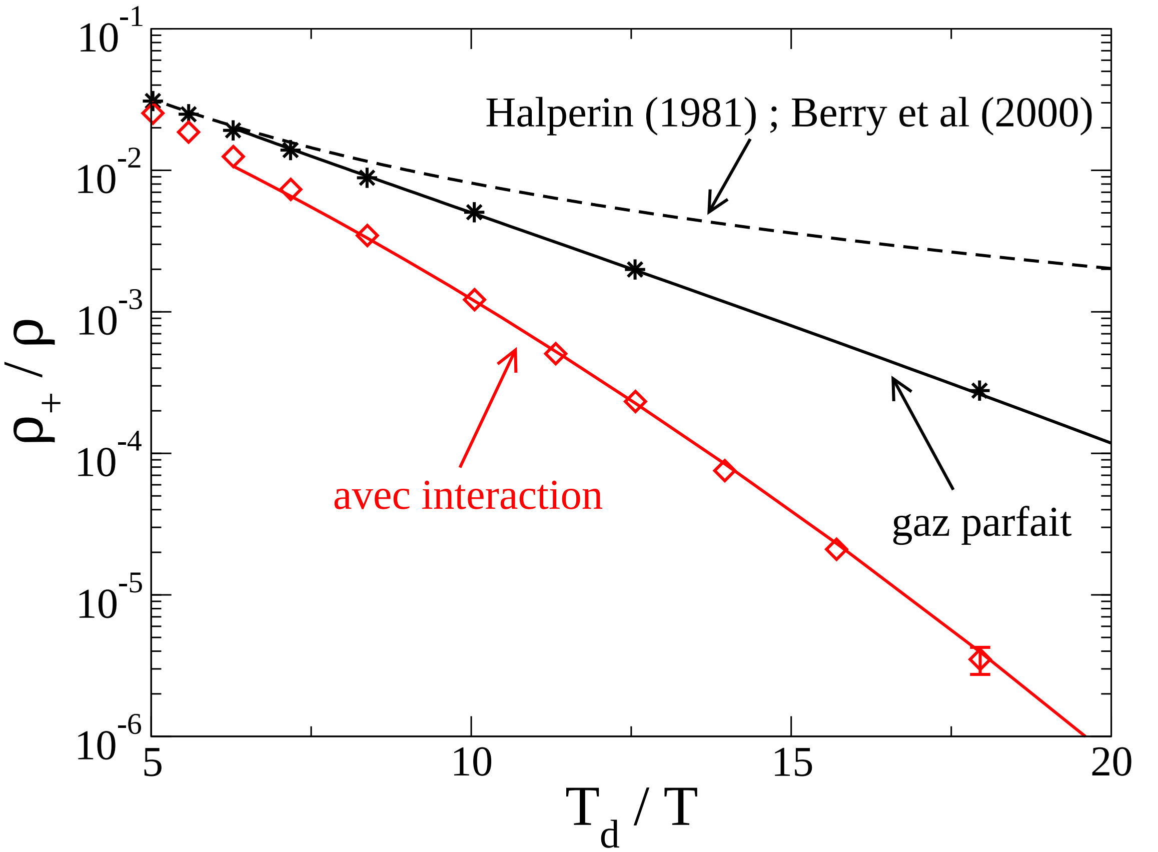


Figure 13: Densité de tourbillons pour $\boldsymbol{g=0}$ et $\boldsymbol{g=0,1\hbar^2/m}$, $\boldsymbol{N=1000}$, conditions aux limites périodiques. Les lignes sont issues d'un calcul analytique en termes de $\boldsymbol{\Delta(T)}$. L. Giorgetti, I. Carusotto, Y. Castin, Phys. Rev. A **76**, 013613 (2007).

Explication analytique : loi d'activation pour la densité

- Distribution semi-classique (canonique) si $k_B T \gg \mu(0)$:

$$P_{\text{simple}}[\psi] = e^{-\beta U[\psi]} \delta(||\psi||^2 - N)$$

$$U[\psi] = \sum_{\mathbf{k}} |a_{\mathbf{k}}|^2 k_B T (e^{\beta \hbar^2 k^2/2m} - 1) + \frac{g}{2} \int d^2 r |\psi|^4$$

- Avoir $\psi = 0$ en un point coûte une énergie $\Delta(T) = \inf_{\psi \text{ avec nœud}} U[\psi] - \inf_{\psi \text{ sans nœud}} U[\psi]$ d'où la loi d'activation $\rho_+ \propto \exp[-\Delta(T)/k_B T]$.
- Minimiseur a une racine double : tourbillons $+, -$ juxtaposés. Fluct. thermiques les séparent : paire BKT.
- Dans la limite $\mu(0) \ll k_B T$, $\Delta(T) \simeq \frac{k_B T_d}{\ln[k_B T/\mu(0)]}$. $k_B T_c \simeq \Delta(T_c)$ redonne l'estimation de T_c par Popov.
- Gaz parfait : un condensat de B.-E. se forme, invalidant le grand canonique. $\Delta(T) \simeq k_B T_d / \ln(L^2/\lambda^2)$.

Position du problème

- Gaz 3D préparé à l'équilibre thermique dans une boîte, dans le régime condensé, $T < T_c$.
- Dans son évolution ultérieure, le système est isolé.
- Quel est le temps de cohérence du condensat ? Largeur de la fonction de corrélation temporelle $\langle a_0^\dagger(t) a_0(0) \rangle$.
- Remarque : Il existe une expérience de pensée permettant de mesurer cette fonction.
- Etudes précédentes : Beliaev (1958) à $T = 0$. A $T > 0$, Zoller, Gardiner (1998) et Graham (1998-2000) contredits par Kuklov, Birman (2000).
- Alice Sinatra, Witkowska, Castin (2006-2009) : clarification et étude quantitative.

Considérations générales

- Représentation phase-module : $a_0(t) = e^{i\hat{\theta}(t)}\hat{n}_0^{1/2}(t)$ avec $[\hat{n}_0, \hat{\theta}] = i$. Si faibles fluctuations de $\hat{n}_0$:

$$\langle a_0^\dagger(t) a_0(0)\rangle \simeq \langle \hat{n}_0\rangle \langle e^{-i[\hat{\theta}(t)-\hat{\theta}(0)]}\rangle$$

- Si distribution du déphasage $\hat{\theta}(t) - \hat{\theta}(0)$ gaussienne :

$$\left|\langle a_0^\dagger(t) a_0(0)\rangle\right| \simeq \langle \hat{n}_0\rangle e^{-\mathrm{Var}\,[\hat{\theta}(t)-\hat{\theta}(0)]/2}$$

