

## Propriétés statistiques de la suite de sauts quantiques associée à des processus dissipatifs

Claude COHEN-TANNOUJDI, Bruno ZAMBON et Ennio ARIMONDO

**Résumé** – Un système atomique, soumis à des processus dissipatifs comme l'émission spontanée de photons ou l'excitation par un rayonnement thermique, effectuée des sauts quantiques à des instants aléatoires, tout en évoluant de manière cohérente entre 2 sauts quantiques successifs. Un certain nombre de probabilités sont introduites pour caractériser une telle suite aléatoire. Une méthode générale de calcul de ces probabilités est esquissée et sera appliquée, dans une seconde Note, à l'analyse physique d'un modèle simple d'amplification sans inversion de population.

### Statistical properties of the sequence of quantum jumps occurring for a dissipative system

**Abstract** – The time evolution of an atomic system submitted to dissipative processes, such as spontaneous emission of photons or excitation by a thermal field, can be pictured as consisting of a sequence of coherent evolution periods separated by quantum jumps occurring at random times. A certain number of probabilities are introduced for describing this random sequence, and general methods for calculating them are sketched. They will be applied, in a subsequent Note, to the physical analysis of a simple model of amplification without inversion.

**Abridged English Version** – The quantum jump description of dissipative processes, mentioned in the abstract and discussed in [1]-[7], is applied here to the 3-level atom of Figure 1, which will be also considered in a subsequent Note dealing with amplification without inversion. The various notations for the atomic and laser frequencies and for the transition rates are defined in the figure caption and in (1) and (2). Rather than solving optical Bloch equations for the density matrix  $\sigma$  of such a system, we follow here the time evolution of a single atom. Using a quantum description of the 2 laser fields  $\omega_{L_1}$  and  $\omega_{L_2}$ , we picture the time evolution as a sequence of coherent evolution periods in manifolds  $\mathcal{E}(N_1, N_2)$  of quasidegenerate states of the atom+laser system, separated by quantum jumps bringing the atom from one manifold to a neighbouring one (see Fig. 2 and its caption). Each coherent evolution period  $(i, j)$  in a manifold  $\mathcal{E}(N_1, N_2)$  is defined by the state  $i$  of  $\mathcal{E}(N_1, N_2)$  in which the system enters  $\mathcal{E}(N_1, N_2)$ , and the state  $j$ , from which the system leaves  $\mathcal{E}(N_1, N_2)$ . Figure 3 represents a sequence of coherent evolution periods  $(i, j)(k, l)(m, n)...$  separated by quantum jumps.

The coherent evolution within  $\mathcal{E}(N_1, N_2)$ , between the jump of entry and the jump of exit, is governed by the effective Hamiltonian (3), where the non-Hermitian terms  $-i\hbar G_i/2$  are associated with the departure rates  $G_i$  from the states  $i=1, 2, e$  of  $\mathcal{E}(N_1, N_2)$ , due to the dissipative processes and given in (4) (see also Fig. 2). Solving the Schrödinger equation associated with (3) gives the transition amplitudes (5 b), from which one can deduce the conditional probabilities  $W_{ij}(t)dt$  for the system to leave  $\mathcal{E}(N_1, N_2)$  from  $j$  between  $t$  and  $t+dt$ , if it entered this manifold in  $i$  at  $t=0$  [see (5 a)]. From Figure 2, one can also find the probabilities  $\pi_{jk}$ , if a quantum jump starts from the state  $j$  of a manifold, that this jump brings the system into the state  $k$  of another manifold [see (6)]. The stochastic properties of the random sequence of Figure 3 are completely determined by the probabilities  $W_{ij}(t)$  and  $\pi_{jk}$ . We give now an example of physical insight which can be obtained from such a point of view. Coming back to Figure 2, we see that the quantum jumps (oblique arrows) always

connect states in which the number of photons  $N_1$  and  $N_2$  have well defined values, which are the same before and after the jump. By contrast, between 2 jumps, the state of the system is a linear superposition of states with different values of  $N_1$  and  $N_2$ . Each jump can thus be considered as a determination of  $N_1$  and  $N_2$ , each period  $(i, j)$  corresponding to well defined variations  $\Delta N_1$  and  $\Delta N_2$  of  $N_1$  and  $N_2$  during this period. For example, in a period  $(2, 1)$ , *i.e.* explicitly  $|g_2, N_1, N_2 + 1\rangle \rightarrow |g_1, N_1 + 1, N_2\rangle$ ,  $\Delta N_1 = +1$  and  $\Delta N_2 = -1$ , which corresponds to a stimulated Raman process where the field  $\omega_{L_1}$  gains one photon, whereas the field  $\omega_{L_2}$  loses one. The quantum jump approach developed here thus allows one to follow the variations of  $N_1$  and  $N_2$  and to identify the physical processes responsible for these variations.

