

Atomes ultra-froids

D.E.A. de Physique Quantique

C. Cohen-Tannoudji, J. Dalibard, P. Desbiolles, D. Guéry-Odelin

Mars – Juin 2002

Introduction

Le refroidissement de gaz atomiques à des températures inférieures au millikelvin est un thème de recherche en plein essor depuis une quinzaine d'années. C'est également un outil très utilisé pour de nombreuses expériences de métrologie, d'optique et d'interférométrie atomiques, ou de physique moléculaire.

A la base de ce développement se trouve la possibilité de contrôler de manière très fine le mouvement des atomes avec de la lumière. Cette idée n'est *a priori* pas nouvelle. Kepler avait pressenti l'existence de la force de pression de radiation, pour expliquer l'orientation de la queue des comètes par rapport au soleil (figure 1). Plus près de nous, Einstein a fait jouer un rôle central aux échanges d'impulsion entre matière et lumière pour introduire les trois processus fondamentaux¹ : absorption, émission stimulée, et émission spontanée. Encore plus récemment Alfred Kastler a introduit, avec son effet *lumino-frigorique*², la possibilité qu'un champ lumineux puisse abaisser la température d'une vapeur atomique.

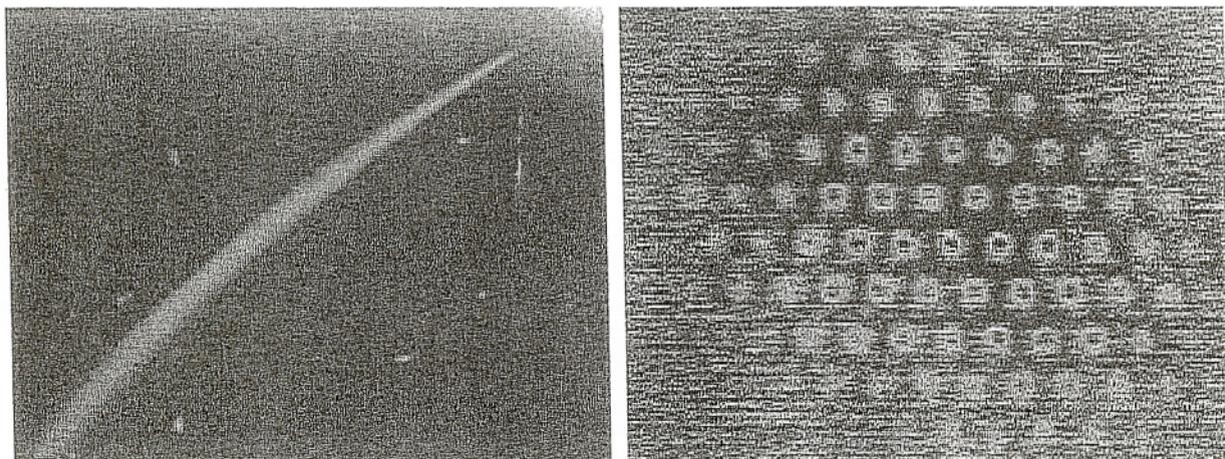


FIG. 1: Deux manifestations de l'action mécanique de la lumière sur des particules matérielles – pour la comète, l'explication n'est que partielle. Photo de gauche : <http://antwrp.gsfc.nasa.gov/apod/ap000225.html>; Photo de droite : D. Boiron, A. Michaud, J. M. Fournier, L. Simard, M. Sprenger, G. Grynberg, and C. Salomon, Phys. Rev. A 57, R4106 (1998).

Il a fallu néanmoins attendre l'avènement des lasers accordables pour voir apparaître des effets véritablement spectaculaires dans la manipulation d'atomes par de la lumière. La première partie de ce cours y sera consacrée, avec la présentation des principaux mécanismes de refroidis-

¹A. Einstein, Phys. Zeitschrift, vol XVIII, p. 121 (1917); on pourra consulter la traduction française dans *Albert Einstein, 1 : Quanta*, édité par F. Balibar, O. Darrigol, et B. Jech, (Seuil - CNRS, Paris).

²A. Kastler, J. Phys. Rad. 11, 255 (1950).

sement, Doppler, Sisyphé et sub-recul, ainsi que la description des moyens les plus performants pour piéger les particules refroidies (figure 1).

Nous aborderons ensuite une application essentielle des atomes froids, l'interférométrie atomique. L'apport des atomes froids dans ce domaine est clair. Si la vitesse des atomes diminue, leur longueur d'onde de De Broglie augmente, rendant ainsi les effets ondulatoires plus marqués. De plus, une vitesse plus basse permet d'allonger le temps de mesure, et donc d'accroître la précision de cette mesure.

En parallèle avec le refroidissement laser, une méthode complémentaire s'est récemment développée pour abaisser la température d'une assemblée atomique. Il s'agit du refroidissement évaporatif, qui au prix d'une perte conséquente de particules, permet de traiter de très nombreuses espèces atomiques ou moléculaires, même si on ne dispose pas de sources lumineuses pour les exciter de manière résonnante. Après avoir présenté les principes de ce refroidissement, nous consacrerons la dernière partie de ce cours à la description d'un succès majeur de la combinaison de ces diverses méthodes : l'observation de la condensation de Bose-Einstein.

Chapitre 1

Les forces radiatives sur un atome à deux niveaux

Ce premier chapitre est consacré à l'étude du mouvement d'un atome, modélisé par un système à deux niveaux, dans un champ lumineux monochromatique et quasi-résonnant. Le mouvement du centre de masse de l'atome est traité classiquement, et l'action de la lumière est décrite par une force fluctuante. La valeur moyenne de cette force se relie simplement aux gradients de phase et d'intensité de l'onde laser, correspondant respectivement à la *force de pression de radiation* et à la *force dipolaire*. Les fluctuations de cette force sont dues au caractère aléatoire des phénomènes d'émission spontanée.

Cette modélisation très sommaire de la transition atomique ne permet pas de rendre compte de l'ensemble des phénomènes observés dans le domaine du refroidissement et du piégeage laser. Néanmoins elle est suffisamment riche pour expliquer le mécanisme de refroidissement le plus simple, le refroidissement Doppler, et pour évaluer sa température limite. Les mécanismes de refroidissement plus sophistiqués, impliquant les gradients de polarisation de l'onde lumineuse et permettant de descendre sous la limite Doppler, voire la limite du recul d'un seul photon, seront étudiés dans les chapitres suivants.

1 L'interaction atome-lumière : les paramètres fondamentaux

1.1 L'atome à deux niveaux

Nous modélisons dans ce chapitre la structure interne atomique par une transition à deux niveaux f et e . Le niveau f est le niveau fondamental de l'atome, ou un niveau métastable de durée de vie bien plus grande que la durée de l'expérience considérée. Le niveau excité e est instable, et il peut se désexciter par émission spontanée vers le niveau f . La durée de vie du niveau e est notée Γ^{-1} , et l'écart en énergie entre f et e est noté $\hbar\omega_A$ (voir fig. 1).

L'atome est éclairé par un faisceau lumineux supposé monochromatique de fréquence $\omega_L/2\pi$. Pour que la modélisation de la transition atomique par un système à deux niveaux soit correcte, il faut que cette fréquence soit proche de la fréquence de résonance $\omega_A/2\pi$. Nous supposons donc dans tout ce chapitre que le désaccord $\delta = \omega_L - \omega_A$ vérifie $|\delta| \ll \omega_A, \omega_L$.

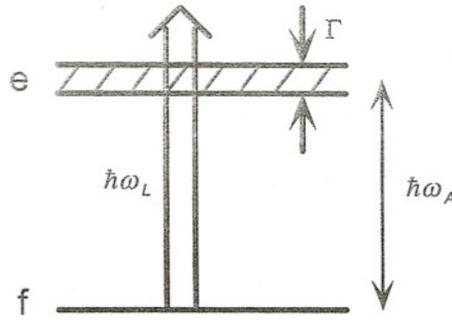


FIG. 1: Modélisation de la transition atomique par deux niveaux f et e .

Lorsque l'atome absorbe un photon issu de ce faisceau, son impulsion change de $\hbar k_L \simeq \hbar k_A$. Le changement de vitesse correspondant :

$$v_{\text{rec}} = \frac{\hbar k_A}{m} = \frac{h}{m\lambda_A}$$

est appelé vitesse de recul. Cette vitesse de recul varie de 3 m s^{-1} pour l'atome d'hydrogène, très léger, à $3,5 \text{ mm s}^{-1}$ pour l'atome de césium, beaucoup plus lourd ($A = 133$), ces deux atomes étant éclairés sur leur transition de résonance. Cette vitesse est beaucoup plus faible (par au moins quatre ordres de grandeur) que la vitesse d'agitation thermique des atomes à température ambiante.

1.2 Les systèmes en interaction

L'interaction entre l'atome et le champ électromagnétique est traitée à l'approximation dipolaire électrique. On introduit le dipôle réduit de la transition $e - f$:

$$\mathbf{d} = \langle e | \hat{\mathbf{D}} | f \rangle \quad \mathbf{d}^* = \langle f | \hat{\mathbf{D}} | e \rangle .$$

ce qui permet d'écrire l'opérateur dipole électrique sous la forme :

$$\hat{\mathbf{D}} = \mathbf{d} |e\rangle\langle f| + h.c. ,$$

où *h.c.* signifie *hermitique conjugué*.

On suppose que l'onde lumineuse laser est préparée dans un état quasi-classique (ou *cohérent*), ce qui permet, via une transformation unitaire¹, de la traiter comme un champ classique extérieur dépendant du temps :

$$\mathbf{E}_L(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \mathcal{E}_L(\mathbf{r}) \left(\boldsymbol{\epsilon}_L(\mathbf{r}) e^{-i\omega_L t - i\phi(\mathbf{r})} + \text{c.c.} \right) .$$

Après cette transformation unitaire, le champ électromagnétique quantifié est dans son état fondamental, c'est-à-dire le vide de photons (fig. 2). Son interaction avec l'atome est à l'origine du phénomène d'émission spontanée.

¹voir par exemple *Photons et Atomes, Processus d'interaction*, Chap. IV, C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc et G. Grynberg.

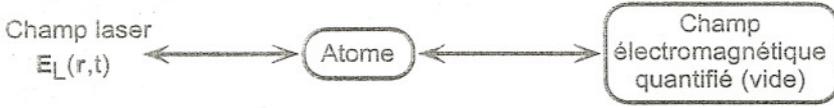


FIG. 2: Les trois systèmes en présence, l'onde lumineuse étant traitée comme un champ classique extérieur.

A l'approximation dipolaire électrique, l'hamiltonien du système est la somme de quatre termes :

$$\hat{H} = \hat{H}_A + \hat{H}_R + \hat{V}_{AL} + \hat{V}_{AR}$$

1. L'hamiltonien atomique \hat{H}_A inclut l'énergie cinétique du centre de masse de l'atome, ainsi que l'énergie interne dans le cadre du modèle à deux niveaux :

$$\hat{H}_A = \frac{\hat{P}^2}{2m} + \hbar\omega_A |e\rangle\langle e|$$

Les opérateurs \hat{P} et \hat{R} désignent l'impulsion et la position du centre de masse de l'atome.

2. L'hamiltonien du rayonnement s'écrit comme une somme sur les modes $\ell = (\mathbf{k}, \epsilon)$ du rayonnement quantifié :

$$\hat{H}_R = \sum_{\ell} \hbar\omega_{\ell} \hat{a}_{\ell}^{\dagger} \hat{a}_{\ell}$$

3. Le couplage atome-laser se met sous la forme :

$$V_{AL}(t) = -\hat{D} \cdot \mathbf{E}_L(\hat{R}, t) \quad (1.1)$$

$$\simeq \frac{\hbar\Omega_1(\hat{R})}{2} \left(|e\rangle\langle f| e^{-i\omega_L t - i\phi(\hat{R})} + h.c. \right) . \quad (1.2)$$

On a défini la *pulsation de Rabi* Ω_1 par :

$$\hbar\Omega_1(\mathbf{r}) = -(\mathbf{d} \cdot \epsilon_L(\mathbf{r})) \mathcal{E}_L(\mathbf{r}) , \quad (1.3)$$

et on a supposé cette pulsation de Rabi réelle (on peut toujours réintégrer une phase complexe dans la définition de $|e\rangle$). Notons que l'on a gardé seulement les termes quasi-résonnant dans le passage de (1.1) à (1.2).

4. L'opérateur champ électrique quantifié peut se décomposer sous la forme :

$$\hat{E}(\mathbf{r}) = \sum_{\ell} \mathcal{E}_{\ell} \epsilon_{\ell} \hat{a}_{\ell} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} + h.c. \quad \text{avec} \quad \mathcal{E}_{\ell} = i\sqrt{\frac{\hbar\omega_{\ell}}{2\epsilon_0 L^3}}$$

où L^3 est le volume choisi pour la décomposition en modes. Le couplage atome-rayonnement quantifié s'écrit :

$$V_{AR} = -\sum_{\ell} \mathcal{E}_{\ell} (\mathbf{d} \cdot \epsilon_{\ell}) \hat{a}_{\ell} e^{i\mathbf{k} \cdot \hat{R}} |e\rangle\langle f| + h.c.$$

où l'on a négligé ici aussi les termes non résonnants.

1.3 Les différentes échelles de temps du problème

Pour étudier la dynamique atomique, deux types de variable sont à prendre en compte. Les premières sont les variables internes, qui décrivent par exemple l'évolution de la population des états e et f du fait du couplage de l'atome avec le champ électromagnétique. Le second type de variables concerne la dynamique externe de l'atome, c'est-à-dire le mouvement de son centre de masse.

Pour un atome de position déterminée, l'évolution des variables internes est donnée par les équations de Bloch optiques, que nous étudierons en détail plus loin. Le point important pour le moment est de connaître les fréquences caractéristiques apparaissant dans ces équations. Ces dernières font intervenir la pulsation de Rabi Ω_1 , le désaccord δ , et la largeur naturelle de l'état excité Γ . En particulier, on peut montrer que le temps d'atteinte du régime stationnaire des équations de Bloch optiques, noté ici T_{int} , est toujours de l'ordre de Γ^{-1} , quelle que soit l'intensité du faisceau lumineux qui éclaire l'atome :

$$T_{\text{int}} \sim \Gamma^{-1} .$$

Pour déterminer le temps caractéristique d'évolution du mouvement externe, on peut chercher la durée nécessaire pour que ce mouvement change appréciablement. La condition correspondante est un peu floue à ce stade, mais on peut se fixer comme critère que le changement de vitesse Δv de l'atome doit être tel que la modification de l'effet Doppler dépasse la largeur naturelle Γ . Ainsi, un atome initialement en résonance avec la lumière se trouvera en dehors de résonance après ce temps. Si la vitesse atomique change de v_{rec} tous les intervalles de temps Γ^{-1} (temps moyen entre deux émissions spontanées de photons), le temps T_{ext} nécessaire pour avoir $k \Delta v \sim \Gamma$ est :

$$T_{\text{ext}} \sim \frac{m}{\hbar k_A^2} .$$

Pour la plupart des transitions atomiques de résonance, on constate que :

$$T_{\text{int}} \ll T_{\text{ext}} \iff \frac{m\Gamma}{\hbar k_A^2} \gg 1 . \quad (1.4)$$

Cette inégalité est appelée *condition de raie large*. Par exemple, pour l'atome de rubidium qui est très utilisé en pratique, on trouve $m = 1,45 \cdot 10^{-25} \text{kg}$, $\Gamma^{-1} = 27 \text{ ns}$, et $\lambda_A = 0,78 \mu\text{m}$, soit $m\Gamma/(\hbar k_A^2) = 790$. Cette condition va jouer un rôle simplificateur essentiel dans la suite, car elle va permettre de découpler la dynamique interne et la dynamique externe. On pourra considérer en pratique que la dynamique interne de l'atome est très rapide, et qu'elle s'ajuste presque instantanément au mouvement du centre de masse de l'atome dans le champ lumineux.

2 L'opérateur force et sa valeur moyenne

2.1 Réinterprétation de la condition de raie large

Dans ce paragraphe, nous souhaitons définir et calculer la force agissant sur un atome situé en un point R , la vitesse de cet atome étant V . Il s'agit bien sûr d'une approximation de nature classique. L'atome doit en fait être décrit par un paquet d'ondes, d'extension spatiale ΔR , et il résulte de cette localisation une incertitude sur son impulsion $\Delta P \sim \hbar/\Delta R$, soit une incertitude en vitesse $\Delta V \sim \hbar/(m \Delta R)$.

Pour que cette approximation classique ait un sens, il faut que deux conditions soient simultanément remplies :

- L'extension spatiale ΔR doit être petite devant le plus petit détail du champ lumineux, sinon on ne pourra parler de l'intensité ou de la phase au point où se trouve l'atome. On prend donc :

$$\Delta R \ll \lambda_L . \quad (1.5)$$

- La dispersion sur le déplacement Doppler $k_L \Delta V$ doit être plus petite que la largeur naturelle atomique, pour que la condition de résonance entre l'atome et la lumière soit la même pour toutes les composantes de la fonction d'onde atomique :

$$k_L \Delta V \ll \Gamma . \quad (1.6)$$

Pour que ces deux conditions soient compatibles entre elles, compte-tenu de la relation d'incertitude de Heisenberg, il faut que la condition de raie large (1.4) soit vérifiée. C'est ce que nous supposerons dans la suite de ce chapitre.

2.2 L'opérateur force

Plaçons-nous maintenant en point de vue de Heisenberg. Les équations du mouvement des opérateurs position et impulsion du centre de masse atomique sont données par :

$$\frac{d\hat{R}}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{R}, \hat{H}] = \frac{\hat{P}}{m} \quad (1.7)$$

$$\frac{d\hat{P}}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{P}, \hat{H}] = -\nabla \hat{V}_{AL}(t) - \nabla \hat{V}_{AR} = \hat{F} \quad (1.8)$$

La première ligne permet de retrouver au niveau quantique que la dérivée temporelle de la position est égale la quantité de mouvement divisée par la masse (en l'absence de potentiel vecteur). La seconde ligne constitue la définition de l'opérateur force. C'est elle qu'il s'agit maintenant de moyenner sur l'état atomique, aussi bien interne qu'externe, ainsi que sur l'état du rayonnement (le vide de photons $|0\rangle$).