- En termes de la fonction de corrélation $C(t) = \langle\dot{\theta}(t)\dot{\theta}(0)\rangle - \langle\dot{\theta}\rangle^2$:

$$\mathrm{Var}\,[\hat{\theta}(t) - \hat{\theta}(0)] = 2t\int_0^t d\tau\, C(\tau) - 2\int_0^t d\tau\, \tau C(\tau)$$

régime balistique	régime diffusif
$\lim_{\tau\to+\infty} C(\tau) \neq 0$	$C(\tau) \underset{\tau\to+\infty}{=} o(1/\tau)$
$\mathrm{Var}\,[\hat{\theta}(t) - \hat{\theta}(0)] \sim At^2$	$\mathrm{Var}\,[\hat{\theta}(t) - \hat{\theta}(0)] \sim 2Dt$

Cas d'un condensat pur

- Modèle à un mode, avec $\hat{n}_0 = \hat{N}$: $H_{\text{un mode}} = \frac{g}{2L^3}\hat{N}^2$
- Evolution de la phase du condensat :

$$\dot{\theta}(t) = \frac{1}{i\hbar}[\hat{\theta}, H_{\text{un mode}}] = -\frac{g\hat{N}}{\hbar L^3} = -\mu(\hat{N})/\hbar$$

- Pas de brouillage de phase si N est fixé.
- Brouillage balistique si fluctuations de N (Sols, 1994; Walls, 1996; Lewenstein, 1996; Castin, Dalibard, 1997)

$$\text{Var}\,[\hat{\theta}(t) - \hat{\theta}(0)] = (t/\hbar)^2 \left(\frac{d\mu}{dN}\right)^2 \text{Var}\,\hat{N}$$

- Expériences : vu pas sur $\langle a_0^\dagger(t) a_0 \rangle$ mais sur $\langle a_0^\dagger(t) b_0(t) \rangle$ par interférence de deux condensats de même phase à $t = 0$: Bloch, Hänsch (2002); Pritchard, Ketterle (2006); thèse de Maussang (équipe de Reichel), 2010.

Gaz à $T > 0$ préparé dans l'ensemble canonique

Par analogie avec le cas précedent (Sinatra et al, 2007) :

- Comme N, l'énergie E est une constante du mouvement.
- Ensemble canonique = mélange statistique d'états propres, $\mathrm{Var}\, E \neq 0$ mais $\mathrm{Var}\, E \ll \bar{E}^2$ pour un grand système
- $\hat{\theta}(t) \sim -\mu_{\mathrm{mc}}(\hat{H})t/\hbar$ et faibles fluctuations de $\hat{H}$:

$$\mathrm{Var}\,[\hat{\theta}(t) - \hat{\theta}(0)] \sim (t/\hbar)^2 \left[\frac{d\mu_{\mathrm{mc}}}{dE}(\bar{E})\right]^2 \mathrm{Var}\, E$$

Par la théorie ergodique quantique (Sinatra et al, 2007) :

- Deutsch (1991) : hypothèse de "thermalisation des états propres". Moyenne d'une observable $\hat{O}$ dans un état propre Ψ_λ est très proche de la moyenne microcanonique :

$$\langle \Psi_\lambda | \hat{O} | \Psi_\lambda \rangle \simeq \bar{O}_{\mathrm{mc}}(E = E_\lambda)$$

- $\hat{O} = \dot{\theta}$ dans la limite de Bogoliubov : $\bar{\dot{\theta}}_{\mathrm{mc}} = -\mu_{\mathrm{mc}}/\hbar$.

Implications du résultat précédent (ensemble canonique)

- La fonction de corrélation $C(\tau)$ de $\dot{\theta}$ ne tend pas vers zéro lorsque $\tau \to +\infty$. Celle de $\hat{n}_0$ non plus.
- Ceci contredit qualitativement Zoller, Gardiner, Graham. En accord qualitatif avec Kuklov et Birman.
- L'ergodicité est assurée par les interactions (en particulier H_3) entre quasi-particules de Bogoliubov.
- Approximer H par H_{Bog}, comme finissent par le faire Kuklov et Birman, détruit l'ergodicité. L'étalement de phase est balistique, mais le coefficient de t^2 est incorrect.

A. Sinatra, Y. Castin, E. Witkowska, Phys. Rev. A 75, 033616 (2007)

Illustration par un calcul de champ classique

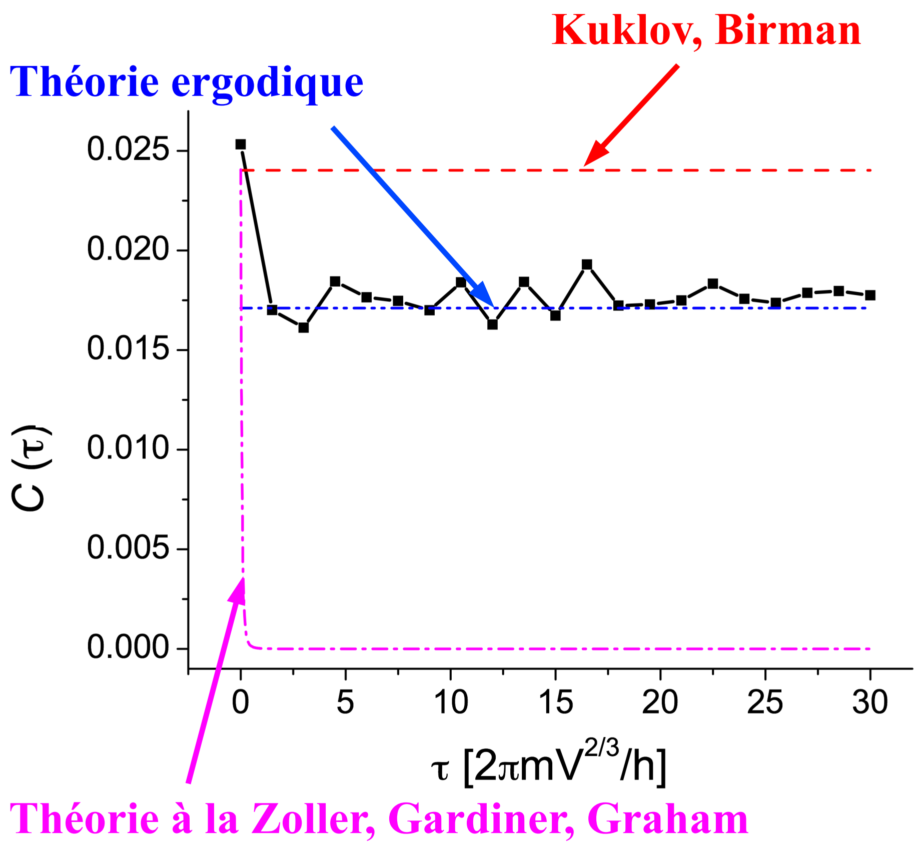


Figure 14: Pour un gaz préparé dans l'ensemble canonique, fonction de corrélation de $\dot{\boldsymbol{\theta}}$ pour le champ classique. L'équation d'évolution du champ est Schrödinger non linéaire. A. Sinatra, Y. Castin, E. Witkowska, Phys. Rev. A **75**, 033616 (2007).