Various probabilities can be introduced for the random sequence of Figure 3.  $\mathcal{P}(i, j)$  is the probability that any period, taken randomly from this sequence, is a period  $(i, j)$ .  $\mathcal{P}(j|i)$  is the conditional probability, if a period starts in  $i$ , that this period ends in  $j$ .  $\mathcal{P}(i, j)$  is related to  $\mathcal{P}(j|i)$  by (7), where  $\mathcal{P}(i)$  is the probability for any period to start in  $i$ .  $\mathcal{P}(j|i)$  can be calculated from  $W_{ij}(t)$  given in (5), and obeys (8) and (9). To find the  $\mathcal{P}(i)$ 's, one uses (10), where  $Q$  (in:  $j$ /in:  $i$ ) is the conditional probability, if a period starts in  $i$ , that the next period starts in  $j$ . This conditional probability is related by (11) to  $\mathcal{P}(j|i)$ , given in (8), and to  $\pi_{jk}$  given in (6). The normalization condition (13) follows from (9) and (12) and allows one to show that the homogeneous system (10) has a nonzero solution, determined by  $\sum_i \mathcal{P}(i) = 1$ . To summarize the procedure of calculation: solving the Schrödinger equation

associated with (3) gives the  $\mathcal{P}(j|i)$ 's, using (8) and (4); one then calculates the  $\mathcal{P}(i)$ 's, using (11), (6) and (10), which gives, according to (7),  $\mathcal{P}(i, j)$ . Another interesting quantity is the average duration  $T(i, j)$  of a period  $(i, j)$ , given by (15), from which one deduces the average duration  $T$  of any period, given by (16). From  $T(i, j)$ , one can also calculate the probability  $\Pi(i, j)$ , if one takes a random instant in the time axis, to find the system in a period  $(i, j)$ . Long periods are then favoured and  $\Pi(i, j)$  is given by (17). It may finally be useful to know the state vector (18) of a system which started a period in the state  $i$  at time  $t_i$ , and which, a time  $\tau$  later, has not yet jumped to another manifold.

---

INTRODUCTION. — Plusieurs travaux récents ont montré que l'évolution temporelle d'un système quantique soumis à des processus dissipatifs (comme l'émission spontanée de photons ou l'excitation par un rayonnement incohérent à large bande spectrale) pouvait être décrite comme une suite de périodes d'évolution cohérente séparées par des sauts quantiques se produisant à des instants aléatoires ([1]-[7]). Le but de cette Note est d'établir un certain nombre de propriétés statistiques générales relatives à cette suite de sauts quantiques. Une Note suivante appliquera les résultats généraux ainsi obtenus à un modèle simple proposé récemment [8] pour démontrer la possibilité d'une amplification sans inversion de population, et nous montrerons alors comment le point de vue développé ici permet d'identifier les mécanismes physiques à la base d'un tel phénomène.

Pour fixer les idées, et dans la perspective du problème physique qui sera analysé dans la Note suivante, nous considérons ici l'atome à trois niveaux en configuration  $\Lambda$  représenté sur la figure 1. Deux champs laser de fréquences  $\omega_{L_1}$  et  $\omega_{L_2}$  excitent respectivement les transitions atomiques  $g_1 - e$  et  $g_2 - e$ , de fréquences  $\omega_{e_1}$  et  $\omega_{e_2}$ . L'atome est également soumis à des processus dissipatifs, décrits dans la légende de la figure, et responsables

des taux de transition  $\Gamma_i$  et  $R_i$  ( $i=1, 2$ ). Nous poserons :

$$(1) \quad \tilde{\Gamma}_i = \Gamma_i + R_i, \quad \tilde{\Gamma} = \tilde{\Gamma}_1 + \tilde{\Gamma}_2$$