2.3 Force moyenne en un point R

Si l'on moyenne les deux équations de Heisenberg pour la position et l'impulsion sur l'état atomique, on obtient :

$$\frac{dR}{dt} = \frac{P}{m} \quad F = \frac{dP}{dt} = -\langle \nabla \hat{V}_{AL}(t) \rangle - \langle \nabla \hat{V}_{AR} \rangle \quad (1.9)$$

On peut montrer que le second terme apparaissant dans l'expression de F est nul². Indiquons ici brièvement la démarche à suivre pour prouver ce résultat : on intègre formellement l'expression du champ électrique quantifié sous forme d'un champ quantique libre, qu'on aurait en l'absence d'atome, et du champ quantique rayonné par l'atome. Le champ rayonné a un gradient nul à l'emplacement même de l'atome : il ne contribue donc pas à l'opérateur force. L'opérateur force issu du champ quantique libre n'est quant à lui pas nul –il contribuera d'ailleurs au coefficient

²Pour une démonstration détaillée, on pourra consulter le cours de C. Cohen-Tannoudji dans *Les Houches 1990* (page 14-15, J. Dalibard, J.-M. Raimond, et J. Zinn-Justin eds., North-Holland).

3.2 Les deux composantes de la force moyenne

On reporte maintenant l'expression du dipole stationnaire dans l'expression (1.10) de la force moyenne. En utilisant l'expression (1.3) définissant la pulsation de Rabi, on peut mettre cette force sous la forme :

$$\mathbf{F}(\mathbf{R}) = -2\hbar (u_{st} \cos(\omega_L t + \phi(\mathbf{R})) - v_{st} \sin(\omega_L t + \phi(\mathbf{R}))) \nabla (\Omega_1(\mathbf{R}) \cos(\omega_L t + \phi(\mathbf{R}))) \quad (1.17)$$

ou encore

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{R}) &= -\hbar \Omega_1(\mathbf{R}) (\alpha(\mathbf{R}) u_{st} + \beta(\mathbf{R}) v_{st}) \\ &= -\hbar \left(\alpha(\mathbf{R}) \delta + \beta(\mathbf{R}) \frac{\Gamma}{2} \right) \frac{s(\mathbf{R})}{1 + s(\mathbf{R})} \end{aligned} \quad (1.18)$$

Dans cette dernière expression, on a introduit les vecteurs :

$$\alpha(\mathbf{R}) = \frac{\nabla \Omega_1(\mathbf{R})}{\Omega_1(\mathbf{R})} \quad \beta(\mathbf{R}) = \nabla \phi(\mathbf{R}) \quad (1.19)$$

et on a pris la moyenne temporelle de l'expression (1.17) sur une période du champ lumineux (ce qui est compatible avec l'approximation du champ tournant qui a été utilisée pour trouver la solution stationnaire des équations de Bloch optiques).

La force proportionnelle à α (i.e. au gradient d'intensité) et à la composante en phase du dipole est appelée *force réactive*. L'expression mathématique de cette force est du type $\nabla \Omega_1 \times \mathbf{F}_{\text{tion}}(\Omega_1)$, ce qui entraîne que cette force dérive d'un potentiel. La valeur explicite de ce potentiel, le *potentiel dipolaire*, sera donnée plus loin. La force proportionnelle à β , donc au gradient de phase de l'onde lumineuse, est appelée *force dissipative* ou *force de pression de radiation*.

3.3 La force de pression de radiation

Cette force dépend du gradient de phase de l'onde lumineuse. Pour évaluer ses caractéristiques, nous considérons le cas le plus simple possible : une onde plane progressive, correspondant à $\phi(\mathbf{R}) = -\mathbf{k}_L \cdot \mathbf{r}$, soit $\beta = -\mathbf{k}_L$. La force de pression de radiation s'écrit dans ce cas :

$$\mathbf{F}_{\text{PR}} = \hbar \mathbf{k}_L \Omega_1 v_{st} = \hbar \mathbf{k}_L \Gamma \sigma_{ee, st} \quad (1.20)$$

où la deuxième expression se déduit de (1.13) et de $w = \sigma_{ee} - 1/2$. Sous cette forme, l'expression de la force de pression de radiation a une interprétation très simple. La quantité $\Gamma \sigma_{ee, st}$ représente le taux moyen de cycles "absorption-émission spontanée". Chaque cycle transfère en moyenne l'impulsion $\hbar \mathbf{k}_L$ à l'atome : l'atome encaisse cette impulsion lors de chaque absorption, alors que l'impulsion atomique ne change pas en moyenne lors d'une émission spontanée. En effet l'émission spontanée se fait avec une probabilité égale dans deux directions opposées.

L'expression de la force de pression de radiation en fonction du paramètre de saturation est la suivante :

$$\mathbf{F}_{\text{PR}} = \frac{\hbar \mathbf{k}_L \Gamma}{2} \frac{s(\mathbf{R})}{1 + s(\mathbf{R})} \quad (1.21)$$

On voit sur cette expression que cette force est linéaire en intensité tant que la transition atomique n'est pas saturée, puis tend vers $\hbar \mathbf{k}_L \Gamma / 2$ à haute intensité. La dépendance en désaccord

est une courbe lorentzienne, centrée en $\delta = 0$, et de largeur totale à mi-hauteur $(\Gamma^2 + 2\Omega_L^2)^{1/2}$. Notons qu'il est relativement aisé de saturer une transition atomique avec les sources laser actuelles. Par exemple l'intensité de saturation I_{sat} , pour laquelle on a $s = 1$ pour $\delta = 0$, est égale à $1,6 \text{ mW/cm}^2$ pour l'atome de rubidium. Comme une diode laser fournit plusieurs dizaines de milliwatts, on peut saturer la transition avec un faisceau de plusieurs centimètres de diamètre.

Nous avons évalué l'expression générale de la force radiative (1.18) en supposant l'atome au repos. Dans le cas particulier d'une onde laser plane progressive, l'expression (1.21) est en fait valable même si l'atome est en mouvement à vitesse \mathbf{V} , pourvu qu'on remplace le désaccord δ par $\delta - \mathbf{k}_L \cdot \mathbf{V}$. La structure d'onde plane progressive est en effet conservée si on se place dans le référentiel au repos de l'atome⁴.

La force maximale $\hbar k_L \Gamma / 2$ correspond à une accélération $a_{\text{max}} = \hbar k_L \Gamma / (2m)$, c'est-à-dire un changement de vitesse v_{rec} tous les $2\Gamma^{-1}$. Pour le rubidium, cette accélération vaut $1,1 \cdot 10^5 \text{ ms}^{-2}$, soit 11 000 fois l'accélération de la pesanteur. La première mise en évidence de cette force de pression de radiation fut la déflexion de jets atomiques par Frisch en 1933 (expériences reprises en France dans les années 1970 par Picqué et Vialle). C'est dans les années 1980 que cette force fut utilisée pour ralentir un jet atomique, en particulier dans le groupe de Phillips au NBS Washington. La vitesse initiale V_0 des atomes du jet est de plusieurs centaines de mètres par seconde, ce qui correspond à une distance d'arrêt $V_0^2 / (2a_{\text{max}})$ de l'ordre du mètre.

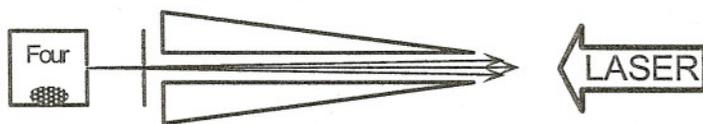


FIG. 3: Ralentissement d'un jet atomique de sodium par pression de radiation. La variation d'effet Doppler est compensée par un effet Zeeman inhomogène, créé par un solénoïde de même axe que le jet atomique. La figure expérimentale a été obtenue par W. Phillips et son équipe.

Arrêter un jet atomique au moyen de la force de pression de radiation n'est pas aussi simple qu'il y paraît : quand la vitesse des atomes diminue, la condition de résonance $\omega_L - \mathbf{k}_L \cdot \mathbf{V} = \omega_A$ n'est plus vérifiée, et l'efficacité du refroidissement chute puisque l'accélération devient petite devant a_{max} . Pour remédier à ce problème, deux solutions sont couramment utilisées en pratique :

1. La première (figure 3) consiste à faire le ralentissement à l'intérieur d'un solénoïde créant un champ magnétique inhomogène, tel que le déplacement Zeeman de la transition atomique en un point d'abscisse z soit tel que $\omega_L - k_L V(z) = \omega_A(z)$, avec $V^2(z) = V_0^2 - 2a_{\text{max}}z$. Dans une telle configuration, tous les atomes sortant du four à une vitesse inférieure à V_0 sont ralentis et s'arrêtent au point $z_0 = V_0^2 / (2a_{\text{max}})$.
2. La seconde méthode consiste à faire varier temporellement la fréquence $\omega_L(t)$ selon la loi linéaire $\omega_A + k_L V_0 - k_L a_{\text{max}} t$. Cette méthode est moins performante que la précédente, car un atome qui sort du four à la vitesse V_0 un peu après le démarrage de cette rampe ne

⁴En toute rigueur, il faudrait aussi changer l'impulsion des photons $\hbar k_L$ dans ce changement de référentiel. Néanmoins, pour des vitesses non relativistes, ce changement est négligeable.

sera quasiment pas ralenti avant la rampe suivante. Ceci allonge notablement la distance nécessaire pour arrêter tous les atomes sortant du four à une vitesse inférieure ou égale à V_0 . De plus les atomes ne s'arrêtent pas tous au même point de l'espace, ce qui rend moins efficace l'éventuel remplissage d'un piège atomique. Néanmoins cette technique est également très utilisée, car elle est notablement plus simple à mettre en œuvre que la précédente. Ainsi, avec des diodes laser, il suffit de moduler le courant de la diode pour obtenir le balayage en fréquence recherché. La figure (4) montre un exemple de résultat obtenu par cette méthode.

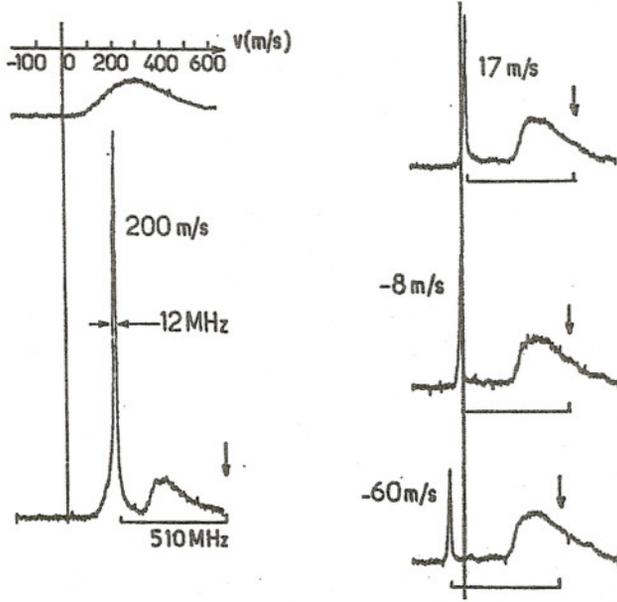


FIG. 4: Distribution en vitesses d'un jet atomique de césium ralenti par pression de radiation. La variation d'effet Doppler est compensée par une variation de la fréquence du laser ralentisseur. La flèche indique la classe de vitesse résonnante avec le faisceau lumineux au début de la rampe de fréquence, et le trait horizontal montre la plage de vitesses balayée par la fréquence laser. On peut ainsi arrêter les atomes, et même les faire partir en sens inverse (figures expérimentales obtenues par C. Salomon et J. Dalibard).

3.4 La force dipolaire

Si l'onde lumineuse est constituée par la superposition de plusieurs ondes planes progressives, l'atome peut absorber un photon k_1 dans une onde, et faire une émission stimulée d'un photon k_2 dans une autre onde. Aucune énergie n'est prise à l'onde lumineuse dans un tel processus, qui constitue une redistribution de photons entre les différentes composantes de cette onde. En revanche, l'impulsion de l'atome est changée par $\hbar(k_1 - k_2)$.

Ce processus de redistribution est à l'origine de la force réactive proportionnelle à $\alpha(\mathbf{R})$ qui apparaît dans (1.18). Cette force, également appelée *force dipolaire*, s'écrit d'une manière plus explicite :

$$F_{\text{dip}}(\mathbf{R}) = -\frac{\hbar\delta}{2} \frac{\nabla s(\mathbf{R})}{1 + s(\mathbf{R})}$$

et elle dérive donc du potentiel :

$$U_{\text{dip}}(\mathbf{R}) = \frac{\hbar\delta}{2} \ln(1 + s(\mathbf{R})) \quad (1.22)$$

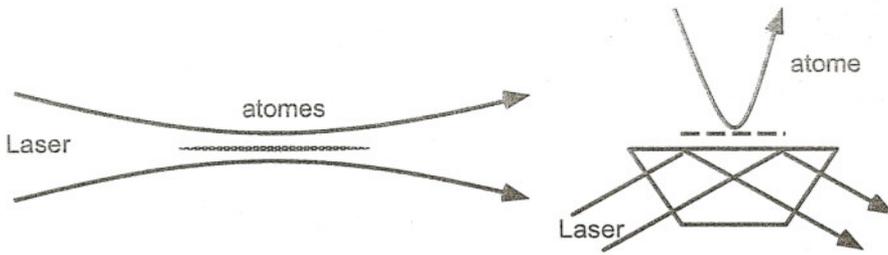


FIG. 5: Utilisation du potentiel dipolaire pour réaliser un piège atomique au foyer d'un faisceau laser ($\omega_L < \omega_A$), et un miroir à atomes ($\omega_L > \omega_A$) grâce à une onde évanescente.

Selon le signe du désaccord, ce potentiel attire ou repousse les atomes des régions de haute intensité lumineuse (figure 5). Avec un faisceau désaccordé sur le rouge de la transition atomique ($\delta < 0$), on peut réaliser un piège au foyer d'un faisceau lumineux. Avec un faisceau désaccordé sur le bleu au contraire formant une nappe de lumière, on peut réaliser un miroir à atomes. Nous reviendrons sur ces dispositifs lors de l'étude du piégeage atomique.

Pour un désaccord δ grand devant la largeur naturelle Γ , et pour une lumière non saturante ($s \ll 1$), l'expression du potentiel dipolaire se simplifie pour donner :

$$U_{\text{dip}}(\mathbf{R}) = \frac{\hbar\Omega_1^2(\mathbf{R})}{4\delta} \quad (1.23)$$

Cette forme particulièrement simple montre bien l'intérêt de ce potentiel. Si on augmente simultanément la puissance lumineuse P (proportionnelle à Ω_1^2) et le désaccord δ , on peut atteindre une situation où le taux d'émission spontanée $\Gamma\sigma_{ee\text{st}}$, proportionnel à P/δ^2 , est très faible, alors que le puits ou la barrière de potentiel dipolaire, proportionnel à I/δ , garde une valeur constante. On réalise alors véritablement un potentiel non dissipatif et non chauffant. En pratique, les puits et les barrières de potentiel qu'on peut obtenir dans ces conditions ont une profondeur ou une hauteur qui peut atteindre quelques millikelvins.

3.5 Le potentiel dipolaire retrouvé par le formalisme de l'atome habillé

On peut rendre compte simplement de la valeur du potentiel dipolaire en évaluant le *déplacement lumineux* de l'état fondamental dû au couplage de l'atome avec l'onde laser. Pour cela, considérons le formalisme de *l'atome habillé*. On revient à une description quantique du champ lumineux appliqué sur l'atome, et on s'intéresse aux niveaux d'énergie du système combiné "atome en \mathbf{R} + mode laser". En l'absence de couplage entre l'atome et le laser, les états propres de l'hamiltonien de ce système sont les niveaux $|e, n\rangle$, $|f, n\rangle$. Comme le désaccord δ est petit devant ω_A et ω_L , ces états propres sont groupés par multiplicités de dimension 2, l'écart entre les deux niveaux d'une même multiplicité étant $\hbar\delta$ et l'écart entre deux multiplicités adjacentes étant $\hbar\omega_L$ (figure 6).

L'interaction dipolaire électrique V_{AL} entre l'atome et les photons du laser induit un couplage entre les deux niveaux $|e, n-1\rangle$ et $|f, n\rangle$ d'une même multiplicité. Ce couplage est caractérisé par la pulsation de Rabi au point \mathbf{R} où se trouve l'atome :

$$\langle e, n-1 | V_{AL} | f, n \rangle = \langle f, n | V_{AL} | e, n-1 \rangle = \frac{\hbar\Omega_1(\mathbf{R})}{2}$$

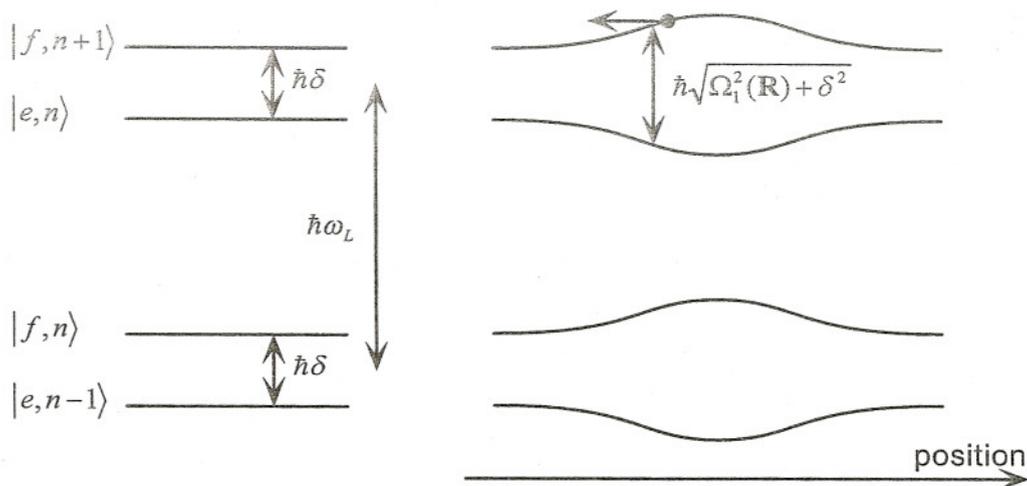


FIG. 6: Niveaux de l'atome habillé par les photons laser, pour $\omega_L > \omega_A$. A gauche, position des niveaux en l'absence de couplage. A droite, position des niveaux en présence d'un couplage dépendant de la position de l'atome. Pour $|\Omega_1| \ll \delta$, le potentiel dipolaire - répulsif pour $\delta > 0$ - s'interprète comme un déplacement des niveaux habillés $|f, n\rangle$, qui sont les états occupés majoritairement.