Gaz préparé dans le microcanonique : diffusion de phase

- Les quantités conservées N, E ne fluctuent plus. On trouve $C(\tau) \underset{\tau\to+\infty}{=} O(1/\tau^3)$ et $\mathrm{Var}\,[\hat{\theta}(t) - \hat{\theta}(0)] \sim 2Dt$.
- Toute la dépendance en temps de $C(\tau)$ est requise.
- Dans la limite de Bogoliubov, en posant $\hat{n}_{\mathrm{k}} \equiv \hat{b}^{\dagger}_{\mathrm{k}}\hat{b}_{\mathrm{k}}$:

$$-\hbar\dot{\theta}(\tau) \simeq \mu_{T=0}(\hat{N}) + \frac{g}{L^3}\sum_{\mathrm{k}\neq 0}(U_k + V_k)^2\hat{n}_{\mathrm{k}}(\tau)$$

  $C(\tau)$ se déduit des fonctions $\langle \hat{n}_{\mathrm{k}}(\tau)\hat{n}_{\mathrm{k}'}(0)\rangle$.
- Le gaz est dans un mélange statistique d'états de Fock de quasi-particules $|\{n_{\mathrm{q}}\}\rangle$. On se ramène à $\langle\{n_{\mathrm{q}}\}|\hat{n}_{\mathrm{k}}(\tau)|\{n_{\mathrm{q}}\}\rangle$.
- L'évolution du nombre moyen de quasi-particules est donnée par des équations cinétiques quantiques incluant les processus Beliaev-Landau dus à H_3.

Coefficient de diffusion de la phase du condensat

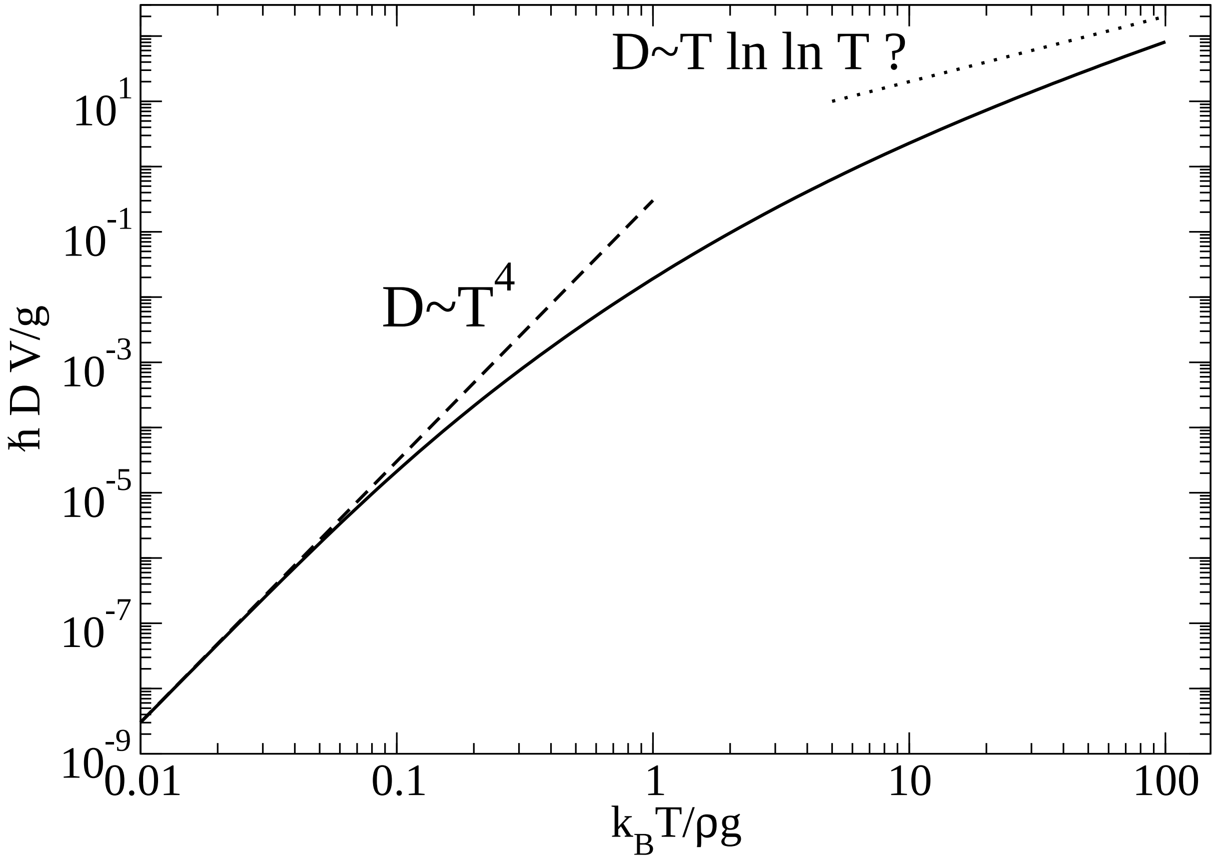


Figure 15: Résultat universel dans la limite de Bogoliubov (interaction faible, $T \ll T_c$).

A. Sinatra, Y. Castin, E. Witkowska, Phys. Rev. A 80, 033614 (2009)

Les équations cinétiques quantiques

$$\dot{n}_{\mathrm{q}} = -\frac{g^2\rho}{\hbar\pi^2}\int d^3\mathrm{k}\Big\{\left[n_{\mathrm{q}}n_{\mathrm{k}} - n_{\mathrm{q+k}}(1+n_{\mathrm{k}}+n_{\mathrm{q}})\right]\left(\mathcal{A}_{k,q}^{|\mathrm{q+k}|}\right)^2$$

$$\times\delta(\epsilon_q+\epsilon_k-\epsilon_{|\mathrm{q+k}|})\Big\}$$

$$-\frac{g^2\rho}{2\hbar\pi^2}\int d^3\mathrm{k}\Big\{\left[n_{\mathrm{q}}(1+n_{\mathrm{k}}+n_{\mathrm{q-k}}) - n_{\mathrm{k}}n_{\mathrm{q-k}}\right]\left(\mathcal{A}_{k,|\mathrm{q-k}|}^{q}\right)^2$$

$$\times\delta(\epsilon_k+\epsilon_{|\mathrm{q-k}|}-\epsilon_q)\Big\}$$

avec les amplitudes de couplage Beliaev-Landau :

$$\mathcal{A}_{k,k'}^{q} = U_qU_kU_{k'} + V_qV_kV_{k'} + (U_q+V_q)(V_kU_{k'}+U_kV_{k'})\,.$$

E. M. Lifshitz, L. P. Pitaevskii “Physical Kinetics”, Landau and Lifshitz Course of Theoretical Physics vol. 10, chap. VII, Pergamon Press (1981)

- Cf. cours 1 : on sait produire des gaz de Fermi en interaction forte depuis 2002 (Thomas, Salomon, Jin, Grimm, Ketterle, Hulet, ...) avec une résonance de Feshbach.
- Cas de l'onde s : interaction forte entre deux états de spin différents, $\sigma = \uparrow, \downarrow$. Longueur de diffusion $|a| \to \infty$.
- Interaction supposée négligeable dans le même état de spin (pas de résonance dans l'onde p).