$$(2) \quad \delta_i = \omega_{L_i} - \omega_{ei}$$

PÉRIODES D'ÉVOLUTION COHÉRENTE ET SAUTS QUANTIQUES. — Plutôt que d'essayer de résoudre les équations de Bloch optiques décrivant l'évolution de la matrice densité atomique  $\sigma$ , nous allons suivre ici l'évolution temporelle d'un seul atome. Il est commode pour cela d'utiliser une description quantique des champs laser. La figure 2 représente les multiplicités  $\mathcal{E}(N_1, N_2)$  formées par les 3 états  $|g_1, N_1 + 1, N_2\rangle$ ,  $|g_2, N_1, N_2 + 1\rangle$  et  $|e, N_1, N_2\rangle$ , où  $N_1$  et  $N_2$  sont les nombres de photons laser  $\omega_{L_1}$  et  $\omega_{L_2}$ . Ces 3 états sont dégénérés si les 2 champs laser sont résonnants ( $\delta_1 = \delta_2 = 0$ ). L'hamiltonien d'interaction atome-laser  $V_{AL}$  ne couple que des états d'une même multiplicité, les couplages correspondants étant caractérisés par les fréquences de Rabi  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ , et représentés par les flèches horizontales de la figure 2. En l'absence de processus dissipatifs, le système évoluerait de manière cohérente entre les 3 états de  $\mathcal{E}(N_1, N_2)$ . Il ne peut en fait quitter  $\mathcal{E}(N_1, N_2)$ , ou arriver dans  $\mathcal{E}(N_1, N_2)$ , que par des sauts quantiques associés aux divers processus dissipatifs. Les flèches obliques de la figure 2 représentent de tels sauts (*voir* exemples décrits dans la légende).

Chaque période d'évolution cohérente ( $i, j$ ) dans une multiplicité  $\mathcal{E}(N_1, N_2)$  est définie par l'état  $i$  dans lequel elle commence, après le saut d'entrée, et par l'état  $j$  à partir duquel le système va quitter  $\mathcal{E}(N_1, N_2)$ , lors du saut de sortie. Pour simplifier les notations, nous repérons les états de  $\mathcal{E}(N_1, N_2)$  par l'état atomique ( $i, j=1, 2$  ou  $e$ ) et omettons les nombres quantiques des photons laser. La figure 3 représente par exemple

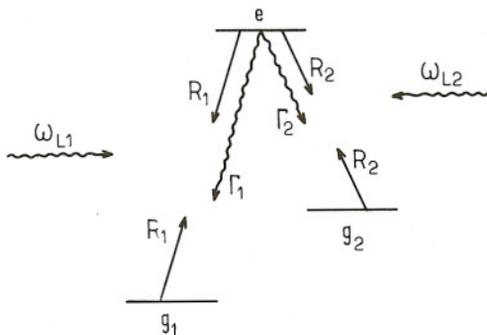


Fig. 1. — Atome à 3 niveaux en configurations  $\Lambda$ , possédant un niveau excité  $e$  et deux niveaux inférieurs  $g_1$  et  $g_2$ . Les deux transitions permises  $g_1-e$  et  $g_2-e$  sont excitées par deux champs laser de fréquences  $\omega_{L_1}$  et  $\omega_{L_2}$  respectivement voisines des fréquences atomiques  $\omega_{e_1}$  et  $\omega_{e_2}$ . Les processus dissipatifs auxquels est soumis l'atome sont, d'une part, l'émission spontanée, qui fait passer l'atome de  $e$  vers  $g_i$  avec un taux  $\Gamma_i$  ( $i=1, 2$ ); d'autre part, l'absorption et l'émission induite associées à un rayonnement incohérent à large bande spectrale, qui font passer l'atome de  $g_i$  vers  $e$  (absorption) ou de  $e$  vers  $g_i$  (émission induite) avec un taux  $R_i$  ( $i=1, 2$ ).

Fig. 1. — Three-level atom, with one excited state  $e$  and two lower states  $g_1$  and  $g_2$  forming a  $\Lambda$  configuration. The two allowed transitions  $g_1-e$  and  $g_2-e$  are excited by two laser fields with frequencies  $\omega_{L_1}$  and  $\omega_{L_2}$  close, respectively, to the atomic frequencies  $\omega_{e_1}$  and  $\omega_{e_2}$ . The dissipative processes experienced by the atom are, on one hand, spontaneous emission which brings the atom from  $e$  to  $g_i$  with rate  $\Gamma_i$  ( $i=1, 2$ ); and, on the other hand, absorption and stimulated emission of an incoherent radiation field with broad spectral width, which brings the atom from  $g_i$  to  $e$  (absorption) or from  $e$  to  $g_i$  (induced emission) with rate  $R_i$  ( $i=1, 2$ ).