Si ce couplage est assez faible, on peut estimer son effet sur la position des niveaux d'énergie de l'atome habillé en utilisant la théorie des perturbations au deuxième ordre. En particulier le déplacement du niveau $|f, n\rangle$ est donné par :

$$\Delta E_{f,n} = \frac{(\hbar\Omega_1(\mathbf{R})/2)^2}{\hbar\delta} = \frac{\hbar\Omega_1^2(\mathbf{R})}{4\delta}.$$

On retrouve exactement le puits de potentiel dipolaire (1.23) calculé par les équations de Bloch optiques. On comprend également pourquoi un désaccord positif correspond à une répulsion des atomes par le laser (le déplacement lumineux de $|f, n\rangle$ est positif), alors qu'un désaccord négatif correspond à une attraction de l'atome par la lumière (déplacement de $|f, n\rangle$ négatif).

A plus haute intensité, quand Ω_1 devient de l'ordre ou supérieur à $|\delta|$, le traitement perturbatif du couplage atome-laser n'est plus valable, mais il est aisé de calculer exactement la position des niveaux habillés en diagonalisant la matrice 2×2 décrivant le couplage à l'intérieur de chaque multiplicité :

$$\begin{pmatrix} (n+1)\hbar\omega_L & \hbar\Omega_1(\mathbf{R})/2 \\ \hbar\Omega_1(\mathbf{R})/2 & \hbar\omega_A + n\hbar\omega_L \end{pmatrix} = E_n^{(0)} \text{Id} + \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \delta & \Omega_1(\mathbf{R}) \\ \Omega_1(\mathbf{R}) & \delta \end{pmatrix} \quad (1.24)$$

où $E_n^{(0)} = \hbar\omega_A/2 + (n+1/2)\hbar\omega_L$ désigne l'énergie centrale de la multiplicité. Les énergies propres sont :

$$E_n^{(\pm)}(\mathbf{R}) = E_n^{(0)} \pm \frac{\hbar}{2} \sqrt{\Omega_1^2(\mathbf{R}) + \delta^2}. \quad (1.25)$$

En pondérant la force $-\nabla E_n^{(\pm)}(\mathbf{R})$ vue par l'atome sur chacun des niveaux habillés par la population moyenne de ce niveau, on peut alors retrouver⁵ l'expression générale (1.22) du potentiel dipolaire (dans la limite $\Gamma \ll |\delta|$).

Remarque : Dans cette approche, le nombre de photons n dans le mode laser et le champ électrique associé à un photon $\sqrt{\hbar\omega_L/(2\epsilon_0 L^3)}$ (où L^3 est le volume de quantification) n'ont pas de signification

⁵J. Dalibard and C. Cohen-Tannoudji, J.O.S.A. B 2, 1707 (1985).

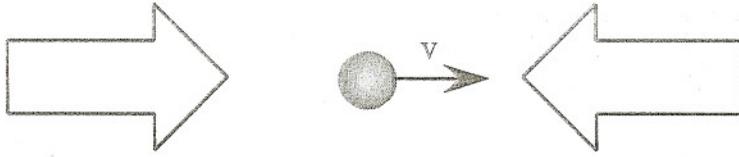


FIG. 7: Refroidissement Doppler à une dimension : un atome en mouvement le long de l'axe x est éclairé par deux ondes identiques, de faible intensité, et de fréquence $\omega_L < \omega_A$. La force radiative agissant sur l'atome est opposée à la vitesse atomique et joue le rôle d'un frottement visqueux (mélasse optique).

physique quand ils sont pris individuellement. Seul compte le produit n/L^3 , c'est-à-dire la densité d'énergie en un point donné, proportionnelle à Ω_1^2 , et les calculs qui précèdent doivent être compris mathématiquement comme une limite $n, L^3 \rightarrow \infty, n/L^3 = \text{Cte}$. C'est pourquoi nous avons négligé dans le calcul la variation en \sqrt{n} du couplage entre $|f, n\rangle$ et $|e, n-1\rangle$. En revanche cette variation devrait être prise en compte si l'expérience était menée dans une cavité réelle, où L^3 et n seraient alors deux quantités physiques mesurables⁶.

4 Le refroidissement Doppler

Disposant maintenant de l'expression de la force de pression de radiation, nous pouvons aborder la description du refroidissement Doppler tel qu'il a été suggéré en 1975 par Hänsch et Schawlow⁷.

4.1 Théorie perturbative

On éclaire un atome par deux ondes planes progressives de faible intensité, se propageant en sens contraire (vecteurs d'onde $\pm k_L$) le long d'un axe x (figure 7). Pour simplifier, on suppose que l'atome se déplace également le long de cet axe. Si l'intensité des ondes est suffisamment faible, on peut obtenir la force totale agissant sur l'atome en additionnant indépendamment les forces de pression de radiation F_{\pm} créées par chacune des ondes, si elle agissait seule. Le critère intuitif pour cette approximation, qui sera démontré rigoureusement dans le paragraphe suivant, est que chaque onde ne sature que très faiblement la transition atomique, quelle que soit la vitesse de l'atome : $\Omega_1 \ll \Gamma$, où Ω_1 est la fréquence de Rabi associée à chaque onde progressive.

Les forces F_{\pm} s'écrivent dans cette approximation :

$$F_{\pm}(V) = \pm \frac{\hbar k_L \Gamma}{2} s_{\pm}(V) \quad \text{avec} \quad s_{\pm}(V) = \frac{\Omega_1^2/2}{(\delta \mp k_L V)^2 + \Gamma^2/4}$$

et la force totale agissant sur l'atome vaut :

$$F(V) = \frac{\hbar k_L \Gamma}{2} (s_+(V) - s_-(V))$$

Cette force est représentée graphiquement sur la figure 8.

⁶Voir par exemple M. Brune, F. Schmidt-Kaler, A. Maali, J. Dreyer, E. Hagley, J. M. Raimond, and S. Haroche, Phys. Rev. Lett. **76**, 1800 (1996).

⁷T.W. Hänsch and A.L. Schawlow, Opt. Commun. **13**, 68 (1975). Une idée similaire adaptée aux ions piégés fut proposée la même année et indépendamment par D. Wineland and H. Dehmelt, Bull. Am. Phys. Soc. **20**, 637 (1975).

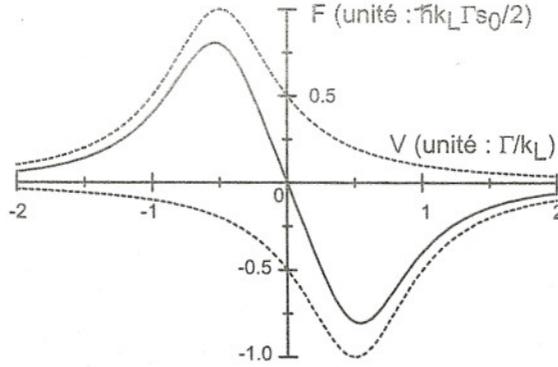


FIG. 8: Trait continu : somme des deux forces de pression de radiation agissant sur un atome en mouvement dans une mélasse optique, en fonction de la vitesse atomique. Traits pointillés : forces créées par chacune des deux onde planes progressives. Le désaccord est $\delta = -\Gamma/2$.

Supposons maintenant que la vitesse atomique soit suffisamment faible pour que le déplacement Doppler $k_L V$ soit petit devant la largeur Γ de la résonance atomique. On peut alors linéariser l'expression précédente pour obtenir :

$$F(V) = -m\gamma V \quad \text{avec} \quad \gamma = \frac{\hbar k_L^2}{m} s_0 \frac{-2\delta\Gamma}{\delta^2 + \Gamma^2/4}, \quad s_0 = \frac{\Omega_1^2/2}{\delta^2 + \Gamma^2/4} \quad (1.26)$$

On obtient donc une force de friction si on choisit un désaccord négatif, c'est-à-dire $\omega_L < \omega_A$.

L'interprétation de cette force de frottement visqueux est simple. Pour un atome au repos, les deux pressions de radiation $\hbar k_L \Gamma s_0/2$ s'équilibrent et l'atome ne ressent aucune force moyenne. Pour un atome en mouvement lent, l'onde venant à sa rencontre est "vue" avec une fréquence $\omega_L + k_L V$, rapprochée de résonance. Au contraire, l'onde allant dans le même sens que l'atome a une fréquence apparente $\omega_L - k_L V$ éloignée de résonance par rapport à ω_L . L'équilibre entre les deux forces de pression de radiation est donc rompu, au profit de l'onde se propageant en sens contraire à l'atome.

Le temps typique d'amortissement de la vitesse atomique se déduit de l'équation fondamentale de la dynamique $m\dot{V} = -m\gamma V$, soit $V(t) = V(0) \exp(-t/\tau)$ avec :

$$\tau = \frac{m}{\hbar k_L^2} \frac{1}{s_0} \frac{\delta^2 + \Gamma^2/4}{2|\delta|\Gamma} \quad (1.27)$$

Ce temps est d'autant plus court que les intensité des ondes est grande. Notons néanmoins qu'il faut maintenir $s_0 \ll 1$ pour que l'addition des deux pressions de radiation soit valable. Prenons par exemple $\delta = -\Gamma/2$ (ce choix se justifiera plus loin) et $s_0 = 1/10$. On a alors $\tau = 5m/(\hbar k_L^2)$, et on retrouve bien le temps d'évolution caractéristique des variables externes. Pour des atomes de rubidium, on obtient $5m/(\hbar k_L^2) \sim 100 \mu\text{s}$. Ce temps est court, ce qui signifie que l'atome est véritablement englué dans ce bain visqueux de photons, qu'on appelle une mélasse optique.

Le traitement qui précède se généralise sans difficulté à deux et trois dimensions. Pour un atome éclairé par trois paires d'ondes d'axe x, y, z , la force résultante s'écrit $\mathbf{F}(\mathbf{V}) = -m\gamma\mathbf{V}$, où l'expression de γ est inchangée par rapport à (1.26), s_0 désignant le paramètre de saturation de chacune des six ondes.

Cette force de *friction Doppler* est à la base de très nombreuses expériences, même si on

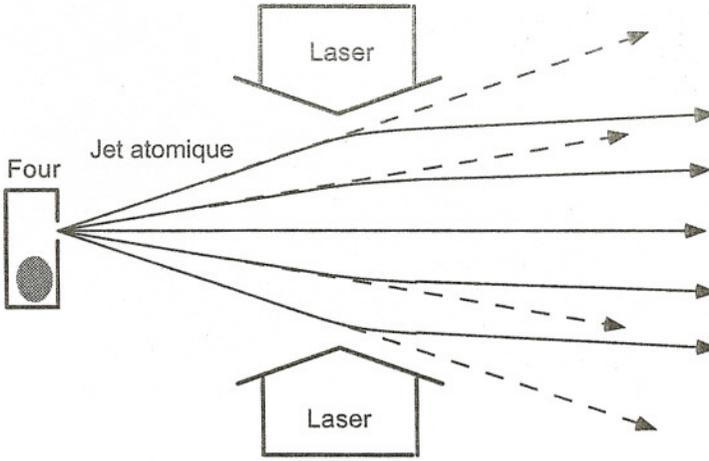


FIG. 9: Collimation d'un jet atomique par refroidissement des vitesses transversales. Le gain en brillance sur l'axe peut atteindre en pratique deux ordres de grandeur.

sait depuis 1988 que ce n'est pas le seul mécanisme de refroidissement qui prend place dans les mélasses optiques :

1. A une ou deux dimensions, une des applications majeures du refroidissement Doppler est la collimation de jets atomiques (figure 9). Elle s'obtient en disposant une ou deux paires d'ondes perpendiculaires à la direction du jet d'atomes. Ceci refroidit les vitesses transversales et augmente considérablement le flux d'atomes sur l'axe du jet (voir figure 9). Ainsi, pour un jet de rubidium se propageant à la vitesse longitudinale moyenne de $v_z = 300$ m/s, une zone d'interaction de 6 cm correspond à une durée de refroidissement de l'ordre de 2τ . Ceci suffit à concentrer tous les atomes de vitesse transverse V_{\perp} telle que $kV_{\perp} \leq \Gamma/2$ (soit $V_{\perp} \leq 2,3$ m/s) dans un pic de largeur $\sim 0,3$ m/s. Le gain en *brillance* sur l'axe du jet est alors de l'ordre de 50.
2. A trois dimensions, les mélasses optiques sont un outil quasi-incontournable pour refroidir une assemblée atomique avant de la piéger ou de l'envoyer dans une fontaine atomique. Le refroidissement Doppler joue un rôle essentiel dans ces mélasses pour capturer et refroidir les atomes de vitesse relativement importante $kV \sim \Gamma$. Aux vitesses plus basses, d'autres mécanismes de refroidissement prennent le relais, au moins pour les atomes ayant un niveau fondamental dégénéré; ces mécanismes feront l'objet du prochain chapitre. La première mélasse optique tri-dimensionnelle a été observée en 1985 aux Bell Labs, dans l'équipe de Chu et Ashkin⁸, à une période où seul le refroidissement Doppler avait été prévu (figure 10).

4.2 La force agissant sur un atome en mouvement lent

Dans le cadre du traitement semi-classique, on peut calculer exactement la force agissant sur un atome se trouvant à l'instant t au point \mathbf{R} avec la vitesse \mathbf{V} . Il faut pour cela résoudre le système (1.13) pour le mouvement rectiligne uniforme imposé $\mathbf{R}(t') = \mathbf{R} + (t' - t)\mathbf{V}$. En général, cette résolution ne peut se faire que numériquement, mais il est possible d'obtenir un résultat analytique si on se limite aux termes d'ordre 1 en vitesse.

⁸S. Chu, L. Hollberg, J. Bjorkholm, A. Cable, and A. Ashkin, Phys. Rev. Lett. 55, 48 (1985).

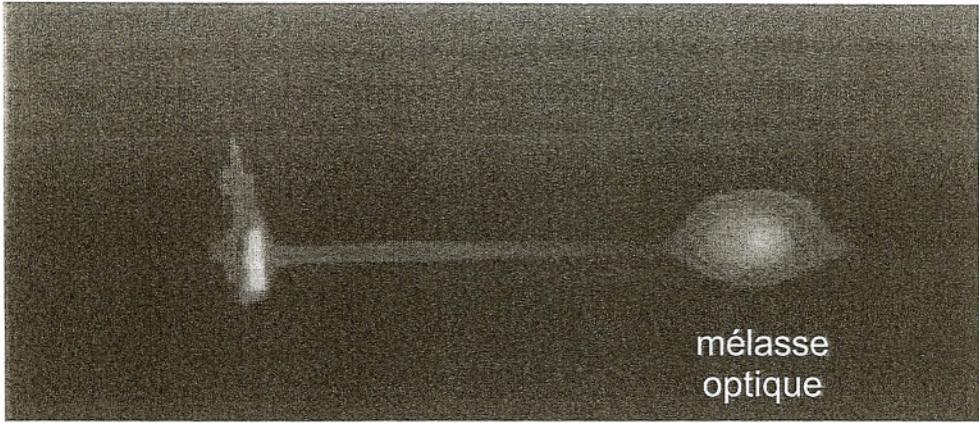


FIG. 10: Mélasse optique de sodium, contenant environ un million d'atomes. Les atomes sont émis par un bloc de sodium métallique chauffé par une impulsion de laser YAG. Ils sont ensuite ralentis par un faisceau laser, puis "capturés" à l'intersection de trois paires d'ondes stationnaires de diamètre de l'ordre du centimètre (photo prise en 1985 et extraite de S. Chu, *Rev. Mod. Phys.* **70**, 685 (1998)).

Pour présenter simplement le principe de cette résolution, commencer par remarquer que le système (1.13) est simplement la version matricielle d'une équation différentielle du type :

$$\frac{du}{dt} = -\Gamma(u - u_{\text{st}}(\mathbf{R})) . \quad (1.28)$$

Nous allons raisonner sur cette équation, la démarche se transposant ensuite au cas d'un système d'équations linéaires (au prix de quelques efforts...). Cette procédure s'applique dans de nombreuses situations, pour lesquelles on a une variable rapide (ici u) qui suit presque adiabatiquement l'évolution d'une variable plus lente (ici \mathbf{R}).

Pour un atome immobile en \mathbf{R} , la fonction $u(t)$ atteint son régime stationnaire $u_{\text{st}}(\mathbf{R})$ avec la constante de temps caractéristique Γ^{-1} . Si \mathbf{R} dépend du temps, on peut intégrer formellement (1.28) pour trouver :

$$u(t) = u(t_i)e^{-\Gamma(t-t_i)} + \Gamma \int_{t_i}^t dt' e^{-\Gamma(t-t')} u_{\text{st}}(\mathbf{R}(t'))$$

soit, en repoussant l'instant initial t_i loin dans le passé :

$$u(t) = \Gamma \int_{-\infty}^t dt' e^{-\Gamma(t-t')} u_{\text{st}}(\mathbf{R}(t')) \quad (1.29)$$

C'est ici qu'intervient la séparation des échelles de temps du mouvement interne et du mouvement externe. Si l'atome bouge suffisamment lentement, on peut développer $\mathbf{R}(t')$ au voisinage de $t' = t$:

$$\mathbf{R}(t') \simeq \mathbf{R} + (t' - t)\mathbf{V} \quad \Rightarrow \quad u_{\text{st}}(\mathbf{R}(t')) \simeq u_{\text{st}}(\mathbf{R}) + (t' - t)(\mathbf{V} \cdot \nabla) u_{\text{st}}(\mathbf{R})$$

On reporte cette expression dans (1.29) que l'on peut maintenant intégrer explicitement, ce qui donne :

$$u(t) \simeq u_{\text{st}}(\mathbf{R}) - \frac{1}{\Gamma} (\mathbf{V} \cdot \nabla) u_{\text{st}}(\mathbf{R})$$

ou encore

$$u(t) \simeq u_{\text{st}}(\mathbf{R} - \mathbf{V}\Gamma^{-1})$$

La signification physique de cette expression est simple : du fait du mouvement de l'atome, la valeur de la fonction $u(t)$ n'est pas exactement la valeur stationnaire de cette fonction au point \mathbf{R} , mais une valeur légèrement retardée, c'est-à-dire la valeur stationnaire au point $\mathbf{R} - \mathbf{V}\Gamma^{-1}$. En d'autres termes, la variable rapide $u(t)$ suit *presque* adiabatiquement la variable lente $\mathbf{R}(t)$ mais pas *exactement*. La condition de validité (intuitive...) pour que ce développement en puissances de \mathbf{V} soit correct est que le terme d'ordre 1 soit petit devant le terme d'ordre 0. Comme le gradient de u_{st} est au plus de l'ordre de $k_L u_{\text{st}}$, cette condition s'écrit $k_L V \ll \Gamma$. C'est la même condition que celle qui nous avait permis de linéariser la dépendance en vitesse de la force de pression de radiation dans le paragraphe précédent.