8.1 Le gaz de Fermi parfait à une composante de spin

- Occupation grand canonique des modes propres :

$$\langle n_\alpha \rangle = \frac{1}{\exp[\beta(\epsilon_\alpha - \mu)] + 1} \leq 1.$$

Pas de transition de phase. A $T = 0$ tous les modes remplis jusqu'a l'énergie de Fermi $\mu(0) = E_F$.

- Cas homogène spatialement :

$$E_F \equiv k_B T_F \equiv \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} \quad \text{avec} \quad k_F = (6\pi^2\rho)^{1/3}$$

- Propriété intéressante : $g^{(2)}(0) = 0$, fluctuations sub-poissoniennes du nombre de particules. Dans une boule de rayon R d'un système homogène, pour $R \to +\infty$:

$0 < T \ll T_F$	$T = 0$
$\text{Var}\,\hat{N} \sim \langle\hat{N}\rangle \dfrac{3T}{2T_F}$ vu par Ketterle (2010)	$\text{Var}\,\hat{N} \sim \dfrac{\ln(Ck_F R)}{2\pi^2}(k_F R)^2$ croît $\approx$ surface

- Des processus sont bloqués par le principe de Pauli. La mer de Fermi peut résister à des interactions attractives bien mieux qu'un condensat de Bose.

- Cf. bosons : modèle sur réseau cubique de pas b. Transposable au cas fermionique : interaction seulement sur le même site entre états de spin différents, $V_{\uparrow\downarrow} = (g_0/b^3)\,\delta_{\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2}$ avec le même couplage que pour les bosons :

$$g_0 = \frac{g}{1 - C_3 a/b} \quad \text{avec} \quad C_3 = 2,442\,749\ldots$$

- Espoir : pour les fermions avec $m_\uparrow = m_\downarrow$, ce modèle admet une limite finie lorsque $b \to 0$ à a fixée. L'énergie du fondamental converge, $\lim_{b\to 0} E_0(b) = E_0 > -\infty$.
- Dans cette limite, $g_0 < 0$ donc interaction attractive. Cf. bosons : Ansatz à N bosons au même point : $E_0(b) \to -\infty$ si $N \geq 3$. Fermions de spin 1/2 : au plus deux fermions par site... mais ce n'est pas une démonstration.

- Hypothèse implicite du domaine : la phase métastable vue expérimentalement correspond à cette limite $b \to 0$.
- Les expériences peuvent être proches de la limite mais pas exactement dessus : $b \simeq 5$ nm, $k_F b \simeq 0,02$. Déviations de l'ordre du pour cent attendues (Werner, Castin, 2010).
- Résonances de Feshbach étroites : $k_F r_e \approx -1$ faisable.

8.3 Si la limite $b \to 0$ existe : modèle de Wigner-Bethe-Peierls (1933, 1935)

- Idée fascinante : remplacer les interactions par des conditions aux limites "de contact" (pour $r_{ij} \to 0$) sur la fonction d'onde (espace continu).
- Ailleurs ($r_{ij} \neq 0$), équation de Schrödinger du gaz parfait sur $\psi(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N)$.

Conditions de contact de Wigner-Bethe-Peierls

- **Pour chaque paire de particules i, j de spin opposé : on fait tendre $\mathbf{r}_i$ vers $\mathbf{r}_j$ à position fixée $\mathbf{R}_{ij}$ du centre de masse de i et j. Il existe une fonction A_{ij} telle que**

$$\psi(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N) = \left(\frac{1}{r_{ij}} - \frac{1}{a}\right) A_{ij}(\mathbf{R}_{ij}; (\mathbf{r}_k)_{k \neq i,j}) + O(r_{ij})$$

- **OK pour $N = 2$: si $b \ll r_{12} \ll k^{-1}$, l'équation de Schrödinger se réduit à $\Delta\psi \simeq 0$ donc $\psi(r_{12}) \simeq a^{-1} - r_{12}^{-1}$:**

$$\frac{\hbar^2 \mathrm{k}^2}{\mathrm{m}}\psi(\mathbf{r}_{12}) = -\frac{\hbar^2}{m}\Delta\psi(r_{12}) + \mathrm{V}(\mathbf{r}_{12})\psi(\mathbf{r}_{12})$$

- **Problème ouvert de physique mathématique : le modèle conduit-il à un Hamiltonien autoadjoint $\forall N$?**

- **Application pour $N = 2$: $\exists$ dimère (état lié) si $a > 0$, $E_{\mathrm{dim}} = -\frac{\hbar^2}{ma^2}$: fonction d'onde $\phi(r_{12}) \propto e^{-r_{12}/a}/r_{12}$.**

8.4 Le régime du gaz de dimères $k_F a \to 0^+$

- **Distance moyenne entre dimères $\gg$ taille $\sim a$ d'un dimère : essentiellement un gaz de Bose.**
- **Longueur de diffusion dimère-dimère positive (solution numérique de Wigner-Bethe-Peierls pour $N = 4$) :**

$$a_{\mathrm{dd}} \simeq 0,60a$$

(Petrov, Salomon, Shlyapnikov, 2004; M. Kagan, Combescot, Leyronas, 2006). Pas d'état lié à 3 ou 4 corps.

- **Un condensat de dimères à basse T (Jin, Grimm, Ketterle, Salomon, 2003). L'équation d'état issue de Bogoliubov s'applique (Leyronas, Combescot, 2007).**
- **Au-delà : terme non universel pour les bosons (paramètre à 3 corps). Fonction seulement de a pour les fermions.**
- **Mesures : Navon, Nascimbène, Chevy, Salomon, 2010.**

- **Théorie de champ moyen pour l'état fondamental :**

bosons	fermions ($\rho_\uparrow = \rho_\downarrow$)
$\mu = \rho g$	$\mu = E_F + g\rho_\uparrow$
instable si $g < 0$ (compressibilité < 0)	stable dans régime validité $k_F\|a\| \ll 1$

- **Mer de Fermi : théorie des perturbations ordinaire donne μ en puissances de $k_F a$. Mesures de Navon, Nascimbène, Chevy, Salomon (2010) : coef. jusqu'à l'ordre 3.**

- **Phénomène non perturbatif de condensation de paires (théorie de Bardeen, Cooper et Schrieffer pour la supra-conductivité des métaux, 1958) : ordre à longue portée**

$$g^{(1)}_{\mathrm{paire}}(\mathbf{r}) = \langle(\hat{\psi}_\downarrow\hat{\psi}_\uparrow)^\dagger(\mathbf{r})(\hat{\psi}_\downarrow\hat{\psi}_\uparrow)(0)\rangle \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} \neq 0$$

$g^{(1)}_{\mathrm{paire}}$ **pas encore mesurée (Carusotto, Castin, 2005).**

La théorie BCS en bref (cas $N_\uparrow = N_\downarrow$)