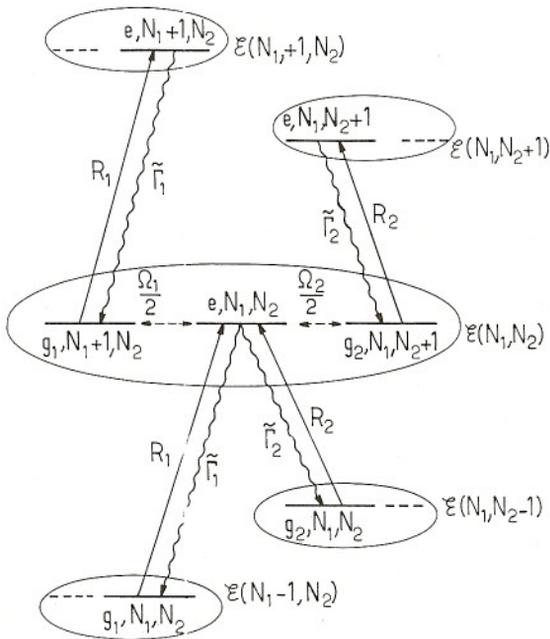


Fig. 2. — Multiplicités  $\mathcal{E}(N_1, N_2)$  d'états du système atome + photons laser et sauts quantiques faisant passer le système d'une multiplicité à l'autre. La multiplicité  $\mathcal{E}(N_1, N_2)$  est formée par les états  $|g_1, N_1+1, N_2\rangle$ ,  $|g_2, N_1, N_2+1\rangle$  et  $|e, N_1, N_2\rangle$ , où  $N_1$  et  $N_2$  sont les nombres de photons laser  $\omega_{L_1}$  et  $\omega_{L_2}$ . Ces 3 états sont dégénérées si les 2 champs laser sont résonnants ( $\delta_1 = \delta_2 = 0$ ). L'atome dans  $g_1$  (resp.  $g_2$ ) peut passer dans  $e$  en absorbant un photon  $\omega_{L_1}$  (resp.  $\omega_{L_2}$ ). Les couplages correspondants, caractérisés par les fréquences de Rabi  $\Omega_1$  (resp.  $\Omega_2$ ), sont représentés par les flèches horizontales de la figure, et n'existent qu'à l'intérieur d'une multiplicité. Le système ne peut quitter  $\mathcal{E}(N_1, N_2)$  que par un saut quantique le conduisant vers une multiplicité voisine (flèches obliques partant de  $\mathcal{E}(N_1, N_2)$ ). Par exemple, il peut sauter de  $|e, N_1, N_2\rangle$  vers  $|g_1, N_1, N_2\rangle$  avec un taux  $\tilde{\Gamma}_1$  (émission spontanée ou induite incohérente). La figure montre également les sauts quantiques qui permettent au système d'entrer dans  $\mathcal{E}(N_1, N_2)$  [flèches obliques arrivant dans  $\mathcal{E}(N_1, N_2)$ ]. Par exemple, le système peut sauter de  $|g_1, N_1, N_2\rangle$  vers  $|e, N_1, N_2\rangle$  avec un taux  $R_1$  (absorption incohérente).

Fig. 2. — Manifolds  $\mathcal{E}(N_1, N_2)$  of states of the atom + laser photons system and quantum jumps bringing the system from one manifold to another one. The manifold  $\mathcal{E}(N_1, N_2)$  consists of the three states  $|g_1, N_1+1, N_2\rangle$ ,  $|g_2, N_1, N_2+1\rangle$  and  $|e, N_1, N_2\rangle$ , where  $N_1$  and  $N_2$  are the numbers of laser photons  $\omega_{L_1}$  and  $\omega_{L_2}$ . These three states are degenerate if the two laser fields are resonant ( $\delta_1 = \delta_2 = 0$ ). The atom in  $g_1$  (resp.  $g_2$ ) can be transferred to  $e$  by absorption of one  $\omega_{L_1}$  (resp.  $\omega_{L_2}$ ) photon. The corresponding couplings, characterized by the Rabi frequencies  $\Omega_1$  (resp.  $\Omega_2$ ), are represented by the horizontal arrows of the Figure and only exist within a manifold. The system can leave  $\mathcal{E}(N_1, N_2)$  only by a quantum jump which brings it into a neighbouring manifold (oblique arrows starting from  $\mathcal{E}(N_1, N_2)$ ). For example, it can jump from  $|e, N_1, N_2\rangle$  into  $|g_1, N_1, N_2\rangle$  with a rate  $\tilde{\Gamma}_1$  (spontaneous emission or incoherent induced emission). The Figure also shows the quantum jumps allowing the system to enter  $\mathcal{E}(N_1, N_2)$  [oblique arrows arriving in  $\mathcal{E}(N_1, N_2)$ ]. For example, the system can jump from  $|g_1, N_1, N_2\rangle$  into  $|e, N_1, N_2\rangle$  with a rate  $R_1$  (incoherent absorption).