En dupliquant cette démarche au cas du système (1.13), le terme d'ordre 1 en vitesse dans l'expression de la i -ème composante de la force s'écrit $-m \sum_j \gamma_{ij} V_j$, et le tenseur de friction vaut :

$$\begin{aligned}
 m \gamma_{ij}(\mathbf{R}) = & - \hbar \alpha_i \alpha_j \frac{\delta}{\Gamma} \frac{s}{(1+s)^3} \left(\frac{\Gamma^2}{\delta^2 + \Gamma^2/4} (1-s) - 2s^2 \right) \\
 & - \hbar \alpha_i \beta_j \frac{s}{(1+s)^2} \left(\frac{\delta^2 - \Gamma^2/4}{\delta^2 + \Gamma^2/4} - s \right) \\
 & + \hbar \beta_i \alpha_j \frac{s}{(1+s)^3} \left(1 + (s-1) \frac{\Gamma^2/2}{\delta^2 + \Gamma^2/4} \right) \\
 & - \hbar \beta_i \beta_j \frac{s}{(1+s)^2} \frac{\delta \Gamma}{\delta^2 + \Gamma^2/4}
 \end{aligned} \tag{1.30}$$

où l'on a omis la dépendance en \mathbf{R} des vecteurs α et β (eq. 1.19), et du paramètre de saturation s . Cette expression remarquablement simple est, comme le lecteur s'en doute, d'un usage quotidien quand on travaille avec des atomes froids.

4.3 La force agissant sur un atome dans une onde stationnaire

Disposant de l'expression générale du coefficient de friction (1.30), nous pouvons reprendre le problème du mouvement d'un atome dans le champ lumineux créé par les deux ondes progressives de la figure 7. Ceci va nous permettre de vérifier les conditions de validité de l'approximation qui consiste à ajouter de manière indépendante les deux forces de pression de radiation.

Le champ lumineux qui résulte de la superposition des deux ondes progressives est une onde stationnaire, pour laquelle on trouve :

$$\alpha(X) = -k_L \tan(k_L X) \quad \beta(X) = 0 \quad s(X) = \frac{2\Omega_1^2 \cos^2(k_L X)}{\delta^2 + \Gamma^2/4} = 4s_0 \cos^2(k_L X), \tag{1.31}$$

où Ω_1 et s_0 désignent (comme auparavant) la fréquence de Rabi et le paramètre de saturation de chacune des ondes progressives. En reportant ces valeurs dans l'expression du tenseur de friction, on trouve pour $\gamma_{xx}(\mathbf{R}) \equiv \gamma(X)$ en se limitant aux termes d'ordre 1 en paramètre de saturation :

$$\gamma(X) = 2 \sin^2(k_L X) \frac{\hbar k_L^2}{m} s_0 \frac{-2\delta\Gamma}{\delta^2 + \Gamma^2/4}$$

En moyennant ce coefficient sur une période optique (longueur λ_L), on obtient de nouveau l'expression (1.26).

A plus haute intensité, le coefficient de friction dans cette configuration varie de manière *a priori* surprenante. On constate que le coefficient de $\alpha_i \alpha_j$ dans (1.30) peut changer de signe si s devient suffisamment grand, en particulier si le désaccord δ est choisi grand devant Γ . Pour une onde stationnaire de haute intensité⁹, il faut prendre $\omega_L > \omega_A$ pour refroidir les atomes ! Ce phénomène, qui a été observé expérimentalement¹⁰, ne peut s'expliquer simplement que par le formalisme de l'atome habillé¹¹. Il résulte du fait que, à haute intensité, les processus de gain d'impulsion par redistribution de photons entre les deux ondes laser sont plus importants pour l'atome que les forces de pression de radiation individuelles.

5 La diffusion en impulsion

5.1 Le coefficient de diffusion pour un atome au repos

Jusqu'ici, nous avons considéré seulement la valeur moyenne de l'opérateur force, qui donne le changement moyen de l'impulsion atomique pendant un intervalle de temps donné. Dans de nombreuses situations expérimentales, en particulier celles visant à refroidir des atomes avec de la lumière, ce calcul de valeurs moyennes n'est pas suffisant : il faut également évaluer la fluctuation de l'impulsion transférée aux atomes pour déterminer l'état stationnaire du mouvement atomique. Ce calcul se fait selon un principe identique à celui du mouvement Brownien. Les fluctuations de la force par rapport à sa valeur moyenne sont responsables d'une croissance de la variance de l'impulsion atomique linéaire avec le temps : $\Delta P^2 = 2D_p t$. Le coefficient de diffusion en impulsion D_p se relie à la partie fluctuante $\delta \hat{F}$ de l'opérateur force :

$$D_p = \mathcal{R}e \int_0^\infty d\tau \langle \delta \hat{F}(t) \cdot \delta \hat{F}(t - \tau) \rangle \quad \text{avec} \quad \delta \hat{F}(t) = \hat{F}(t) - \langle \hat{F}(t) \rangle = \hat{F}(t) - F(t)$$

Le calcul complet de D_p est relativement complexe et sort du cadre de ce cours. Indiquons ici les grandes lignes de ce calcul pour un atome au repos au point R . Rappelons d'abord que l'opérateur force a deux composantes, l'une liée au gradient de l'opérateur champ quantique, et l'autre au gradient du champ laser. Pour la valeur moyenne de la force, seul le second terme contribue, comme nous l'avons indiqué plus haut. Pour la fonction de corrélation intervenant dans D_p , les deux termes sont à prendre en compte :

1. Le calcul de la contribution du champ quantique est relativement simple (voir TD). Le résultat est :

$$D_p \text{ vide} = \frac{1}{2} \hbar^2 k_L^2 \Gamma \sigma_{ee \text{ st}} . \quad (1.32)$$

L'interprétation de ce résultat est simple. On sait que la quantité $\Gamma \sigma_{ee \text{ st}}$ représente le nombre moyen de photons spontanés émis par unité de temps. Comme chaque photon a une impulsion $\hbar k_L$ et est émis dans une direction aléatoire, le recul dû à ces émissions crée

⁹Un calcul exact est possible dans ce cas quelle que soit la vitesse atomique, en utilisant la méthode des fractions continues pour trouver le régime forcé du système 1.13 : V. G. Minogin and O.T. Serimaa, Opt. Commun. **30**, 373 (1979).

¹⁰A. Aspect, J. Dalibard, A. Heidmann, C. Salomon, C. Cohen-Tannoudji, Phys. Rev. Lett. **57** (1986) p.1688 : *Cooling atoms with stimulated emission*.

¹¹J. Dalibard, C. Cohen-Tannoudji, J.O.S.A. B **2** (1985) p.1707 : *Dressed-atom approach to atomic motion in laser light : the dipole force revisited*.

une marche au hasard de l'impulsion atomique de pas $\hbar k_L$ et de taux $\Gamma \sigma_{ee}$ st :

$$\Delta P \Big|_{\text{em.spont.}} (t) = \sum_{n=1}^{\mathcal{N}} \hbar k_n \quad \text{avec} \quad \mathcal{N} = \Gamma \sigma_{ee} \text{ st } t .$$

La moyenne du carré de cette expression sur les directions d'émission (avec $\overline{k_n \cdot k_m} = \delta_{n,m} k_L^2$) redonne le coefficient de diffusion (1.32) qui peut encore s'écrire :

$$D_{p \text{ vide}} = \frac{1}{4} \hbar^2 k_L^2 \Gamma \frac{s}{1+s} . \quad (1.33)$$

2. Le calcul de la contribution du champ laser est plus délicat. Il nécessite le calcul de fonctions de corrélation du dipole atomique comme $\langle u(t)v(t') \rangle$, qui se font par l'intermédiaire du théorème de *régression quantique*¹². Indiquons ici le résultat¹³ :

$$\begin{aligned} D_{p \text{ laser}} &= \hbar^2 \alpha^2 \frac{\Gamma}{4} \frac{s}{(1+s)^3} \left(1 + \frac{3\Gamma^2 - 4\delta^2}{\Gamma^2 + 4\delta^2} + 3s^2 + \frac{4\delta^2 + \Gamma^2}{\Gamma^2} s^3 \right) \\ &- \hbar^2 \alpha \cdot \beta \delta \frac{s^2}{(1+s)^3} \left(\frac{4\Gamma^2}{\Gamma^2 + 4\delta^2} + s \right) \\ &+ \hbar^2 \beta^2 \frac{\Gamma}{4} \frac{s}{(1+s)^3} \left(1 + \frac{12\delta^2 - \Gamma^2}{\Gamma^2 + 4\delta^2} s + s^2 \right) \end{aligned} \quad (1.34)$$

dont la transparence et la simplicité rappellent celles de (1.30).

Notons qu'il n'y a pas de contribution des termes croisés faisant intervenir à la fois le gradient du champ quantique et celui du champ laser.

5.2 Le coefficient de diffusion dans une onde stationnaire de faible intensité

Reprenons maintenant la situation de la figure 7, correspondant aux paramètres (1.31). En ne considérant que les termes d'ordre 1 en paramètre de saturation, l'expression générale du coefficient de diffusion se simplifie pour donner

$$D_{p \text{ vide}} = \hbar^2 k_L^2 \Gamma s_0 \cos^2(k_L X) \quad D_{p \text{ laser}} = \hbar^2 k_L^2 \Gamma s_0 \sin^2(k_L X) . \quad (1.35)$$

Après moyenne sur une longueur d'onde, ces deux termes sont égaux, le coefficient de diffusion total valant :

$$\text{mélasse 1D :} \quad D_p = \hbar^2 k_L^2 \Gamma s_0 . \quad (1.36)$$

Nous avons donné plus haut l'interprétation de $D_{p \text{ vide}}$. Dans cette limite basse intensité, il est simple d'expliquer également la valeur moyenne spatiale de $D_{p \text{ laser}}$. Après un temps t un atome initialement au repos a effectué en moyenne $\mathcal{N} = \Gamma s_0 t$ cycles de fluorescence, correspondant à l'absorption de $\mathcal{N}_\pm = \mathcal{N}/2$ photons en moyenne dans chacune des deux ondes planes progressives. Les fluctuations de $\mathcal{N}_+ - \mathcal{N}_-$ créent une source de fluctuation de l'impulsion qui vient s'ajouter à celle liée aux photons de fluorescence. A basse intensité, les variables \mathcal{N}_+ et \mathcal{N}_- sont des variables aléatoires poissoniennes décorrélatées, et on a donc :

$$\Delta^2(\mathcal{N}_+ - \mathcal{N}_-) = \langle \mathcal{N}_+ + \mathcal{N}_- \rangle = \Gamma s_0 t \quad \text{soit} \quad \frac{\Delta^2 p \Big|_{\text{laser}}}{t} = \frac{\hbar^2 k_L^2 \Delta^2(\mathcal{N}_+ - \mathcal{N}_-)}{t} = \hbar^2 k_L^2 \Gamma s_0$$

Le coefficient de diffusion en impulsion correspondant est donc $\hbar^2 k_L^2 \Gamma s_0 / 2$.

¹²Voir par exemple *Processus d'interaction entre photons et atomes*, p. 369, C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc et G. Grynberg.

¹³J.P. Gordon and A. Ashkin, *Phys. Rev. A* **21**, 1606 (1980).

Remarque : On pourra chercher à interpréter le fait que le coefficient de diffusion D_p laser donné en (1.35) est non nul en un point tel que $K_L x = \pi/2$, où l'intensité de l'onde stationnaire s'annule.

Dans la configuration d'une mélasse optique tridimensionnelle, le coefficient de diffusion (*i.e.* la trace du tenseur de diffusion) est trois fois plus grand qu'à une dimension :

$$\text{mélasse 3D :} \quad D_p = 3 \hbar^2 k_L^2 \Gamma s_0 . \quad (1.37)$$

où s_0 désigne le paramètre de saturation de chacune des six ondes progressives ($s_0 \ll 1$). Plus précisément, en raison de la symétrie du problème, le tenseur de diffusion est diagonal et on a $D_{p\,xx} = D_{p\,yy} = D_{p\,zz} = D_p/3$.

5.3 La limite du refroidissement Doppler (3D)

Disposant maintenant de l'expression du coefficient de diffusion en impulsion et du coefficient de friction, nous pouvons déterminer la limite du refroidissement Doppler et préciser les paramètres expérimentaux conduisant à la température minimale. Pour cela, il suffit d'appliquer le traitement habituel du mouvement brownien, qui prouve que la moyenne du carré de l'impulsion d'un atome obéit à l'équation :

$$\frac{dP^2}{dt} = -2\gamma P^2 + 2D_p .$$

La compétition entre le terme de refroidissement Doppler et le chauffage lié aux fluctuations des forces radiatives conduit à l'énergie cinétique moyenne à l'équilibre :

$$\left. \frac{P^2}{2m} \right|_{\text{eq.}} = \frac{D_p}{2m\gamma}$$

On peut associer une température à cette énergie d'équilibre en définissant par analogie avec la distribution de Maxwell-Boltzmann $P^2/(2m) = (3/2) k_B T$. On trouve alors :

$$k_B T = \frac{D_p}{3m\gamma} = \frac{\hbar\Gamma}{4} \left(\frac{2|\delta|}{\Gamma} + \frac{\Gamma}{2|\delta|} \right) , \quad (1.38)$$

où on a utilisé les expressions (1.26) et (1.37) des coefficients de friction et de diffusion. Cette température est indépendante de la puissance des ondes lumineuses. En effet, le coefficient de diffusion et le coefficient de friction sont tous deux proportionnels à l'intensité lumineuse.

La température minimale que l'on peut obtenir par refroidissement Doppler est obtenue pour $\delta = -\Gamma/2$ et elle vaut :

$$k_B T_{\min} = \frac{\hbar\Gamma}{2} . \quad (1.39)$$

Pour l'atome de rubidium, pour lequel $\Gamma^{-1} = 27$ ns, cette température est de l'ordre de 140 μK .

À partir de cette température minimale, on peut vérifier la cohérence de l'approche théorique que nous avons suivie. Nous sommes partis d'un développement de faible vitesse ($k_L V \ll \Gamma$) et nous arrivons à une vitesse quadratique moyenne $\bar{V} = \sqrt{\hbar\Gamma/m}$ (de l'ordre de 12 cm/s pour le rubidium). Une condition nécessaire de cohérence est donc :

$$\frac{k_L \bar{V}}{\Gamma} = \sqrt{\frac{\hbar k_L^2}{m\Gamma}} \ll 1 .$$

Nous retrouvons une fois de plus la condition de raie large.

Une deuxième vérification nécessaire consiste à comparer l'énergie cinétique finale des atomes ($\sim \hbar\Gamma$) à la profondeur des puits de potentiel dipolaire, qui résultent de la figure d'interférence entre les ondes progressives constituant la mélasse optique. En utilisant l'expression générale du potentiel dipolaire (1.22) et le paramètre de saturation donné en (1.31), on obtient pour une mélasse à une dimension $U_{\text{dip}}(X) = \hbar\Gamma s_0 \cos^2(k_L X)$ (on a pris $\delta = -\Gamma/2$). Pour $s_0 \ll 1$, cette profondeur est effectivement très faible devant $k_B T$, et l'action de la force dipolaire peut être négligée.

La théorie du refroidissement Doppler est bien vérifiée expérimentalement quand on travaille avec des atomes pour lesquels l'approximation d'un système à deux niveaux est valable. C'est le cas pour les atomes alcalino-terreux, comme le magnésium ou le calcium, pour lesquels la transition de résonance est une transition $J_f = 0 \leftrightarrow J_e = 1$. C'est également le cas pour des atomes alcalins, si on utilise une mélasse à une dimension sans gradient de polarisation. En revanche, on obtient pour ces atomes alcalins (lithium, sodium, rubidium, césium) des températures anormalement basses dans les mélasses à trois dimensions. Celles-ci résultent de l'action des gradients de polarisation de l'onde lumineuse sur le niveau fondamental atomique qui est dégénéré, et feront l'objet du prochain chapitre.

Remarque : On souhaite parfois caractériser l'état atomique de manière plus complète que simplement par son énergie moyenne. Rappelons que la théorie du mouvement brownien permet de déterminer l'évolution temporelle de la distribution des impulsions atomiques $f(\mathbf{P}, t)$. Celle-ci obéit à l'équation de Fokker-Planck :

$$\frac{\partial f(\mathbf{P}, t)}{\partial t} = \gamma \nabla_{\mathbf{P}} \cdot (\mathbf{P} f(\mathbf{P}, t)) + D_p \nabla_{\mathbf{P}}^2 f(\mathbf{P}, t)$$

dont la solution stationnaire est la distribution gaussienne :

$$f_{\text{st}}(\mathbf{P}) \propto \exp(-\mathbf{P}^2 / 2mk_B T) ,$$

de température effective donnée par (1.38).

5.4 Une mélasse optique mérite-t-elle son nom ?

La dernière étape nécessaire pour rendre compte des observations expérimentales consiste à comprendre comment les atomes se déplacent dans une mélasse optique. Plus précisément, il faut déterminer comment la distribution spatiale atomique évolue, une fois que la distribution en vitesse a atteint son régime stationnaire caractérisé par la température (1.38).

La réponse est ici encore apportée par la théorie du mouvement brownien, qui permet de montrer que cette évolution spatiale est un régime diffusif, de coefficient de diffusion :

$$D_x = \frac{D_p}{m^2 \gamma^2} = 3 \bar{V}^2 \tau$$

où le temps caractéristique de refroidissement τ est donné en (1.27). Pour l'atome de rubidium, en prenant $\tau = 100 \mu\text{s}$ ($s_0 = 1/10$, $\delta = -\Gamma/2$), on trouve $D_x = 4 \text{ mm}^2/\text{s}$. Ceci signifie qu'une assemblée atomique localisée initialement en $\mathbf{R} = 0$ ne s'est étalée que de 2 mm au bout d'une seconde : les atomes sont effectivement englués dans ce milieu visqueux et ils mettent un temps considérable pour atteindre les bords des faisceaux lumineux.