- Ansatz variationnel : condensat de paires non bosoniques.
- Spectre d'excitations fermioniques : Hamiltonien grand canonique effectif de basse énergie,

$$H_{\mathrm{BCS}} = \sum_{\mathrm{k},\sigma} \epsilon_k c^\dagger_{\mathrm{k},\sigma} c_{\mathrm{k},\sigma} \text{ avec } \epsilon_{\mathrm{k}} = \left[\left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \mu\right)^2 + \Delta^2\right]^{1/2}$$

  Energie Δ pour casser une paire : $\Delta \propto E_F e^{-\pi/(2k_F|a|)}$.
- Généralisation à $T \neq 0$: $k_B T_c \propto E_F e^{-\pi/(2k_F|a|)}$.
- Attention, au-delà de BCS, RPA : une branche d'excitations bosoniques linéaire à faible k, sans gap (phonons de Bogoliubov-Anderson, 1958). Du coup, l'entropie ne s'annule pas en $e^{-\Delta/k_B T}$ mais en T^3 à basse température.
- Argt simple : hydro superfluide, branche acoustique.

Spectre d'excitation d'un gaz non polarisé à $T = 0$

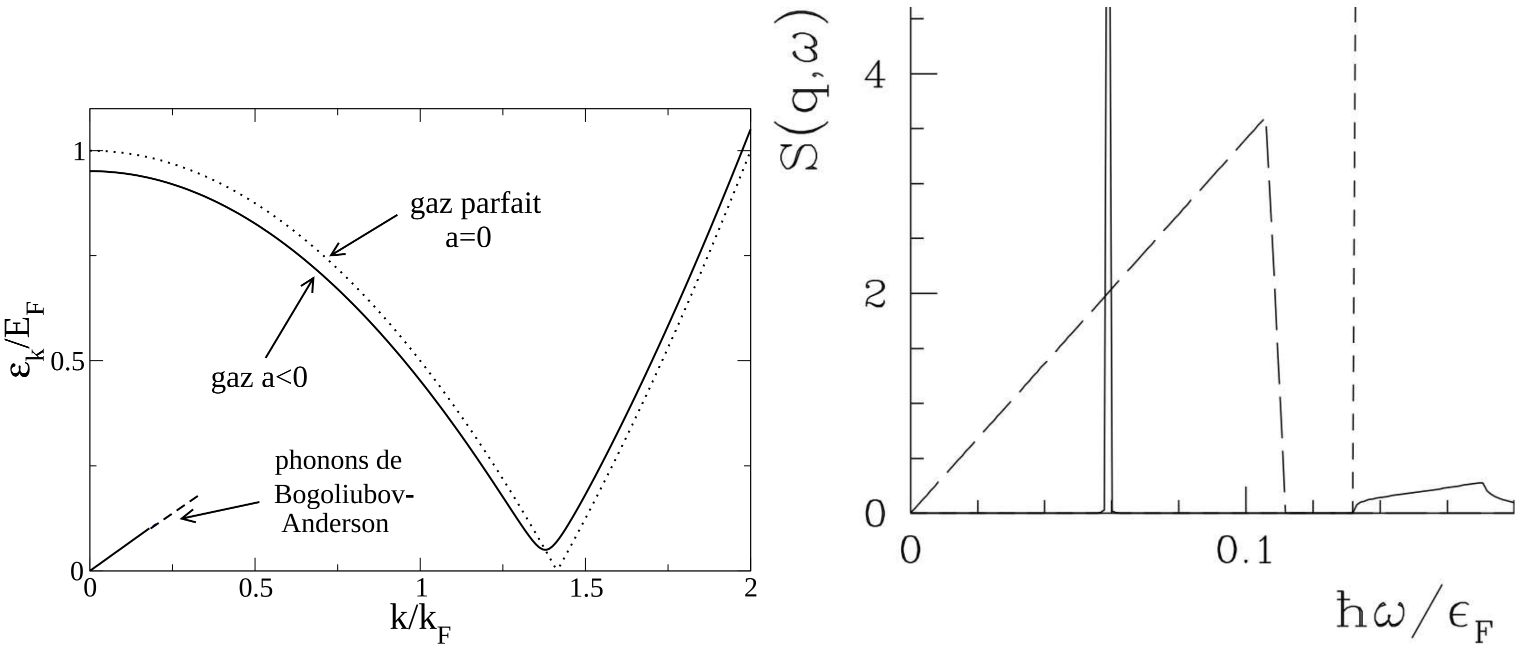


Figure 16: À gauche : spectre BCS + phonons de Bogoliubov-Anderson. À droite : facteur de structure dynamique d'un gaz de Fermi non polarisé à $T = 0$. $k_F a = -0,04$ conduisant à un gap $\Delta \simeq 0,065 E_F$. $q = 0,054 k_F$. En tirets : le gaz parfait. Ligne tiretée verticale : $\hbar\omega = 2\Delta$. Minguzzi, Ferrari, Castin (2001). $S(\mathbf{q}, \omega)$ est reliée à la section efficace de diffusion d'une particule changeant l'impulsion du gaz de $\hbar\mathbf{q}$ et l'énergie de $\hbar\omega$.