une évolution temporelle possible du système, constituée par la suite de périodes d'évolution cohérente  $(i, j)$ ,  $(k, l)$ ,  $(m, n)$ ... séparées par des sauts quantiques, de  $j$  vers  $k$ , de  $l$  vers  $m$ ...

Entre le saut quantique d'entrée et le saut quantique de sortie, l'évolution à l'intérieur de  $\mathcal{E}(N_1, N_2)$  est régie par l'hamiltonien effectif non hermitique [9] :

$$(3) \quad H_{\text{eff}} = \hbar \begin{pmatrix} -iR_1/2 & 0 & \Omega_1/2 \\ 0 & -iR_2/2 & \Omega_2/2 \\ \Omega_1/2 & \Omega_2/2 & -i\tilde{\Gamma}/2 \end{pmatrix}$$



Fig. 3. — Suite de périodes d'évolution cohérente... (i, j), (k, l), (m, n)... séparées par des sauts quantiques, de j vers k, de l vers m...

Fig. 3. — Sequence of coherent evolution periods... (i, j), (k, l), (m, n)... separated by quantum jumps, from j to k, from l to m...

obtenu en ajoutant aux énergies des états  $|k\rangle$  de  $\mathcal{E}(N_1, N_2)$  une partie imaginaire  $-i\hbar G_k/2$ , où  $G_k$  est le taux de départ de l'état  $|k\rangle$  dû aux processus dissipatifs. D'après la figure 2 :

$$(4) \quad G_1 = R_1, \quad G_2 = R_2, \quad G_e = \tilde{\Gamma}$$

De (3) et (4), on déduit alors que la probabilité conditionnelle pour que le système quitte  $\mathcal{E}(N_1, N_2)$  à partir de  $|j\rangle$  entre  $t$  et  $t + dt$ , sachant qu'il est entré dans  $|i\rangle$  à  $t=0$ , est égale à :

$$(5 a) \quad W_{ij}(t) dt = G_j |c_{ij}(t)|^2 dt$$

où

$$(5 b) \quad c_{ij}(t) = \langle j | \exp(-iH_{\text{eff}} t/\hbar) | i \rangle$$

est l'amplitude de probabilité pour que le système partant de l'état  $|i\rangle$  de  $\mathcal{E}(N_1, N_2)$  à  $t=0$  soit dans l'état  $|j\rangle$  de  $\mathcal{E}(N_1, N_2)$  à l'instant  $t$ . Enfin, la figure 2 permet d'obtenir les probabilités  $\pi_{jk}$ , pour un saut quantique s'effectuant à partir de l'état  $|j\rangle$  d'une multiplicité, d'aboutir dans l'état  $|k\rangle$  d'une multiplicité voisine :

$$(6) \quad \pi_{1k} = \delta_{ek}, \quad \pi_{2k} = \delta_{ek}, \quad \pi_{ek} = (\tilde{\Gamma}_1/\tilde{\Gamma}) \delta_{1k} + (\tilde{\Gamma}_2/\tilde{\Gamma}) \delta_{2k}.$$