Chapitre 2

L'interférométrie atomique

L'interférométrie à ondes de matière est un domaine de recherche aussi ancien que la mécanique ondulatoire. La diffraction des électrons ou des neutrons par des cristaux sont des outils utilisés de manière intensive dans de nombreux champs de la science et de la technologie.

La possibilité de refroidir des atomes à des températures de l'ordre du microKelvin est venue enrichir les possibilités offertes par l'interférométrie matérielle. En effet, les longueurs d'onde associées à ces atomes sont de l'ordre de la longueur d'onde lumineuse, beaucoup plus grande que les longueurs d'onde associées en général aux neutrons ou aux électrons. Nous présentons dans ce chapitre les principes généraux de la propagation et de la diffraction d'ondes matérielles, en prenant éventuellement en compte l'accélération de la pesanteur ou la rotation du référentiel du laboratoire. Nous terminons par l'effet Bohm-Aharonov et quelques uns de ses dérivés, ce qui fournira un exemple de phase topologique pouvant apparaître en interférométrie atomique.

Faute de place et de temps, cette présentation de l'interférométrie atomique restera forcément très partielle. On trouvera un exposé beaucoup plus détaillé de ce domaine dans les deux séries de cours donnés au Collège de France par C. Cohen-Tannoudji pendant les années 1992-93 et 1993-94.

1 Diffraction d'ondes de matière

1.1 Le principe de Huygens-Fresnel

Considérons un faisceau quasi monoénergétique de particules matérielles non relativistes, arrivant sur un écran. En l'absence de champ de rotation ou de gravitation, l'évolution de la fonction d'onde $\psi(\mathbf{r}, t)$ d'une particule est donnée par

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi = E\psi \quad \Rightarrow \quad \Delta\psi + k^2\psi = 0 \quad \text{avec} \quad k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \quad (2.1)$$

les conditions aux limites étant déterminées par l'écran. Cette équation est similaire à celle régissant la diffraction d'un faisceau lumineux monochromatique, de longueur d'onde $\lambda = 2\pi/k$, par le même écran :

$$\Delta E + k^2 E = 0 \quad (2.2)$$

où $E(r, t)$ représente le champ électrique de l'onde lumineuse. La seule différence entre les solutions des deux équations peut provenir du caractère vectoriel de la seconde (associé au fait que le champ électrique est transverse), mais ces effets sont généralement négligeables.

La résolution de l'équation (2.1) peut se faire en appliquant le principe de Huygens-Fresnel, c'est-à-dire en superposant au niveau du détecteur les ondes rayonnées par des points sources situées dans la partie "ouverte" de l'écran de départ¹. A une distance r d'un point source S , la fonction d'onde a la structure d'une onde sphérique divergente e^{ikr}/r . Si on considère un écran plan situé à une distance D de S , la structure de l'onde de probabilité au voisinage de O , projection de S sur l'écran (cf. fig. 1), s'écrit :

$$\psi(X, Y, D) = \psi_0 \exp\left(i \frac{k(X^2 + Y^2)}{2D}\right) \quad (2.3)$$

où on a utilisé $r = (X^2 + Y^2 + D^2)^{1/2} \simeq D + \frac{X^2 + Y^2}{2D}$.

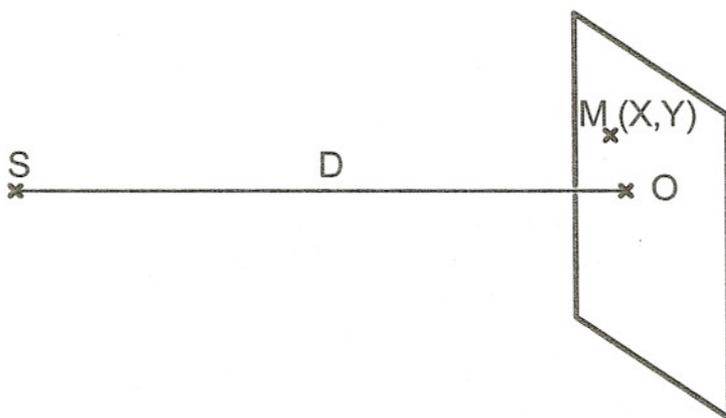


FIG. 1: Source S et écran de détection.

Introduisons le temps T mis par la particule pour parcourir la distance SO : $T = D/v_0$, où v_0 est la vitesse des particules. En utilisant le fait que $\hbar k = mv_0$, on peut également mettre la fonction d'onde (2.3) sous la forme :

$$\psi(X, Y, D) = \psi_0 \exp\left(i \frac{m(X^2 + Y^2)}{2\hbar T}\right)$$

Nous retrouverons ce résultat plus loin et nous le généraliserons au cas d'une particule en mouvement dans un champ de rotation ou d'accélération.

1.2 Diffraction par une fente

L'identité des équations (2.1) et (2.2) permet de concevoir et de réaliser des éléments d'optique neutronique ou atomique en analogie directe avec ceux bien connus pour l'optique photonique. Ainsi, sur la figure 2, on a représenté le résultat expérimental de la diffraction par une fente d'un jet de neutrons très froids et très lents ($\lambda = 1,926$ nm, soit $v_0 = 206$ m/s).

Ces expériences ont été menées au réacteur à haut flux de l'Institut Laue-Langevin, à Grenoble². Les neutrons sont produits à des énergies de l'ordre de 2 MeV, soit une vitesse de

¹Ce résultat se justifie rigoureusement à partir de la fonction de Green de (2.1).

²R. Gähler and A. Zeilinger, Am. J. Phys. 59, 316 (1991).

20 000 km/s. Ils sont refroidis à la température ambiante par collisions avec les noyaux d'un modérateur, et on dispose alors d'une source de neutrons thermiques, à 300 K (vitesse de l'ordre de 2 km/s, longueur d'onde de 0,2 nm). Pour les expériences de diffraction et d'interférométrie, on abaisse encore la température des neutrons en utilisant un modérateur à 20 K, et on sélectionne la partie "basse vitesse" de la distribution de Maxwell. La détection se fait par l'intermédiaire d'une réaction nucléaire ($^{10}\text{B} + n \rightarrow ^7\text{Li} + \alpha$), et on mesure l'ionisation qui suit cette réaction. La détectivité est proche de 100 %.

On constate que la figure de diffraction obtenue expérimentalement (largeur de fente 93 μm) est en excellent accord avec la théorie simple présentée ci-dessus.

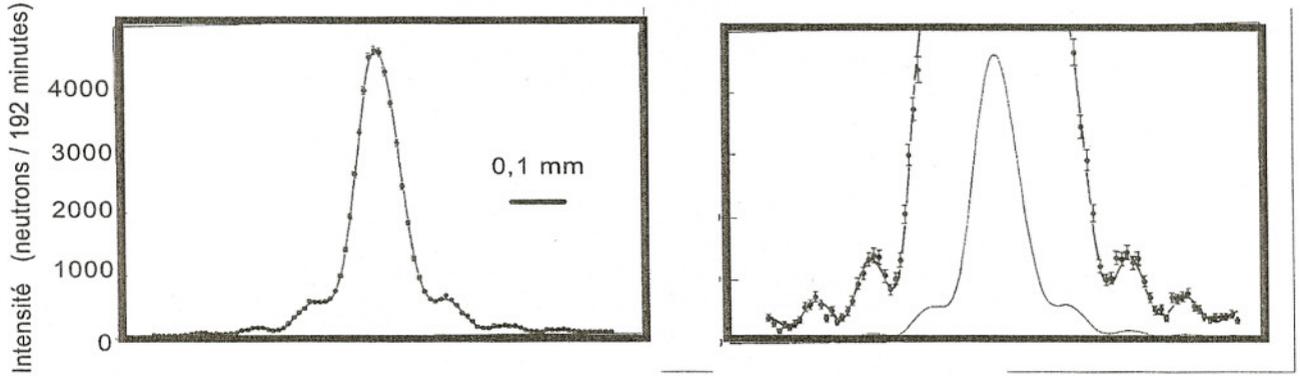


FIG. 2: Diffraction d'un jet de neutrons par une fente.

1.3 Lentille à zones de Fresnel

Sur la figure 3, on a représenté un dispositif qui permet d'obtenir très simplement un effet de focalisation d'un jet atomique. Cette "lentille" est constituée d'anneaux matériels de rayons croissants $r_n = r_1\sqrt{n}$, séparés par des couronnes vides. On peut montrer qu'une onde incidente plane est diffractée par ce dispositif de manière à former une série de foyers $f_m = r_1^2/(m\lambda)$ ($m = 1, 2, \dots$), le flux dans l'ordre m étant relié au flux incident ϕ_i par $\phi_m = (\phi_i/4)(\text{sinc}(m\pi/2))^2$. On peut ainsi, à partir de simples masques matériels, construire une optique d'imagerie pour ondes de matière. Cette lentille a été utilisée pour la première fois à Constance, avec un jet d'atomes d'hélium portés dans un niveau métastable³.

1.4 Holographie atomique

L'expérience précédente peut se généraliser à la génération d'images arbitraires, en utilisant des écrans percés de trous judicieusement disposés. Ainsi l'écran de la figure 4a permet de déposer sur un substrat des atomes selon le motif représenté sur la figure 4b, représentant les trois lettres NEC, agence japonaise de financement de la recherche⁴.

Pour réaliser de tels hologrammes, on part de la distribution en impulsion $I(X, Y)$ que

³O. Carnal et al, Phys. Rev. Lett. **67**, 3231 (1991).

⁴M. Morinaga et al, Phys. Rev. Lett. **77**, 802 (1996).



FIG. 3: Lentille à zones de Fresnel.

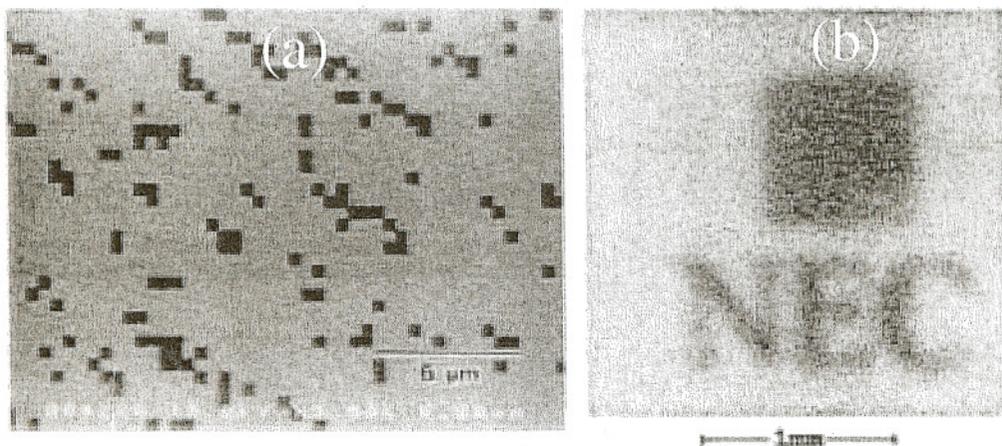


FIG. 4: Holographie atomique par transmission. (a) Partie de l'hologramme vue au microscope électronique. (b) Motif après reconstruction. Le carré central représente le motif de l'ordre 0. Le motif de l'onde conjugué (ordre -1) qui couvre la partie supérieure de la figure n'est pas visible ici.

On souhaite produire sur l'écran de détection. On en déduit l'amplitude correspondante⁵ : $a(X, Y) = \sqrt{I(X, Y)}$. On place l'écran de détection dans le plan focal d'une lentille de focale f , située juste derrière l'objet diffringent (cf. figure 5). L'amplitude $a(X, Y)$ est donc égale à l'amplitude diffractée par cet objet dans la direction k_x, k_y , avec $k_x = kX/f$, $k_y = kY/f$ (on se limite ici à l'approximation paraxiale, avec $X, Y \ll f$). En supposant que l'objet diffracté est éclairé par une onde plane se propageant perpendiculairement à son plan (e^{ikz}), l'amplitude diffractée dans la direction k_x, k_y est simplement la transformée de Fourier de la fonction de transmission $t(x, y)$ de l'objet diffringent :

$$a(k_x, k_y) = \int e^{i(k_x x + k_y y)} t(x, y) dx dy .$$

Puisqu'on sait à quelle amplitude diffractée on veut aboutir (par exemple pour écrire "NEC"),

⁵Il y en fait une infinité de $a(X, Y)$ correspondant à un $I(X, Y)$ donné, puisque la phase de $a(X, Y)$ ne joue pas de rôle. On peut tirer parti de cet arbitraire de phase lors de la réalisation pratique de l'hologramme.

on en déduit par transformation de Fourier inverse la fonction de transmission $t(x, y)$ qu'il faut choisir.

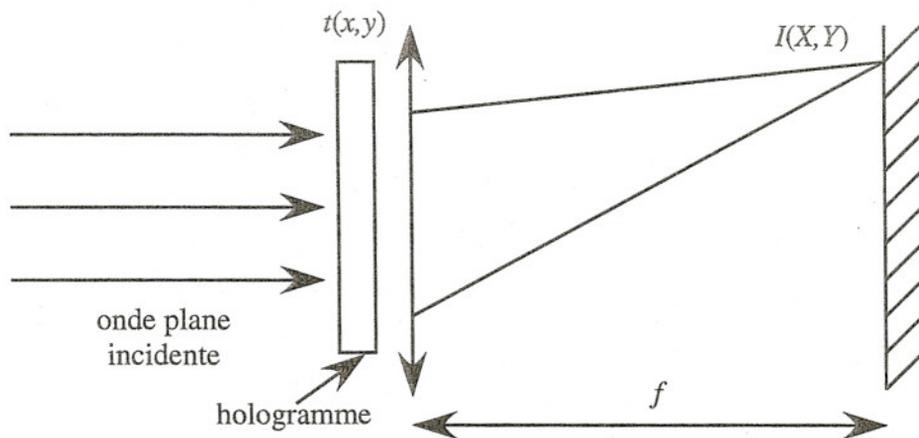


FIG. 5: Principe d'un montage holographique par transmission.

Un problème immédiat se pose : $t(x, y)$ est en général complexe. Or, on ne peut coder que des transmissions réelles, plus précisément des nombres qui valent soit 0 (écran opaque), soit 1 (trou dans l'écran). On code donc en fait la partie réelle de t : $(t(x, y) + t^*(x, y))/2$, ce qui donne naissance à deux images $I(X, Y)$ et $I(-X, -Y)$. On ajoute également une constante t_0 pour la fonction à coder pour que $t_0 + t(x, y) + t^*(x, y)$ soit un nombre positif compris entre 0 et t_{\max} . On détermine alors la transmission (0 ou 1) d'un pixel donné situé en (x_i, y_i) , en comparant la valeur $t(x_i, y_i)$ à ηt_{\max} , où η est un réel fixé, compris entre 0 et 1. Enfin, on peut inclure dans le codage la lentille elle-même, en codant $t(x, y) e^{-ik(x^2+y^2)/2f}$ plutôt que $t(x, y)$ lui-même.

1.5 Ondes de matière et ondes lumineuses

En l'absence de potentiel extérieur, l'identité entre figures de diffraction d'ondes de matière et ondes lumineuses est exacte pour des phénomènes stationnaires, pour lesquels la relation de dispersion n'entre pas en jeu. En revanche, on s'attend à des résultats différents pour les deux types de systèmes si on envisage des problèmes dépendant du temps. Un exemple est fourni par l'expérience de pensée de la figure (6) ; on envoie sur un obturateur un paquet d'onde, l'obturateur découpant deux brèves impulsions. Va-t-on observer des interférences sur le détecteur D ? Pour des ondes lumineuses, la réponse est négative, car les paquets d'onde ne s'évalent pas, au moins dans le vide. En d'autres termes, la relation de dispersion pour la lumière est linéaire. En revanche, on peut observer des interférences pour des ondes de matière (cf. P. Szriftgiser et al, Phys. Rev. Lett. **77**, 4, 1996).

La présence d'un champ de gravitation brise également l'équivalence entre interférométrie lumineuse et interférométrie à ondes de matière. Alors que la propagation des photons n'est que très marginalement affectée par la gravité (au moins au niveau terrestre), il en va tout autrement pour des particules matérielles, surtout lorsqu'elles sont lentes. L'interférométrie à ondes de matière permet donc de mesurer de manière précise l'accélération gravitationnelle.

Effet Sagnac. La sensibilité à la rotation d'un interféromètre atomique est également très différente de celle d'un interféromètre lumineux. Considérons le dispositif formé par deux demi-cercles AB , de rayon R , représenté sur la figure 7. Un paquet d'onde incident, de vitesse v , arrive

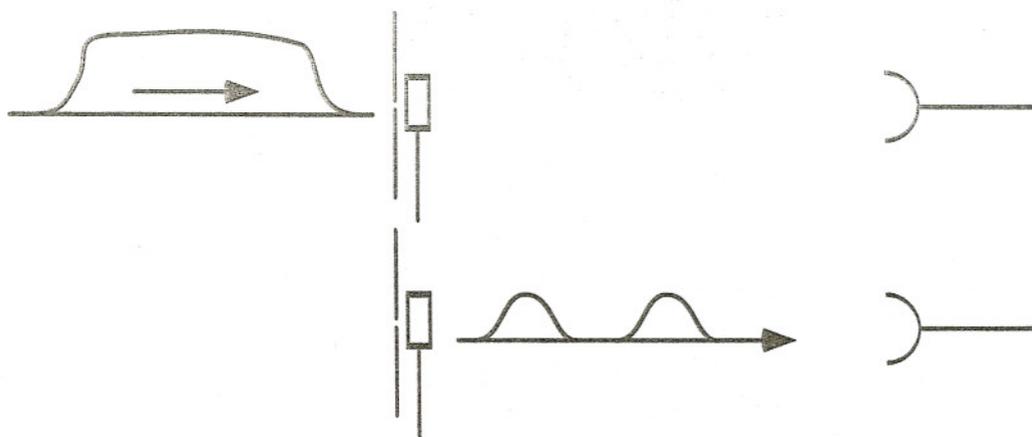


FIG. 6: Observe-t-on des interférences dans une expérience de diffraction temporelle ?

en A par la voie a . Il se sépare en deux parties de même intensité, qui se recombinent en B . Pour un choix correct des phases induites par les deux séparateurs A et B , et pour un interféromètre au repos, le paquet d'onde émergent est entièrement localisé dans la voie b .