Passage continu d'un CBE à BCS : condensat de paires $\forall a$

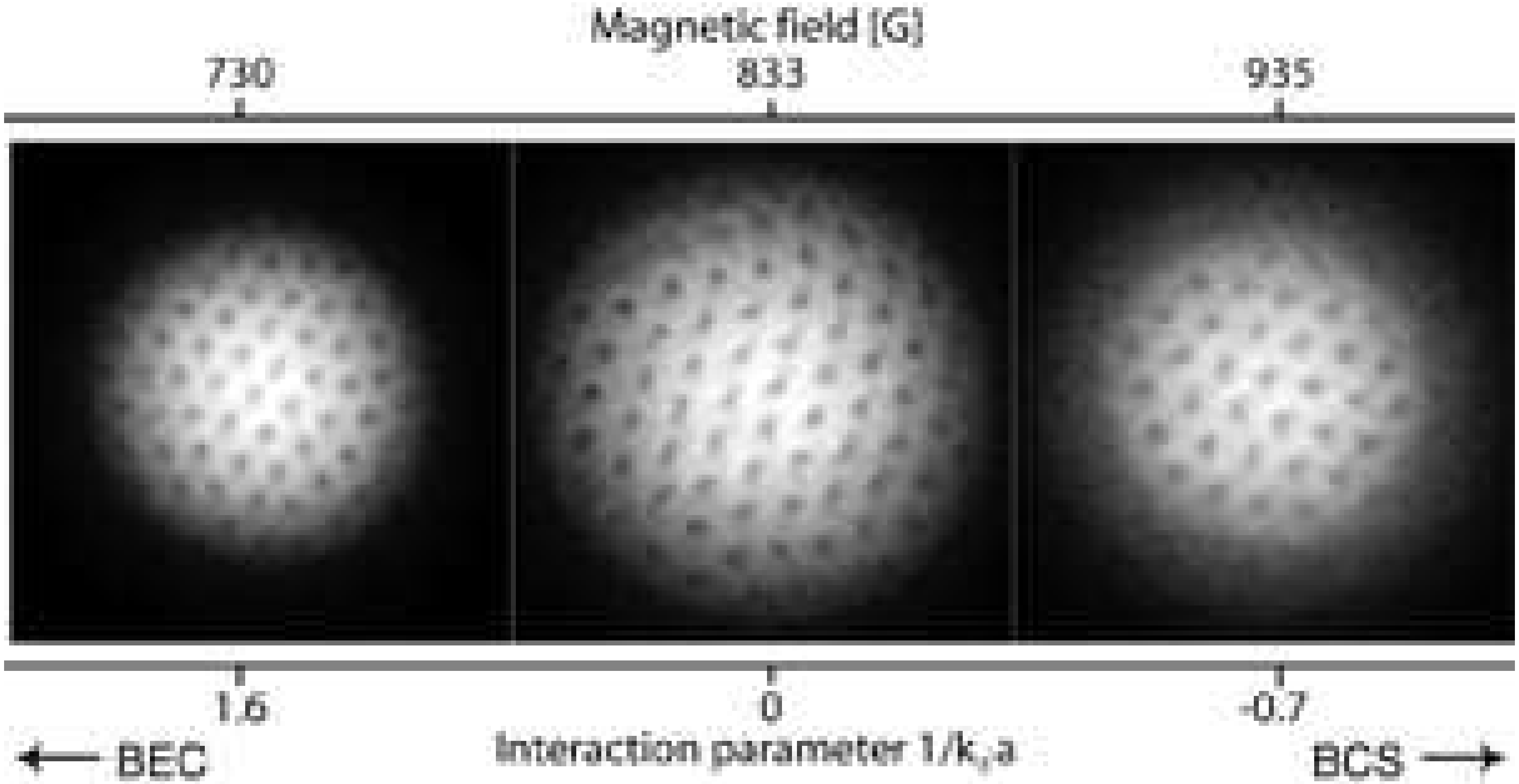


Figure 17: Tourbillons quantiques dans un gaz de Fermi non polarisé, autour de la limite unitaire. M.W. Zwierlein, J.R. Abo-Shaeer, A. Schirotzek, C.H. Schunck, W. Ketterle, Nature **435**, 1047 (2005).

9 Le gaz unitaire

9.1 Étude quantitative : cas $N_\uparrow = N_\downarrow$

- **À $T = 0$ équation d'état par analyse dimensionnelle :**

$$\mu(T = 0) = \xi E_F$$

E_F énergie de Fermi du gaz parfait de même densité.

- **Estimation théorique la plus précise (Carlson, 2009, calcul approché Monte-Carlo à surface nodale fixée) :**

$$\xi = 0,40(1)$$

en accord avec les mesures récentes.

- **De même, gap dans le spectre (Juillet, 2007, calcul exact Monte-Carlo quantique sur notre modèle sur réseau) :**

$$\Delta = 0,442(3) E_F$$

confirmé récemment par Ketterle (2009).

À la température critique : Monte-Carlo quantique

	$\frac{T_c}{T_F}$	$\frac{E(T_c)}{NE_F}$	$\frac{\mu(T_c)}{E_F}$
Burovski, Prokof'ev, Svistunov, Troyer (2006)	$0,152(7)$	$0,310(10)$	$0,493(14)$
Bulgac, Drut, Magierski (2008)	$\leq 0,15(1)$	$0,45(1)$	$0,43(1)$
Goulko, Wingate (2010)	$0,173(6)$	$0,276(14)$	$0,429(9)$
expériences à l'ENS : Nascimbène, Navon, Jiang, Chevy, Salomon (2010)	$0,13 - 0,15$	$0,25 - 0,35$	$0,41 - 0,47$

- Des inégalités thermodynamiques permettent de contraindre les résultats (Werner, Castin, 2010).

Plus de précisions sur l'expérience

- **Accès à $X = P(\mu, T)/P_{\mathrm{gp}}(\mu, 0)$ en fonction de $(k_B T/\mu)^2$, où P_{gp} pression du gaz parfait.**
- **X mesuré est compatible avec la constante $\xi^{-3/2}$ pour $k_B T/\mu < 0,32$, et avec une fonction affine de $(k_B T/\mu)^2$ au-delà (liquide de Fermi ?). N.B. Transition 2nd ordre.**