La connaissance des  $W_{ij}(t)$  et des  $\pi_{jk}$  permet de tirer au sort l'instant où le système va quitter une multiplicité et l'état  $j$  à partir duquel il va la quitter, ainsi que l'état  $k$  de la multiplicité voisine dans lequel il va entrer après un tel saut. On aboutit ainsi à l'image d'une marche au hasard, ou évolution stochastique, dont toutes les caractéristiques sont connues. L'intérêt d'une telle image est de permettre d'isoler les contributions de chaque période d'évolution cohérente (i, j) à un processus physique donné. Revenant à la figure 2, on voit par exemple que chaque saut quantique relie deux états où les nombres de photons laser  $N_1$  et  $N_2$  ont des valeurs bien définies et égales dans les 2 états, alors qu'entre 2 sauts, l'état du système est une superposition linéaire d'état de  $N_1$  et  $N_2$  différents. Chaque saut quantique peut donc être considéré comme constituant une détermination de  $N_1$  et  $N_2$ , chaque période (i, j) correspondant à une variation bien définie  $\Delta N_1$  de  $N_1$  et  $\Delta N_2$  de  $N_2$  entre le saut d'entrée et le saut de sortie. Par exemple, dans une période (2, 1), c'est-à-dire  $|g_2, N_1, N_2 + 1\rangle \rightarrow |g_1, N_1 + 1, N_2\rangle$ ,  $\Delta N_1 = +1$  et  $\Delta N_2 = -1$ , ce qui correspond à un processus Raman stimulé où le champ  $\omega_{L1}$  gagne un photon alors que le champ  $\omega_{L2}$  en perd un. En étudiant un chemin particulier de la marche au hasard, on peut ainsi suivre dans le temps les variations de  $N_1$  et  $N_2$  et identifier les processus physiques responsables de ces variations.

PROPRIÉTÉS STATISTIQUES MOYENNES. — Montrons maintenant qu'il est possible de calculer simplement un certain nombre de propriétés statistiques moyennes de la suite aléatoire de la figure 3. Une quantité importante est la probabilité  $\mathcal{P}(i, j)$  pour qu'une

période quelconque, tirée au hasard, soit une période  $(i, j)$ . D'après l'axiome des probabilités conditionnelles :

$$(7) \quad \mathcal{P}(i, j) = \mathcal{P}(j|i) \mathcal{P}(i)$$

où  $\mathcal{P}(i)$  est la probabilité pour qu'une période quelconque tirée au hasard commence dans l'état  $i$ , et  $\mathcal{P}(j|i)$  la probabilité conditionnelle pour qu'une période finisse dans l'état  $j$  sachant qu'elle a commencé dans l'état  $i$ . A partir de (5), on peut calculer aisément  $\mathcal{P}(j|i)$  :

$$(8) \quad \mathcal{P}(j|i) = \int_0^\infty W_{ij}(t) dt = G_j \int_0^\infty dt |c_{ij}(t)|^2$$

et vérifier, compte tenu de (3) et (4) que :

$$(9) \quad \sum_j \mathcal{P}(j|i) = 1 \quad \text{pour tout } i.$$

Pour calculer  $\mathcal{P}(i)$ , nous partons de la relation :

$$(10) \quad \mathcal{P}(j) = \sum_i Q(\text{in} : j/\text{in} : i) \mathcal{P}(i)$$

où  $Q(\text{in} : j/\text{in} : i)$  est la probabilité conditionnelle pour qu'une période quelconque commence dans l'état  $j$  si la période précédente a commencé dans l'état  $i$ . Utilisant les probabilités  $\pi_{jk}$  introduites en (6), et les probabilités conditionnelles  $\mathcal{P}(j|i)$ , on peut écrire :

$$(11) \quad Q(\text{in} : j/\text{in} : i) = \sum_k \pi_{kj} \mathcal{P}(k|i).$$

Les relations de normalisation (9) et :

$$(12) \quad \sum_j \pi_{kj} = 1$$

entraînent que :

$$(13) \quad \sum_j Q(\text{in} : j/\text{in} : i) = 1$$

et permettent de montrer que le système homogène (10) a une solution autre que la solution nulle, déterminée par la condition  $\sum_i \mathcal{P}(i) = 1$ . La démarche pour calculer les

$\mathcal{P}(i, j)$  est donc la suivante. La résolution de l'équation de Schrödinger associé à (3) donne les  $\mathcal{P}(j|i)$ , compte tenu de (8) et (4). On calcule ensuite, grâce à (11), (6) et (10), les  $\mathcal{P}(i)$ , ce qui donne, compte tenu de (7), les  $\mathcal{P}(i, j)$ .