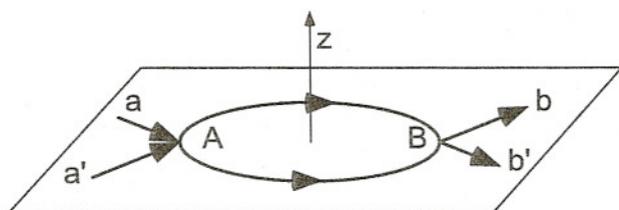


FIG. 7: Dispositif interférométrique pour étudier l'effet Sagnac.

Supposons maintenant que l'interféromètre tourne à la vitesse angulaire Ω autour de l'axe z . Au premier ordre en Ω , le trajet AB effectué dans le sens direct (resp. indirect) se trouve allongé (resp. raccourci) de $\delta l = \Omega RT$, où $T = \pi R/v$ est le temps nécessaire pour effectuer le trajet AB . Il s'en suit une différence de phase en B entre les deux voies de l'interféromètre :

$$\delta\phi = 2k \delta l = 2k\Omega RT = 2k\Omega \frac{\pi R^2}{v}$$

Cette variation de phase $\delta\phi$ se traduit par une intensité non nulle dans la voie b' (typiquement $I(b') = \sin^2 \delta\phi$).

Pour des photons, $k = \omega/c$ et $v = c$, soit :

$$\delta\phi|_{\text{photons}} = 2 \frac{\mathcal{A}\omega\Omega}{c^2}$$

où $\mathcal{A} = \pi R^2$ est l'aire de l'interféromètre. Pour des particules matérielles, $k = mv/\hbar$, soit :

$$\delta\phi|_{\text{matiere}} = 2 \frac{\mathcal{A}m\Omega}{\hbar}$$

Le rapport entre ces deux quantités donne :

$$\frac{\delta\phi|_{\text{matiere}}}{\delta\phi|_{\text{photons}}} = \frac{mc^2}{\hbar\omega}$$

qui est de l'ordre de 10^{11} si l'on compare des atomes ($mc^2 \sim 100$ GeV) à des photons visibles ($\hbar\omega \sim 1$ eV).

Ce gain considérable peut présenter un grand intérêt pratique. Les interféromètres à effet Sagnac sont en effet très utilisés en navigation (gyrolasers). La possibilité de les améliorer par plusieurs ordres de grandeur en remplaçant les photons par des particules matérielles est donc très alléchante. Pour l'instant, on est encore loin de pouvoir utiliser les mêmes aires \mathcal{A} pour des atomes que pour des photons, mais une recherche très active est en cours dans ce domaine.

2 Ondes de matière dans un champ de gravitation

Considérons l'expérience représentée sur la figure 8. Un nuage d'atomes froids est lâché sans vitesse initiale à une hauteur H_0 au dessus d'une double fente horizontale. On enregistre sur un écran situé à une distance H du plan de la double fente la figure d'interférence⁶. Comment calculer l'interfrange mesuré dans cette expérience ?

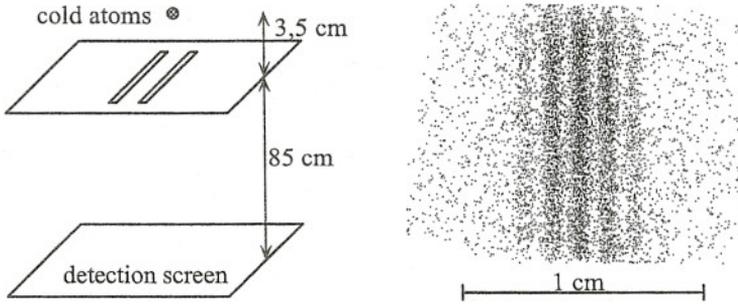


FIG. 8: Interférométrie de particules (atomes de néon) en chute libre. Chaque point de la figure d'interférence correspond à l'impact d'un atome sur la plaque détectrice. La figure est obtenue en prenant $a = 6 \mu\text{m}$, $H_0 = 3,5$ cm et $H = 85$ cm.

La méthode que nous allons utiliser ici est fondée sur l'utilisation du propagateur quantique du problème, que nous allons calculer en nous appuyant sur le formalisme de l'intégrale de chemin. Nous commencerons par rappeler les principes généraux de cette méthode, que nous appliquerons ensuite au cas d'un lagrangien linéaire ou quadratique en impulsion et en position. Ceci nous permettra de calculer le propagateur dans le champ de pesanteur et d'en déduire l'interfrange recherché.

2.1 Le formalisme de l'intégrale de chemin

Dans cette formulation de la mécanique quantique, on postule que l'amplitude de probabilité pour qu'une particule quantique passe du point \mathbf{r}_a à l'instant t_a , au point \mathbf{r}_b à l'instant t_b , est donnée par :

$$K(\mathbf{r}_b, t_b; \mathbf{r}_a, t_a) = \sum_{\Gamma} e^{iS_{\Gamma}/\hbar} \quad (2.4)$$

⁶F. Shimizu, K. Shimizu, and H. Takuma, Phys. Rev. A 46, R17 (1992).

où la somme porte sur tous les chemins Γ reliant (\mathbf{r}_a, t_a) à (\mathbf{r}_b, t_b) . La quantité S_Γ est l'action calculée le long du chemin Γ :

$$S_\Gamma = \int_{t_a}^{t_b} L(\mathbf{r}(t), \dot{\mathbf{r}}(t), t) dt \quad (2.5)$$

Nous ne rentrerons pas ici dans le calcul général de cette somme, qui est en fait une intégrale dans l'espace des chemins $\mathbf{r}(t)$, et qui nécessite la définition d'une mesure appropriée sur cet espace. Nous nous limiterons dans ce qui suit au cas de lagrangiens quadratiques en $\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}$, pour lesquels un résultat remarquablement simple peut être déduit de (2.4) :

Pour un lagrangien linéaire ou quadratique vis à vis de la position et de l'impulsion, on a :

$$K(\mathbf{r}_b, t_b; \mathbf{r}_a, t_a) = F(t_b, t_a) e^{iS_{\text{class.}}/\hbar}$$

où $F(t_b, t_a)$ est indépendante des positions initiales et finales \mathbf{r}_a et \mathbf{r}_b , et où $S_{\text{class.}}$ est l'action évaluée sur le chemin classique qui va de (\mathbf{r}_a, t_a) à (\mathbf{r}_b, t_b) .

Exemples d'application :

- Particule libre : $L = m\dot{r}^2/2$.
- Particule dans le champ de pesanteur : $L = m\dot{r}^2/2 - mgz$.
- Particule dans un potentiel harmonique : $L = m\dot{r}^2/2 - m\omega^2 r^2$.
- Particule dans un référentiel en rotation : $L = m\dot{r}^2/2 + m\dot{\mathbf{r}} \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) + m(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})^2/2$.

Démonstration : Pour alléger les notations, nous allons nous limiter au mouvement selon une seule dimension. Posons

$$L = a\dot{z}^2 + bz\dot{z} + cz^2 + d\dot{z} + ez + f$$

où les coefficients a, b, \dots, f peuvent éventuellement dépendre du temps. Notons $(z_{\text{cl}}(t), \dot{z}_{\text{cl}}(t))$ la solution classique des équations du mouvement :

$$\frac{\partial L}{\partial z} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \right)$$

Rappelons que cette solution classique est obtenue par le principe de moindre action, qui postule qu'une petite variation $(\delta z, \delta \dot{z})$ autour de $(z_{\text{cl}}(t), \dot{z}_{\text{cl}}(t))$ avec $\delta z(t_a) = \delta z(t_b) = 0$ laisse l'action invariante au premier ordre en $(\delta z, \delta \dot{z})$.

On repère alors un chemin quelconque $\Gamma = (z(t), \dot{z}(t))$ sous la forme :

$$z(t) = z_{\text{cl}}(t) + u(t) \quad \dot{z}(t) = \dot{z}_{\text{cl}}(t) + \dot{u}(t)$$

avec $u(t_a) = u(t_b) = 0$. L'action S_Γ se met sous la forme :

$$S_\Gamma = S_{\text{class.}} + S_{\{u\}} + \int_{t_a}^{t_b} (2a\dot{z}_{\text{cl}}\dot{u} + b(\dot{z}_{\text{cl}}u + z_{\text{cl}}\dot{u}) + 2cz_{\text{cl}}u) dt \quad (2.6)$$

où $S_{\{u\}}$ est l'action calculée sur le chemin $u(t)$ et est donc indépendante de z_a et z_b .

Il suffit maintenant de remarquer que le dernier terme de (2.6) n'est autre que la variation au premier ordre de l'action classique quand on passe du chemin classique $z_{\text{cl}}(t)$ au chemin $z_{\text{cl}}(t) + u(t)$. Ce dernier terme est donc nul. Par conséquent le propagateur quantique se met sous la forme :

$$K(\mathbf{r}_b, t_b; \mathbf{r}_a, t_a) = e^{iS_{\text{class.}}/\hbar} \sum_{\{u\}} e^{iS_{\{u\}}/\hbar}$$

ce qui est bien de la forme annoncée.

2.2 Le propagateur classique dans le champ de pesanteur

Considérons une particule classique au point r_a à l'instant t_a , passant au point r_b à l'instant t_b . Le mouvement dans le plan horizontal se fait à vitesse constante :

$$v_x = \frac{x_b - x_a}{t_b - t_a} \quad v_y = \frac{y_b - y_a}{t_b - t_a}$$

Le mouvement selon z est uniformément accéléré, avec une vitesse initiale donnée par :

$$v_z(t_a) = \frac{z_b - z_a}{t_b - t_a} + \frac{1}{2}g(t_b - t_a)$$

On peut alors aisément calculer l'intégrale du lagrangien sur la trajectoire classique :

$$S_{\text{class.}} = \int_{t_a}^{t_b} \left(\frac{1}{2}mv^2(t) - mgz(t) \right) dt$$

et l'on trouve :

$$S_{\text{class.}} = \frac{m}{2} \frac{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2 + (z_b - z_a)^2}{T} - \frac{mg}{2}(z_b + z_a)T - \frac{mg^2T^3}{24}$$

où l'on a posé $T = t_b - t_a$. Remarquons que pour $g = 0$, la forme de ce propagateur est bien identique à ce que l'on avait obtenu dans la première partie à partir du principe de Huygens-Fresnel.

2.3 Calcul de l'interfrange

Revenons maintenant à l'expérience représentée sur la figure 8. On cherche à évaluer la fonction d'onde dans le plan de détection, de cote z_b , à un instant t_b fixé. Choisissons l'instant t_a correspondant au moment où le nuage d'atomes froids passe au niveau de la double fente. A cet instant, l'état atomique $\psi(r_a, t_a)$ correspond donc à un paquet d'onde de vitesse moyenne $v_0 = p_0/m = -\sqrt{2gH_0}$, dirigée le long de l'axe z , et d'enveloppe $\chi(z)$. Cette fonction d'onde est piquée autour des points $x = \pm a/2$, et délocalisée le long de l'axe y .

La fonction d'onde à l'instant $t_b = t_a + T$ s'écrit :

$$\psi(r_b, t_b) = \int K(r_b, t_b; r_a, t_a) \psi(r_a, t_a) d^3r_a$$

Remplaçons le propagateur par son expression trouvée plus haut. L'intégrale sur y donne une simple constante multiplicative, et l'intégrale sur x fait apparaître les deux contributions $x = \pm a/2$. Il reste ensuite l'intégrale sur z_a :

$$\begin{aligned} \psi(r_b, t_b) \propto & \left(\exp\left(i \frac{m(x_b - a/2)^2}{2\hbar T}\right) + \exp\left(i \frac{m(x_b + a/2)^2}{2\hbar T}\right) \right) \\ & \times \int \exp\left(\frac{i}{\hbar} \left(\frac{m(z_b - z_a)^2}{2T} - \frac{mg}{2}(z_b + z_a)T + p_0 z_a \right)\right) \chi(z_a) dz_a \quad (2.7) \end{aligned}$$

Pour que l'intégrale sur z_a ait une contribution appréciable, il faut qu'il existe un point z_a auquel la phase de l'exponentielle sera stationnaire, et pour lequel la fonction enveloppe $\chi(z)$

du paquet d'onde prend une valeur significative. La phase variant de manière quadratique avec z_a , il y a un seul point où elle est stationnaire :

$$-\frac{m(z_b - z_a)}{T} - \frac{mg}{2}T + p_0 = 0$$

L'enveloppe $\chi(z)$ prenant des valeurs appréciables si z_a est au niveau du plan de la double fente, on peut prendre dans cette équation $z_b - z_a = -H$, ce qui signifie que l'amplitude de la fonction d'onde sur l'écran de détection sera non négligeable si le temps $T = t_b - t_a$ est voisin de la solution de l'équation :

$$\frac{g}{2}T^2 - v_0T = H \quad \Rightarrow \quad T = \frac{\sqrt{v_0^2 + 2gH} + v_0}{g}$$

ce qui n'est autre que le temps mis classiquement par une particule de vitesse v_0 au niveau du plan de la double fente, pour atteindre le plan de l'écran ($v_0 < 0$ avec nos conventions). Une fois ce temps T déterminé, on déduit l'interfrange recherché grâce à la forme (2.7) de la fonction d'onde. La variation du module carré de $\psi(r_b, t_b)$ avec la position x_b est de la forme $\cos^2(mx_b a / (2\hbar T))$, soit un interfrange :

$$\delta x_b = \frac{2\pi\hbar T}{ma}$$

On vérifiera aisément que cette formule permet de retrouver l'interfrange de la figure 8.

3 L'effet Bohm-Aharonov et ses dérivés

En 1959, Y. Aharonov et D. Bohm publièrent un article (Phys. Rev. 115, 485) dans lequel ils montraient que les potentiels électromagnétiques ($A(\mathbf{r}, t), V(\mathbf{r}, t)$) pouvaient jouer un rôle central dans l'interprétation de certaines expériences d'interférométrie à ondes de matière. Sans remettre en cause l'invariance de jauge, qui entraîne que plusieurs couples ($A(\mathbf{r}, t), V(\mathbf{r}, t)$) peuvent décrire la même situation physique, ils montrèrent que la valeur non nulle de ces potentiels dans une région traversée par une particule chargée a une conséquence mesurable, même si les champs $E(\mathbf{r}, t), B(\mathbf{r}, t)$ dérivés de ces potentiels sont nuls dans la région considérée. Dans ce qui suit, nous allons reprendre le raisonnement d'Aharonov et Bohm, pour le potentiel scalaire $V(\mathbf{r}, t)$, puis pour le potentiel vecteur $A(\mathbf{r}, t)$. Nous montrerons dans les deux cas comment l'effet prévu peut se transposer au cas d'une particule neutre (neutron, atome, ou molécule).

3.1 Effet Bohm-Aharonov scalaire

Considérons l'expérience représentée sur la figure 9 : un jet de particules chargées est séparé en deux parties au point A , puis recombinaison au point B . Sur l'un des deux trajets, on place un tube métallique. Lorsque le paquet d'onde électronique arrive, le potentiel du cylindre est nul, et les deux voies de l'interféromètre sont complètement équivalentes. Une fois le paquet d'onde à l'intérieur du cylindre, on applique une tension V au cylindre pendant une durée τ . Cette durée est choisie courte devant le temps de traversée du cylindre. On peut donc affirmer que l'électron n'est soumis à aucun champ électrique pendant τ , les effets de bord étant négligeables. Aucun autre potentiel n'est appliqué au cylindre pendant la sortie de l'électron ni pendant son trajet vers B . La question posée est la suivante : y a-t-il ou non un décalage du système de franges observé en B , du fait de l'application de la tension V ?

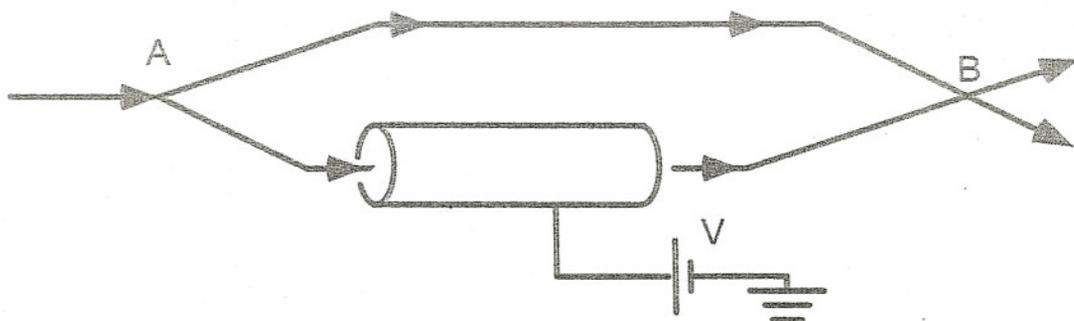


FIG. 9: Schéma de principe d'une expérience Bohm-Aharonov scalaire.

La réponse est positive, bien que l'électron ne soit soumis classiquement à aucune force électrique, et qu'il n'y ait donc pas de modification des trajectoires classiques. Pour le chemin quantique passant par le cylindre, il faut en effet ajouter à l'hamiltonien la quantité qV pendant la durée τ , ce qui entraîne le déphasage :

$$\Phi = -\frac{1}{\hbar} \int_0^\tau qV dt = -\frac{qV\tau}{\hbar}$$

Ce facteur de phase est indépendant de la vitesse de l'électron, à condition bien sûr que celle-ci soit suffisamment faible pour que l'électron n'ait pas le temps de parcourir tout le cylindre pendant la durée τ . Il s'agit donc d'un effet non dispersif, qui ne peut être mis en évidence que par interférométrie.

L'observation d'un tel effet ne requiert pas l'utilisation de faisceaux de grande longueur de cohérence. En effet il ne se produit aucun ralentissement, ni accélération du faisceau passant dans le cylindre par rapport à celui l'évitant. Par conséquent, si ces deux faisceaux se recouvrent au niveau de B en l'absence de potentiel appliqué, ils se recouvriront encore lorsque V sera non nul pendant la durée τ .

La situation Bohm-Aharonov est radicalement différente de celle que l'on obtiendra en appliquant V en permanence. Dans ce dernier cas, l'électron sera accéléré à l'entrée du cylindre (pour $V > 0$) (énergie cinétique augmentée de $|q|V$), puis décéléré en sortie du cylindre. Pour V assez grand, le chemin passant par le cylindre arrivera au détecteur en avance par rapport à l'autre chemin. Lorsque le délai entre les deux instants d'arrivée dépassera le temps de cohérence du faisceau d'électrons, les franges disparaîtront. On sera alors en présence d'un effet d'interférence dispersif.