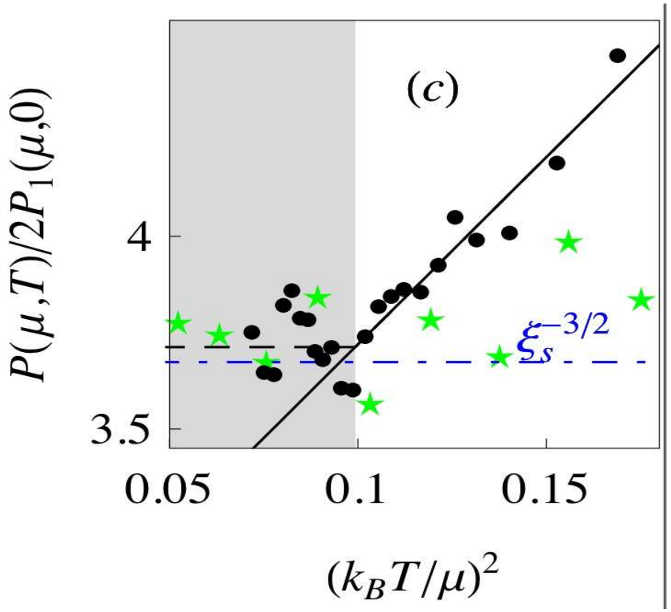
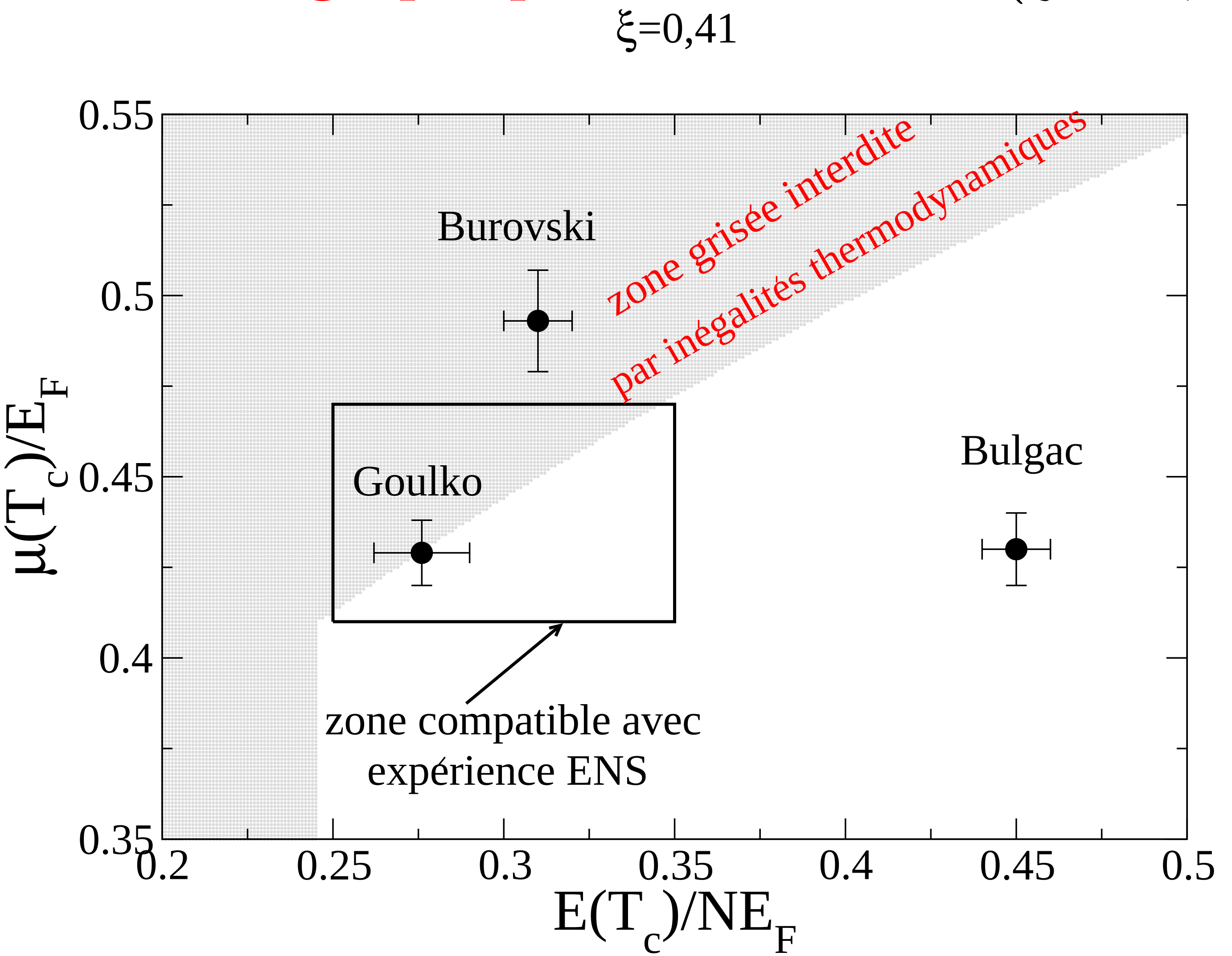


Figure 18: Sylvain Nascimbène, Nir Navon, Kaijun Jiang, Frédéric Chevy, Christophe Salomon, Nature **463**, 1057 (2010).

Présentation graphique des résultats ($\xi = 0,41$)



Hypothèses (Chevy, Lobo, Recati, Giorgini, Stringari, 2006) :

1) **Pour toutes valeurs de $\rho_\downarrow/\rho_\uparrow \leq 1$, il existe une phase spatialement homogène normale (non superfluide).**

2) **Pour $\rho_\downarrow/\rho_\uparrow <$ valeur critique, c'est la phase d'énergie minimale.**

3) **Pour $\rho_\downarrow/\rho_\uparrow >$ valeur critique, cette phase normale est métastable. L'état stable est une démixion (mélange diphasique) du superfluide ($\rho_\uparrow^{\text{loc}} = \rho_\downarrow^{\text{loc}}$) et de la phase normale critique ($\rho_\downarrow^{\text{loc}}/\rho_\uparrow^{\text{loc}} =$ valeur critique).**

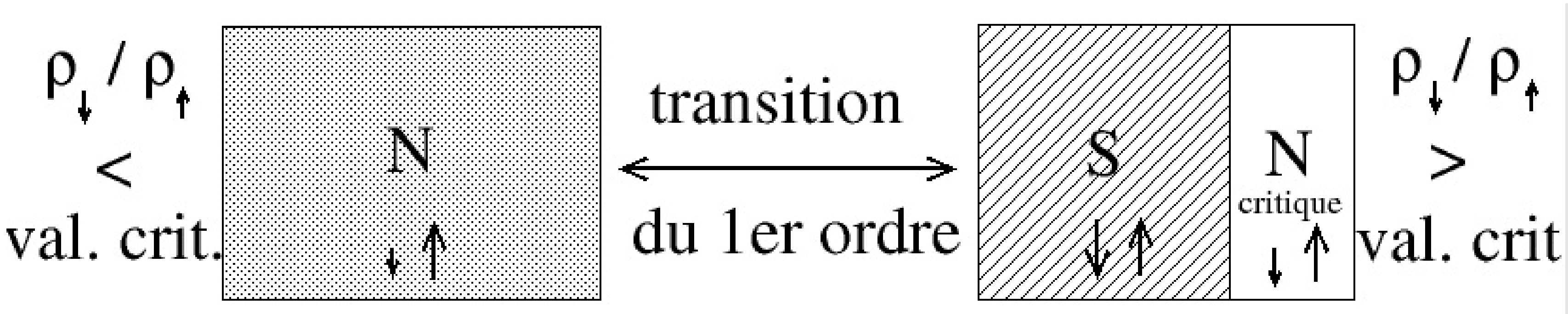


Image précise de la phase normale pour $\rho_\downarrow \ll \rho_\uparrow$

- Si $\rho_\downarrow \ll \rho_\uparrow$, phase normale $\simeq$ gaz de Fermi parfait de quasi-particules appelées polarons (Lobo, 2006).
- Étude d'un polaron : une impureté $\downarrow$ dans une mer de Fermi de particules $\uparrow$, $\epsilon_{\mathbf{p}} \simeq AE_F + p^2/2m^*$.
- Calcul des paramètres par développement en le nombre n d'excitations particule-trou de la mer de Fermi (Chevy, 2006 $n = 1$ puis Combescot, Giraud, 2008 $n = 2$) ou par Monte-Carlo diagrammatique (Prokof'ev, Svistunov, 2008)

$$A \simeq -0,615 \quad m^*/m \simeq 1,20$$

- $1 + A < (2\xi)^{3/5}$: gaz de polarons plus favorable qu'une démixion superfluide plus gaz totalement polarisé $\uparrow$.
- En grand canonique (Mora, Chevy, 2010) accord avec l'expérience, jusqu'à la valeur critique $\rho_\downarrow/\rho_\uparrow \simeq 0,5$!