Une autre quantité intéressante relative aux périodes  $(i, j)$  est leur durée moyenne  $T(i, j)$ , que l'on déduit aisément des probabilités conditionnelles  $W_{ij}(t)$  données en (5a).

$$(15) \quad T(i, j) = \frac{\int_0^\infty t W_{ij}(t) dt}{\int_0^\infty W_{ij}(t) dt} = \frac{G_j \int_0^\infty t |c_{ij}(t)|^2 dt}{\mathcal{P}(j|i)}.$$

On en déduit la durée moyenne  $T$  d'une période quelconque :

$$(16) \quad T = \sum_i \sum_j T(i, j) \mathcal{P}(i, j).$$

Notons que la définition des probabilités  $\mathcal{P}(i, j)$  donnée plus haut ne dépend que des indices  $i$  et  $j$  définissant la période  $(i, j)$  et ne préjuge en rien de la durée d'une telle

période. Connaissant les  $T(i, j)$ , on peut aussi calculer la probabilité  $\Pi(i, j)$  pour que, choisissant au hasard un instant quelconque  $t$  sur l'axe des temps, le système se trouve dans une période  $(i, j)$ . Les périodes longues sont alors favorisées et l'on a :

$$(17) \quad \Pi(i, j) = \frac{\mathcal{P}(i, j) T(i, j)}{\sum_i \sum_j \mathcal{P}(i, j) T(i, j)}$$

Il peut enfin être utile de connaître le vecteur d'état du système dans une période d'évolution cohérente ayant commencé à l'instant  $t_i$  dans l'état  $i$ . Comme on est sûr que le saut quantique de sortie ne s'est pas encore produit, le vecteur d'état est certainement contenu dans  $\mathcal{E}(N_1, N_2)$ , et les postulats de la mécanique quantique permettent d'écrire un tel vecteur d'état sous la forme :

$$(18) \quad |\psi(t_i + \tau)\rangle = \frac{\sum_k c_{ik}(\tau) |k\rangle}{\sqrt{\sum_k |c_{ik}(\tau)|^2}}$$

*En conclusion*, nous avons donné ci-dessus les éléments essentiels permettant de calculer les propriétés statistiques de la suite aléatoire de la figure 3. Nous montrerons, dans une Note suivante, comment une telle approche, appliquée au système de la figure 1, permet de comprendre physiquement comment le champ  $\omega_{L_1}$  peut être amplifié, même si le niveau inférieur  $g_1$  contient plus de la moitié de la population atomique totale.

Nous avons bénéficié de discussions très fructueuses avec J. Dalibard, et nous tenons à le remercier pour ses commentaires et ses suggestions.

Note remise le 23 mars 1992, acceptée le 14 avril 1992.

#### RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] C. COHEN-TANNOUJDI et J. DALIBARD, *Europhys. Lett.*, 1, 1986, p. 441.
- [2] P. ZOLLER, M. MARTE et D. F. WALLS, *Phys. Rev.*, A35, 1987, p. 198. Voir aussi R. DUM, P. ZOLLER et H. RITSCH, preprint octobre 1991.
- [3] C. COHEN-TANNOUJDI, F. BARDOU et A. ASPECT, in *Laser Spectroscopy X*, M. DUCLOY, E. GIACOBINO et G. CAMY éd., World Scientific, 1992.
- [4] J. DALIBARD, Y. CASTIN et K. MØLMER, *Phys. Rev. Lett.*, 68, 1992, p. 580.
- [5] H. J. CARMICHEL, in *U.L.B. Lectures in Nonlinear Optics*, Fall 1991, Rapport interne.
- [6] G. C. HEGERFELDT et T. S. WILSER, in *International Wigner Symposium*, Goslar, World Scientific, 1991.
- [7] N. GISIN, *Helvetica Physica Acta*, 62, 1989, p. 363 et *Phys. Rev. Lett.*, 52, 1984, p. 1657.
- [8] A. IMAMOGLU, J. E. FIELD et S. E. HARRIS, *Phys. Rev. Lett.*, 66, 1991, p. 1154.
- [9] Voir, par exemple, C. COHEN-TANNOUJDI, J. DUPONT-ROC et G. GRYNBERG, *Processus d'interaction entre photons et atomes*, InterEditions et Editions du C.N.R.S., Paris, 1988, Traduction anglaise : *Atom-Photon Interactions. Basic Processes and Applications*, Wiley, New York, 1992, Chap. III.

C. C.-T. : Collège de France et Laboratoire de Spectroscopie hertzienne de l'E.N.S.,  
associé au C.N.R.S. et à l'Université Paris-VI,  
24, rue Lhomond, 75231 Paris Cedex 05;

B. Z. et E. A. : Dipartimento di Fisica, Università di Pisa, I-56100, Italy.