L'observation de cet effet avec des particules chargées n'a pas encore été faite, mais son principe a été transposé à des particules neutres par A. Zeilinger, en imaginant que l'on remplace le cylindre conducteur de la figure 9 par un solénoïde. Ces particules possèdent un moment magnétique μ aligné avec leur direction de propagation. On réalise un interféromètre à deux voies, l'une des voies passant à l'intérieur d'un solénoïde. Lorsque la particule est au centre du solénoïde, on applique pendant une durée τ un champ magnétique B , homogène sur l'extension du paquet d'onde de la particule. Ici encore aucune force ne s'applique classiquement sur la particule, car les gradients de champ magnétique sont négligeables. On doit observer néanmoins un déphasage

$$\Phi = \frac{\mu B \tau}{\hbar}$$

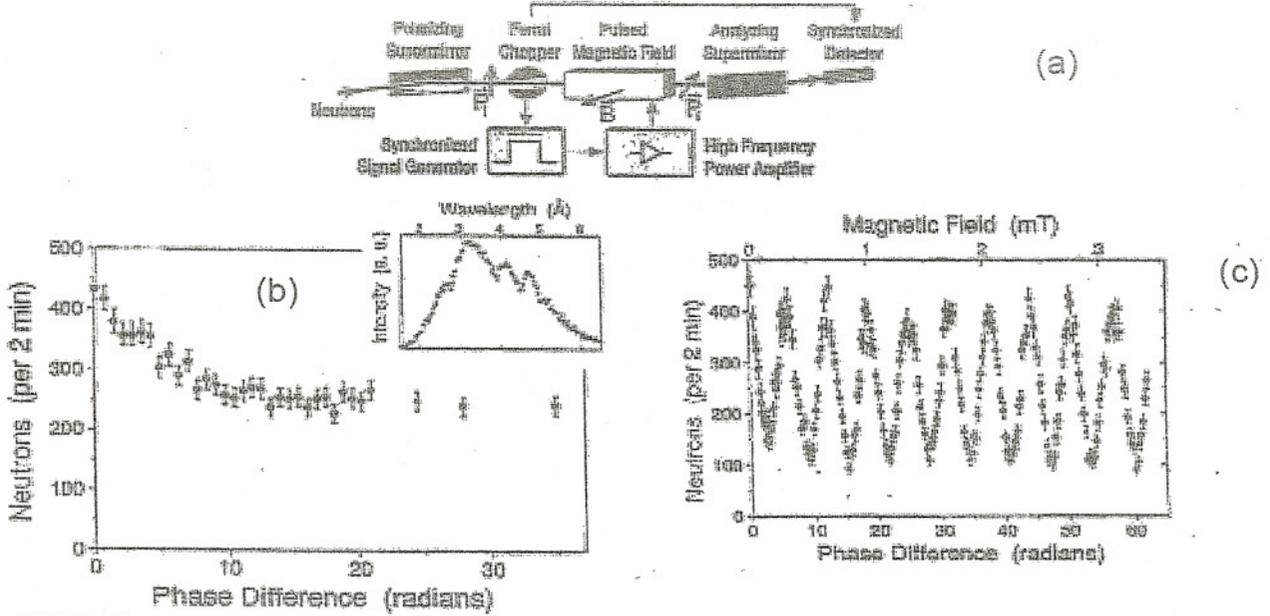


FIG. 10: a) Expérience réalisée avec des neutrons par G. Badurek et al, Phys. Rev. Lett. **71**, 307 (1993). Signal en sortie de l'analyseur, en fonction du module du champ B . Le champ est appliqué de manière constante pour la courbe (b), et de manière pulsée pour la courbe (c).

Bien sûr, dans une telle transposition, on perd une partie du caractère paradoxal de l'effet initial, qui était dû aux potentiels électromagnétiques plutôt qu'aux champs. Néanmoins on conserve le fait qu'il est possible de modifier une figure d'interférence sans appliquer de force, ni modifier la trajectoire classique de la particule en jeu.

Cette expérience a effectivement été menée sur des neutrons. La figure 10 présente une version légèrement différente de celle initialement proposée par Zeilinger. Le jet de neutrons, avec un moment magnétique perpendiculaire à sa direction de propagation, traverse une zone où l'on applique un champ B , perpendiculaire à μ . Lorsque le champ B est présent de manière permanente, aucune frange d'interférence n'apparaît, car la longueur de cohérence du faisceau est trop courte pour observer ne serait-ce qu'une oscillation. Au contraire, quand le champ B est appliqué seulement pendant une durée τ , on observe des franges dont le contraste est indépendant de la différence de phase, ce qui prouve clairement le caractère non dispersif de l'effet. Cette expérience a également été menée avec des atomes neutres (hydrogène) à l'Université Paris-Nord (S. Nic Chormaic et al, Phys. Rev. Lett. **72**, 1 (1994)).

3.2 L'effet Bohm-Aharonov vectoriel

Cette version de l'effet Bohm-Aharonov tend à mettre l'accent sur la "réalité" du potentiel vecteur A , plutôt que le potentiel scalaire V . On considère un interféromètre à trous d'Young pour électrons. Entre les deux trous, on place un solénoïde très long et fin, dont l'axe est perpendiculaire au plan des trajectoires (figure 11). Le champ magnétique créé par ce solénoïde est nul partout en dehors du solénoïde, en particulier au niveau des trajectoires électroniques. Le potentiel vecteur en revanche est non nul à l'extérieur du solénoïde, et ce quel que soit le choix

de jauge qui est fait. En effet si on prend un contour fermé C faisant le tour du solénoïde, on doit avoir :

$$\oint_C \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot d^2\mathbf{r} = \pi r_0^2 B_0$$

où la surface S s'appuie sur le contour C , et où r_0 et B_0 désignent respectivement le rayon et le champ à l'intérieur du solénoïde.

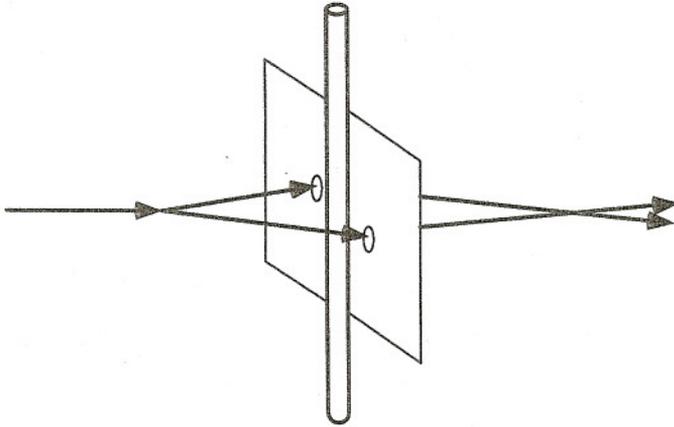


FIG. 11: Schéma expérimental permettant l'observation de l'effet Bohm-Aharonov vectoriel.

La question qui se pose est similaire à celle envisagée dans le paragraphe précédent. Quand on fait passer un courant dans le solénoïde, observe-t-on un système de franges différent de celui qu'on obtient pour $B_0 = 0$? Notons qu'il ne s'agit plus ici d'une expérience pulsée, mais d'une expérience continue.

La réponse est ici encore positive. Le lagrangien du problème s'écrit pour un choix de jauge donné :

$$L = \frac{m\dot{\mathbf{r}}^2}{2} + q\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r})$$

Puisque les trajectoires classiques ne sont pas modifiées, la variation de phase induite par le passage du courant dans le solénoïde et la présence du potentiel vecteur est simplement donnée par :

$$\Phi = \frac{1}{\hbar} \int_{[AB]_1} q\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) dt - \frac{1}{\hbar} \int_{[AB]_2} q\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) dt$$

ce qui s'écrit encore :

$$\Phi = \frac{q}{\hbar} \oint_C \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \frac{q\pi r_0^2 B_0}{\hbar}$$

où le circuit fermé C est donnée par la réunion des deux trajectoires allant de A à B , l'une parcourue dans le sens "normal", l'autre dans le sens "inverse". On trouve donc bien que les franges doivent se déplacer lorsque le solénoïde est alimenté, bien que la particule ne subisse aucune force, ni ne "voit" aucun champ magnétique le long des trajectoires possibles.

Cet effet a été mis en évidence avec des électrons⁷. Il en existe également une version pour particules neutres⁸, l'idée étant de regarder les interférences obtenues avec un faisceau de particules possédant un dipôle magnétique et bougeant dans le champ électrostatique créé par un

⁷voir A. Tonomura et al, Phys. Rev. Lett. **56**, 792 (1986), et refs. in.

⁸Y. Aharonov and A. Casher, Phys. Rev. Lett. **53**, 319 (1984); J. Anandan, Phys. Rev. Lett. **48**, 1660 (1982).

fil uniformément chargé, mis à l'emplacement du solénoïde de la figure 11. Ce dernier effet a été mis en évidence pour des neutrons⁹ et pour des molécules¹⁰.

⁹A. Cimmino et al, Phys. Rev. Lett. **63**, 380 (1989).

¹⁰K. Sangster et al, Phys. Rev. Lett. **71**, 3641 (1993).

Chapitre 3

Le piégeage de particules atomiques

Dans ce chapitre, nous passons en revue les principes généraux du piégeage électromagnétique de particules atomiques, chargées ou neutres. Nous étudierons les contraintes liées aux équations de Maxwell, en particulier lorsqu'on se limite à des champs statiques. Nous discuterons ensuite le piège dissipatif le plus populaire, le piège magnéto-optique, qui joue un rôle central dans de nombreuses expériences modernes de physique atomique. Enfin, nous aborderons un problème ayant donné lieu à de nombreuses publications erronées au cours des vingt dernières années : peut-on refroidir une assemblée de particules avec une action purement hamiltonienne ?

1 Le piégeage de particule chargées

A première vue, ce problème est plus simple que le piégeage de particules neutres. La charge d'une particule fournit en effet un moyen d'action simple sur cette particule, et on pourrait penser qu'il suffit d'un peu d'habileté pour concevoir une configuration de champs électrostatiques créant une force de rappel vers un point donné. Il n'en est rien. Les équations de l'électrostatique interdisent l'existence d'une telle configuration, au moins dans le vide. Il faut donc avoir recours à des dispositifs plus compliqués comme le piège de Paul (fondé sur un champ électrique oscillant), et le piège de Penning, combinant l'action d'un champ électrostatique et d'un champ magnétique.

1.1 Le théorème de Gauss (ou théorème d'Earnshaw)

La force agissant sur une particule de charge q , plongée dans un champ électrostatique \mathbf{E} , s'écrit :

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = q\mathbf{E}(\mathbf{r}) .$$

Pour que cette force piège de manière stable la particule en un point O , il faudrait qu'il existe une surface entourant le point O telle que la force soit rentrante en tout point de cette surface. Ceci est impossible en raison du théorème de Gauss :

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{F} = 0$$

Une autre démonstration du même résultat repose sur le fait que le potentiel électrostatique $U(\mathbf{r})$ vérifie $\Delta U = 0$ dans une région vide de charge. Il ne peut donc pas avoir de minimum local dans cette région.

Exemples

1. Deux charges placées en $x = \pm a, y = z = 0$ créent au voisinage de O un potentiel de rappel selon l'axe x , et un potentiel expulsant selon les axes y et z :

$$U(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}m\omega^2 \left(x^2 - \frac{y^2 + z^2}{2} \right)$$

2. Si on ajoute à la configuration précédentes deux charges placées en $y = \pm a, x = z = 0$, on crée un potentiel confinant dans le plan xy , mais expulsant selon z :

$$U(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}m\omega^2 \left(\frac{x^2 + y^2}{2} - z^2 \right)$$

3. Qu'obtient-on si on ajoute à la configuration 2 une autre paire de charges placée en $z = \pm a, x = y = 0$?

1.2 Le piège de Paul

Pour contourner cette impossibilité de confiner une particule chargée avec un champ purement électrostatique, Wolfgang Paul a suggéré d'utiliser un champ électrique oscillant avec une fréquence $\Omega/(2\pi)$. L'idée de base, qui lui a valu le prix Nobel de Physique en 1989, est de conférer un micro-mouvement à la particule grâce à ce champ oscillant. Ce micro-mouvement est d'autant plus grand que la particule est loin du point central. L'énergie cinétique de ce micro-mouvement joue alors le rôle d'une énergie potentielle pour le mouvement lent de la particule, et crée une force de rappel vers le centre. Nous allons étudier ce piège de deux façons. La première utilisera la séparation du mouvement de la particule en deux composantes distinctes, lente et rapide. La seconde, plus générale, fera appel au formalisme de l'équation de Mathieu.

Micromouvement et potentiel séculaire

On considère un potentiel électrostatique créé par exemple par deux conducteurs chargés disposés en $x = 0, y = 0, z = \pm a$, la charge de ces conducteurs oscillant dans le temps à la fréquence Ω . Considérons une particule test, de charge q et de masse m , placée au voisinage de O . Cette particule subit un potentiel électrique :

$$U(\mathbf{r}) = \frac{1}{4}m\omega^2 (x^2 + y^2 - 2z^2) \cos(\Omega t)$$

où la pulsation ω peut se calculer explicitement en fonction des charges des conducteurs, de leur distance au centre a , de q et de m . L'équation du mouvement de la charge test s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \frac{\omega^2}{2} \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ 2z \end{pmatrix} \cos \Omega t$$

Pour résoudre de manière approchée cette équation, supposons que $\Omega \gg \omega$. On peut alors écrire la solution de l'équation du mouvement sous la forme :

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_{\text{lent}}(t) + \mathbf{r}_{\text{rapide}}(t)$$

où la composante rapide évolue à la fréquence Ω , alors que la composante lente a une constante de temps caractéristique d'évolution beaucoup plus longue¹. Par cette séparation, et en négligeant les termes en $2\omega, \dots$, on trouve d'abord :

$$\ddot{\mathbf{r}}_{\text{rapide}} = \frac{\omega^2}{2} \begin{pmatrix} -x_{\text{lent}} \\ -y_{\text{lent}} \\ 2z_{\text{lent}} \end{pmatrix} \cos \Omega t$$

qui s'intègre en (\mathbf{r}_{lent} est supposé constant à ce stade) :

$$\mathbf{r}_{\text{rapide}}(t) = \frac{\omega^2}{2\Omega^2} \begin{pmatrix} x_{\text{lent}} \\ y_{\text{lent}} \\ -2z_{\text{lent}} \end{pmatrix} \cos \Omega t \quad (3.1)$$

Ce mouvement rapide, encore appelé micro-mouvement, a une amplitude d'autant plus grande que la particule test est loin de l'origine.

L'équation du mouvement lent quant à elle va faire intervenir des termes sources constitués de la moyenne temporelle du produit de termes rapides $\overline{\mathbf{r}_{\text{rapide}} \cos(\Omega t)}$. La moyenne de \cos^2 étant $1/2$, on arrive à :

$$\ddot{\mathbf{r}}_{\text{lent}} = \frac{\omega^2}{2} \begin{pmatrix} \overline{-x_{\text{rapide}} \cos(\Omega t)} \\ \overline{-y_{\text{rapide}} \cos(\Omega t)} \\ \overline{2z_{\text{rapide}} \cos(\Omega t)} \end{pmatrix} = -\frac{\omega^4}{8\Omega^2} \begin{pmatrix} x_{\text{lent}} \\ y_{\text{lent}} \\ 4z_{\text{lent}} \end{pmatrix}$$

On obtient ainsi ce que l'on cherchait : il s'agit d'un mouvement harmonique selon les trois directions de l'espace, le potentiel confinant étant :

$$V_{\text{eff}}(\mathbf{r}_{\text{lent}}) = \frac{m\omega^4}{16\Omega^2} (x_{\text{lent}}^2 + y_{\text{lent}}^2 + 4z_{\text{lent}}^2)$$

L'origine physique de ce potentiel de confinement est simple. En calculant la vitesse du micro-mouvement grâce à (3.1) :

$$\mathbf{v}_{\text{rapide}}(t) = -\frac{\omega^2}{2\Omega} \begin{pmatrix} x_{\text{lent}} \\ y_{\text{lent}} \\ -2z_{\text{lent}} \end{pmatrix} \sin \Omega t$$

on voit que V_{eff} n'est autre que :

$$V_{\text{eff}} = \frac{1}{2} m \overline{v_{\text{rapide}}^2}$$

L'oscillation à la fréquence Ω du potentiel électrostatique fait vibrer la particule avec une amplitude d'autant plus grande que la particule est loin du centre. L'énergie cinétique associée à cette vibration joue ensuite le rôle d'une énergie potentielle pour le mouvement lent, qui tend à ramener la particule vers le centre, là où le micro-mouvement s'annule. Notons que ce potentiel est indépendant du signe de la charge test. On peut piéger simultanément des particules positives et négatives.

La fréquence caractéristique du mouvement lent ω_{lent} est petite devant la fréquence caractéristique ω du mouvement dans le potentiel électrostatique, et devant la fréquence de vibration Ω . On a pour l'axe z :

$$\omega_{\text{lent}} = \frac{\omega^2}{\sqrt{2}\Omega} \ll \omega \ll \Omega$$

¹L. Landau et E. Lifchitz, Mécanique, §30, Editions Mir (Moscou).

ce qui justifie *a posteriori* la séparation du mouvement en deux composantes lente et rapide.

Experimentalement, une grande variété de paramètres a été explorée pour réaliser de tels pièges. On construit désormais des pièges très compacts et de fréquence de vibration élevée. Ainsi, pour l'ion ${}^9\text{Be}^+$, des chercheurs de Boulder² ont réalisé un piège de petite dimension, à partir d'un anneau métallique de rayon $r_0 = 170 \mu\text{m}$, avec un potentiel oscillant $V_0 = 600 \text{ V}$. En faisant osciller ce potentiel à la fréquence $\Omega_0/2\pi = 230 \text{ MHz}$, on obtient un mouvement lent à une fréquence de 30 MHz le long de l'axe z . Une fois piégé, un ion peut être conservé plusieurs heures, la pression résiduelle de l'enceinte étant inférieure à 10^{-8} Pa . Dans ce type de piège, le refroidissement lumineux permet d'amener l'ion dans l'état fondamental du piège avec une probabilité supérieure à 90%. Ce dispositif fournit un outil très puissant pour réaliser les premiers composants d'un traitement quantique de l'information : portes quantiques, quantum bits, ...