- Si $1/a = 0$, les conditions de contact sont

$$\psi(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N) = \frac{A_{ij}(\mathbf{R}_{ij}; (\mathbf{r}_k)_{k\neq i,j})}{r_{ij}} + O(r_{ij})$$

- Elles sont invariantes d'échelle : si ψ obéit aux conditions de contact, ψ_λ y obéit aussi, avec

$$\psi_\lambda(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N) \equiv \frac{1}{\lambda^{3N/2}} \psi(\mathbf{r}_1/\lambda, \ldots, \mathbf{r}_N/\lambda)$$

- Conséquences (vraies aussi pour le gaz parfait) :

espace libre	boîte	piège harmonique
pas d'état lié $\forall N$	$PV = 2E/3$	viriel $E = 2E_{\mathrm{harm}}$

Solution dans un piège harmonique isotrope dépendant du temps

- À $t = 0$: piège statique $U(\mathrm{r}) = m\omega^2 r^2/2$, gaz dans un état propre d'énergie E de fonction d'onde ψ
- Pour $t > 0$, dépendance temporelle arbitraire de la raideur du piège. Pour le gaz parfait, solution connue :

$$\psi(\vec{X}, t) = \frac{e^{-i\theta(t)}}{\lambda^{3N/2}(t)} \exp\left[\frac{im\dot{\lambda}}{2\hbar\lambda} X^2\right] \psi(\vec{X}/\lambda(t), 0)$$

  avec $\ddot{\lambda} = \omega^2 \lambda^{-3} - \omega^2(t)\lambda$ et $\dot{\theta} = E\lambda^{-2}/\hbar$.
- C'est un changement de jauge plus un changement d'échelle.
- Le chgt de jauge aussi préserve les conditions de contact :

$$r_i^2 + r_j^2 = 2R_{ij}^2 + \frac{1}{2} r_{ij}^2$$

  donc la solution s'applique aussi au gaz unitaire !

Y. Castin, Comptes Rendus Physique 5, 407 (2004).

Application 1 : le spectre est formé d'échelles

- Changement infinitésimal de ω pour $0 < t < t_f$.
- Evolution ultérieure du paramètre d'échelle :

$$\lambda(t) - 1 = \epsilon \, e^{-2i\omega t} + \epsilon^* \, e^{2i\omega t} + O(\epsilon^2).$$

donc un mode non amorti de fréquence 2ω.

- Chgt correspondant de la fonction d'onde :

$$\psi(\vec{X}, t) = \Big[e^{-iEt/\hbar} - \epsilon e^{-i(E+2\hbar\omega)t/\hbar} L_+$$

$$+ \epsilon^* e^{-i(E-2\hbar\omega)t/\hbar} L_- \Big] \psi(\vec{X}, 0) + O(\epsilon^2)$$

- Opérateurs ascendant et descendant dans le spectre :

$$L_\pm = \pm \left[\frac{3N}{2} + \vec{X} \cdot \partial_{\vec{X}} \right] + \frac{H}{\hbar\omega} - m\omega X^2/\hbar$$

- Spectre = collection d'échelles semi-infinies de pas $2\hbar\omega$.

Application 2 : correspondance entre piège et espace libre

- Chaque échelle a un premier barreau : énergie E_g, fonction d'onde ψ_g.
- L'intégration de $L_- \psi_g = 0$ en coordonnées hypersphériques $\vec{X} = (X, \vec{n})$ donne

$$\psi_g(\vec{X}\,) = e^{-m\omega X^2/2\hbar}\, X^{E_g/(\hbar\omega) - 3N/2} f(\vec{n})$$

- Limite $\omega \to 0$: correspondance avec les solutions d'énergie nulle dans l'espace libre. N.B. : $E_g/(\hbar\omega)$ est constant.
- Réciproque : Soit une solution de $0 = \Delta_{\vec{X}} \psi^{\mathrm{libre}}$ obéissant aux conditions de contact. Elle est invariante d'échelle :

$$\psi_\lambda^{\mathrm{libre}}(\vec{X}) = \frac{1}{\lambda^\nu} \psi^{\mathrm{libre}}(\vec{X}) \quad \forall \lambda > 0$$

Alors $\psi(\vec{X}) = e^{-m\omega X^2/2\hbar} \psi^{\mathrm{libre}}(\vec{X})$ est état propre dans le piège avec une énergie $\nu\hbar\omega$.

Application 2 bis : séparabilité en coordonnées hypersphériques

- **Coordonnées hypersphériques internes, après séparation du centre de masse C :**

$$\psi^{\text{libre}}(\vec{X}) = R^{-(3N-5)/2} F(R)\phi(\Omega)$$

avec hyperrayon $R = [\sum_i (\mathbf{r}_i - \mathrm{C})^2)]^{1/2}$.

- **Problème hyperangulaire :**

$$\left[-\Delta_\Omega + \left(\frac{3N-5}{2}\right)^2\right]\phi(\Omega) = s^2\phi(\Omega)$$

non trivial car conditions de contact sur $\phi(\Omega)$.

- s^2 **est a priori réel, pas forcément positif. Noter la symétrie** $s \leftrightarrow -s$.

- Problème hyperradial : équation de Schrödinger à 2D,

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_{\mathrm{R}}^{2D}+\frac{\hbar^2 s^2}{2mR^2}\right]F(R)=EF(R).$$

- Quelles conditions aux limites mettre en $R=0$ sur F ? Wigner-Bethe-Peierls n'impose rien.
- Point clé : solutions particulières $\sim R^{\pm s}$ lorsque $R\to 0$.

$s>1$	$0<s<1$	$s\in i\mathbb{R}^{+*}$
$F\sim R^s$	$F\sim (qR)^s\pm(qR)^{-s}$	$F\sim \mathrm{Im}\left[(qR)^s\right]$
0 état lié	un état lié si $-$	nbre ∞ d'états liés
	$E\propto -\frac{\hbar^2 q^2}{m}$: si $q\to 0$, résonance à N corps	$E_n\propto -\frac{\hbar^2 q^2}{m}\exp[-2\pi n/\lvert s\rvert]$, $n\in\mathbb{Z}$: effet d'Efimov

Voir un effet d'Efimov avec les fermions ?

- Solution du problème à 3 corps pour $1/a = 0$ par Efimov (1971,1973).
- Pour 3 bosons, l'un des exposants s est imaginaire pur, $s_0 = 1,00624 \times i$. Vu expérimentalement (Grimm, 2006; Inguscio, Khaykovich, Hulet, 2009; Jochim, 2010).
- Ceci interdit l'existence de tétramères d'Efimov (dissociation en trimère d'Efimov plus une particule).
- Pour 3 fermions de spin 1/2, exposants s tous réels (Werner, Castin, 2006).
- Croyance actuelle : pour des fermions de spin 1/2, jamais d'effet d'Efimov $\forall N \ldots$
- ... sauf si l'on s'autorise $m_\uparrow \neq m_\downarrow$!

Des fermions et une impureté

- n fermions de même état de spin, masse M, interagissant seulement avec une impureté de masse m.
- Image physique avec Born-Oppenheimer pour $n = 2$: interaction effective attractive en $-\hbar^2/\mathbf{m}r_{12}^2$ entre fermions médiée par l'impureté.
- Si $m \ll M$, elle peut battre le principe de Pauli, c'est-à-dire la barrière centrifuge pour un moment cinétique orbital $l = 1$ entre fermions.