On peut également réaliser des pièges de Paul linéaires, qui confinent les particules le long d'une ligne. On considère pour cela le potentiel :

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 - y^2) \cos(\Omega t)$$

en prenant par exemple quatre fils d'axe Oz . On obtient une chaîne d'ions piégés (*cf.* figure 1), les ions pouvant être ici aussi refroidis dans le niveau vibrationnel fondamental du mouvement transverse.



FIG. 1: Chaîne d'ions confinés dans un piège de Paul linéaire.

L'approche "équation de Mathieu"

On peut faire un traitement rigoureux du mouvement classique d'une particule dans un potentiel oscillant, sans faire appel à une décomposition du mouvement en partie lente et partie rapide. Considérons par exemple le mouvement selon l'axe z . L'équation du mouvement s'écrit :

$$\ddot{z} - \omega^2 z \cos(\Omega t) = 0$$

En posant $\tau = \Omega t$, on voit que cette équation est un cas particulier de l'équation de Mathieu :

$$\frac{d^2z}{d\tau^2} + (a - b \cos \tau) z = 0$$

Le domaine de stabilité de cette équation est bien connu³. Il existe des domaines de paramètres a, b pour lesquels cette équation admet des solutions qui restent bornées. Notons que ce problème est formellement identique à celui de la recherche des états propres de l'équation de Schrödinger dans un potentiel spatialement périodique et variant comme $\cos(kz)$.

²C. Monroe *et al*, Phys. Rev. Lett. **75**, 4011 (1995).

³R. Campbell, Théorie générale de l'équation de Mathieu, Masson (1955).

Prenons $a = 0$ pour simplifier. On peut montrer que le principal domaine de stabilité correspond à $|b| < 0.91$, soit $\omega < 0.95 \Omega$. Il n'est donc pas nécessaire de choisir la fréquence Ω très grande devant la fréquence caractéristique ω . Une simple différence d'un facteur 2 (e.g. $\Omega = 2\omega$) suffit à assurer une stabilité confortable du piège. Notons néanmoins que le traitement en terme de micro-mouvement ne peut pas s'appliquer dans ce cas car on n'a pas $\Omega \gg \omega$.

1.3 Le piège de Penning

Ce piège constitue un autre moyen de contourner le théorème de Gauss. Considérons une particule de masse m et de charge q . On superpose

1. un champ électrostatique piégeant la particule selon l'axe z et l'expulsant dans le plan xy :

$$U(r) = \frac{1}{2} m \omega^2 \left(z^2 - \frac{x^2 + y^2}{2} \right)$$

2. un champ magnétique B uniforme d'axe z : $B = (0, 0, B)$.

L'équation du mouvement de la particule est donnée par :

$$\ddot{x} = \frac{\omega^2}{2} x + \omega_c \dot{y} \quad \ddot{y} = \frac{\omega^2}{2} y - \omega_c \dot{x} \quad \ddot{z} = -\omega^2 z$$

où la fréquence cyclotron ω_c est donnée par $\omega_c = qB/m$. Le mouvement selon z n'est bien sûr pas perturbé par le champ magnétique d'axe z et reste un mouvement harmonique de pulsation ω . Dans le plan Oxy , on peut trouver une solution de ce système en posant $\xi = x + iy$ et en cherchant ξ sous la forme e^{-irt} . On trouve :

$$\ddot{\xi} + i\omega_c \dot{\xi} - \frac{\omega^2}{2} \xi = 0 \quad \Rightarrow \quad r^2 - r\omega_c + \frac{\omega^2}{2} = 0$$

Pour $\omega_c > \sqrt{2}\omega$, on trouve bien deux racines r réelles, indiquant que l'on a un mouvement harmonique autour du centre. En supposant, comme c'est le cas en pratique, que $\omega_c \gg \omega$, les deux racines correspondantes s'écrivent :

$$r_1 \equiv \omega'_c = \frac{\omega_c}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\omega_c^2 - 2\omega^2} \simeq \omega_c$$

$$r_2 \equiv \omega_m = \frac{\omega_c}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\omega_c^2 - 2\omega^2} \simeq \frac{\omega^2}{2\omega_c}$$

Le mouvement associé à la fréquence ω_m est appelé *mouvement magnétron*. Il se fait à une fréquence beaucoup plus faible que le *mouvement axial*, le long de l'axe z . Le mouvement axial est lui-même lent devant le *mouvement cyclotron*, de fréquence $\sim \omega_c$. Une trajectoire typique est représentée⁴ sur la figure 2.

Des caractéristiques typiques de piège de Penning pour des électrons sont les suivantes : un champ de l'ordre de 0.1 Tesla assure une fréquence cyclotron de quelques GigaHertz. Le mouvement axial, produit par des électrodes portées à un potentiel d'une dizaine de Volts et séparées par quelques millimètres, a une fréquence de l'ordre de 100 MHz. Le mouvement magnétron a quant à lui une fréquence de l'ordre du MHz.

⁴Figure extraite de P. Ekstrom and D. Wineland, Scientific American 243, 91, Août 1980.

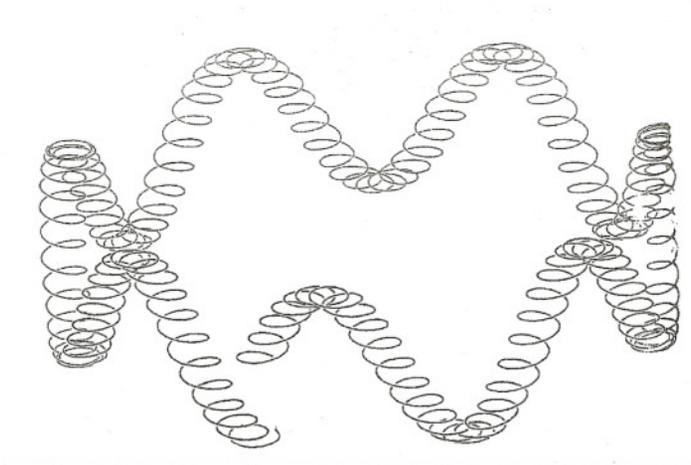


FIG. 2: Exemple de trajectoire dans un piège de Penning.

1.4 Piège de Paul ou piège de Penning ?

Les deux types de pièges interviennent dans les expériences modernes, chacun présentant des avantages et des inconvénients. Le piège de Paul a des fréquences élevées et il est possible de piéger et de refroidir un ion unique jusqu'à la limite où cet ion passe la plus grande partie du temps dans le niveau quantique vibrationnel fondamental $n_x = n_y = n_z = 0$. Un inconvénient non négligeable apparaît lorsqu'on met plusieurs particules dans un piège de Paul. Le micro-mouvement peut alors jouer un rôle néfaste lors de la collision de ces particules, en convertissant l'énergie cinétique du micromouvement en énergie cinétique du mouvement lent. Le piège de Penning est quant à lui purement statique, et il permet donc en principe de descendre plus bas en température. Il est bien adapté à la réalisation d'un standard de fréquence fondé sur un seul ion. On peut également étudier la cristallisation d'un grand nombre d'ions piégés simultanément dans ce type de piège lorsqu'on abaisse leur température⁵.

2 Le piégeage d'atomes neutres dans des champs statiques

Un atome neutre, préparé dans son état fondamental, peut posséder un dipole magnétique permanent μ . En revanche, pour des raisons de symétrie⁶, il ne peut avoir de dipole électrique permanent, contrairement à une molécule hétéronucléaire comme HCl par exemple. L'action d'un champ électrique statique se résume donc à une polarisation de l'atome, c'est-à-dire à l'apparition d'un dipole induit. Nous étudions dans cette section les mécanismes de piégeage fondés sur chacun de ces deux aspects, magnétique et électrique, de l'interaction d'un atome avec un champ statique.

⁵voir par exemple J. N. Tan et al, P. R. L. **75**, 4198 (1995).

⁶la fonction d'onde de l'état fondamental a une parité bien définie...

2.1 Le piégeage magnétique des atomes

Pour des atomes alcalins, comme le sodium, le rubidium, ..., le dipole magnétique μ de l'atome dans son état fondamental est de l'ordre du magnéton de Bohr⁷, $\mu_B = 9,27 \cdot 10^{-24}$ J/T. L'interaction de ces atomes avec un champ magnétique inhomogène s'écrit :

$$V(\mathbf{r}) = -\mu \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r})$$

Le piégeage magnétique consiste à aligner au départ μ et $\mathbf{B}(\mathbf{r})$, et à supposer que le moment magnétique garde ensuite son orientation vis-à-vis du champ magnétique local lorsque l'atome bouge. On a donc $V(\mathbf{r}) = \pm \mu B(\mathbf{r})$, où le signe \pm dépend de l'orientation choisie au départ. Si le signe $+$ est réalisé, les atomes vont s'accumuler au voisinage d'un minimum local du champ magnétique. Si le signe $-$ est réalisé, les atomes sont attirés vers les zones de grand champ magnétique.

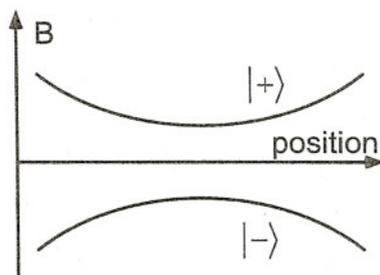


FIG. 3: Niveaux d'énergie d'une particule de spin 1/2 au voisinage d'un minimum de champ magnétique. Le niveau $|+\rangle$, "chercheur de champ faible", est confiné. Le niveau $|-\rangle$, "chercheur de champ fort" est expulsé.

On peut montrer sans grande difficulté qu'il est impossible de réaliser dans le vide une configuration de champ magnétique statique telle que B admette un maximum local. Un atome préparé dans un état où μ est de même sens que \mathbf{B} (pour lequel $V(\mathbf{r}) = -\mu B(\mathbf{r})$) sera donc attiré vers les fils ou les aimants permanents créant le champ, et ne pourra pas être confiné de manière stable.

En revanche il est possible de réaliser un minimum local de $B(\mathbf{r})$. La configuration la plus simple est de prendre deux bobines identiques et parallèles, d'axe z , parcourues par des courants de sens opposé (piège quadrupolaire). Par symétrie, le champ magnétique est nul au centre de symétrie O du système, et il varie autour de ce point comme $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = b'(x, y, -2z)$, soit $B(\mathbf{r}) = b'(x^2 + y^2 + 4z^2)^{1/2}$ qui est bien minimum en $\mathbf{r} = 0$.

Dans un piège magnétique, les atomes ne sont pas piégés dans le niveau d'énergie le plus bas. Le sous-niveau Zeeman correspondant à μ et \mathbf{B} de sens opposé est toujours au dessus du (ou des) sous-niveaux correspondant à μ et \mathbf{B} parallèles (cf. figure 3). Ceci signifie qu'un piège magnétique n'est pas vraiment stable. Lors d'une collision entre deux atomes piégés par exemple, un des moments magnétiques peut basculer, ce qui confère à la paire d'atome entrant en collision une énergie cinétique de l'ordre de μB .

La préparation des atomes dans le sous-niveau Zeeman correspondant à μ de sens opposé à \mathbf{B} se fait par pompage optique. Le suivi adiabatique du moment magnétique lors du mouvement de

⁷D'autres atomes, comme l'hélium, ont un moment magnétique beaucoup plus faible dans leur état fondamental, de l'ordre du magnéton nucléaire μ_n .

l'atome dans le piège est assuré si le champ magnétique n'est pas trop faible. Plus précisément, il faut que la fréquence de précession du moment magnétique ($\mu B/h$) soit très élevée devant les fréquences caractéristiques du mouvement du centre de masse atomique. Pour cette raison, le piège quadrupolaire n'est pas très bien adapté au confinement d'atomes ultra-froids. En effet le champ magnétique s'annule en ce point et la condition de suivi adiabatique ne peut pas être satisfaite pour des atomes très lents.

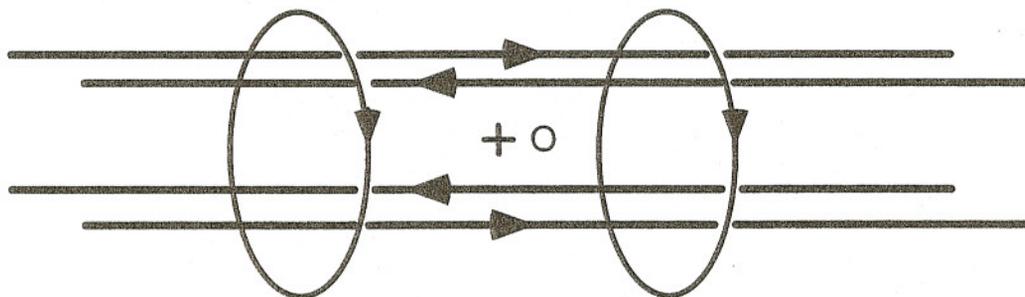


FIG. 4: Un piège de Ioffe-Pritchard, ou comment générer un minimum local non nul de champ magnétique.

On utilise en général un piège magnétique de Ioffe-Pritchard, dans lequel le minimum local du champ est non nul (figure 4). Une possibilité pour générer un tel champ est de superposer :

1. le champ créé par quatre fils infinis parallèles à l'axe z :

$$\mathbf{B}_a(\mathbf{r}) = b' \begin{pmatrix} x \\ -y \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. le champ créé par deux bobines identiques d'axe z :

$$\mathbf{B}_b(\mathbf{r}) = B_0 \mathbf{e}_z + \frac{b''}{4} \begin{pmatrix} -2xz \\ -2yz \\ 2z^2 - x^2 - y^2 \end{pmatrix}$$

Ces bobines sont séparées par une distance supérieure à la distance de Helmholtz, de sorte que le champ sur leur axe ($x = y = 0$) admet un minimum local ($b'' > 0$) au centre de symétrie du système.

On vérifie que ces deux champs obéissent bien aux équations de la magnéto-statique $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ et $\nabla \times \mathbf{B} = 0$. Le module du champ total $\mathbf{B}_a + \mathbf{B}_b$ s'écrit, à l'ordre le plus bas en x, y, z :

$$|\mathbf{B}(\mathbf{r})| = B_0 + \left(\frac{b'^2}{2B_0} - \frac{b''}{4} \right) (x^2 + y^2) + \frac{b''}{2} z^2$$

Pourvu que $2b'^2 > B_0 b''$, ce champ magnétique admet bien un minimum local au point O , et les atomes préparés dans un niveau "chercheur de champ faible" sont confinés. Ce type de piège joue un rôle central dans la condensation de Bose-Einstein de gaz d'atomes alcalins.

2.2 Utilisation d'un champ électrique

Puisqu'un atome ne possède pas de dipole électrique permanent, on ne peut pas dupliquer avec un champ électrostatique ce que nous venons de faire avec un champ magnéto-statique. En

revanche un atome est polarisable par un champ électrostatique. Si l'atome est plongé dans un champ E , un dipôle induit $D = \alpha E$ apparaît. En général, la polarisabilité α est un tenseur, mais pour les atomes alcalins, la composante scalaire domine largement. La question à résoudre est alors la suivante : peut-on profiter de l'énergie d'interaction entre dipole induit et champ :

$$V(\mathbf{r}) = -\frac{1}{2}\alpha E^2(\mathbf{r}) \quad (3.2)$$

pour piéger les atomes ?

Pour des atomes préparés dans leur état fondamental, la polarisabilité α est positive⁸. On ne peut donc piéger les atomes qu'au voisinage d'un maximum de $|E(\mathbf{r})|$. Or, comme pour le champ magnétique, un tel maximum ne peut pas exister dans le vide. Un piège purement électrostatique ne peut donc pas exister.

On peut néanmoins contourner cette limite en utilisant le champ électrique créé par un laser. Dans ce cas, il est possible d'obtenir un maximum de $|E(\mathbf{r}, t)|$ dans le vide, en un point où le laser est focalisé. On peut ainsi piéger de manière stable des atomes, ou plus généralement des particules neutres (microsphères de verre ou de latex, molécules) au foyer du laser. Pour que l'expression (3.2) soit valable, il faut que la fréquence du laser soit très faible devant la fréquence de résonance de l'atome. On peut considérer dans ce cas que la polarisabilité de l'atome à la fréquence du laser est voisine de la polarisabilité statique. C'est par exemple le cas dans des expériences récentes dans lesquelles on a confiné des atomes ($\lambda_{\text{atome}} \sim 1 \mu\text{m}$) avec un laser CO_2 , de longueur d'onde $\lambda_{\text{laser}} \sim 10 \mu\text{m}$.

On peut également utiliser de la lumière quasi-résonnante pour piéger des atomes. Il faut alors utiliser la polarisabilité dynamique $\alpha(\lambda_{\text{laser}})$ de l'atome pour évaluer le puits de potentiel dipolaire correspondant (cf. cours précédents). Rappelons qu'un laser désaccordé sur le rouge de la transition atomique ($\lambda_{\text{laser}} > \lambda_{\text{atome}}$) attire les atomes vers les zones de haute intensité lumineuse, et un laser désaccordé sur le bleu ($\lambda_{\text{laser}} < \lambda_{\text{atome}}$) les repousse.

3 Le piège magnéto-optique

La force de pression de radiation constitue un moyen d'action remarquablement efficace sur des atomes neutres. Avec des intensités de quelques milliwatts par centimètre carré, on exerce sur les atomes des forces importantes, dépassant par quatre ou cinq ordres de grandeur le poids de ces atomes. Il est donc naturel de chercher à tirer parti de cette force non seulement pour refroidir les atomes (refroidissement Doppler), mais pour les piéger.

Une première tentative consiste à partir de deux faisceaux laser divergents comme indiqué sur la figure 5. Il est bien clair que l'on obtient ainsi le long de l'axe des faisceaux un confinement stable au point O . Si l'atome s'écarte vers la droite ou vers la gauche, le déséquilibre des pressions de radiation le rappelle vers ce point. Peut-on généraliser cette configuration à trois dimensions, en disposant par exemple trois paires de faisceaux laser divergents se propageant respectivement le long des axes x , y et z ? La réponse est négative, pour une raison très voisine de l'impossibilité du piège électrostatique liée au théorème de Gauss. La force de pression de radiation varie à peu près comme $1/r^2$, où r est la distance au foyer du laser. Cette force a donc la même dépendance spatiale que la force électrostatique créée par une charge localisée au foyer du faisceau laser, d'où

⁸On pourra s'en convaincre par une analyse du déplacement du niveau fondamental, calculé au deuxième ordre de la théorie des perturbations.

le résultat. On peut rendre ce raisonnement quantitatif en supposant que la force de pression de radiation est proportionnelle au vecteur de Poynting, et en vérifiant que la divergence de ce vecteur est nulle.

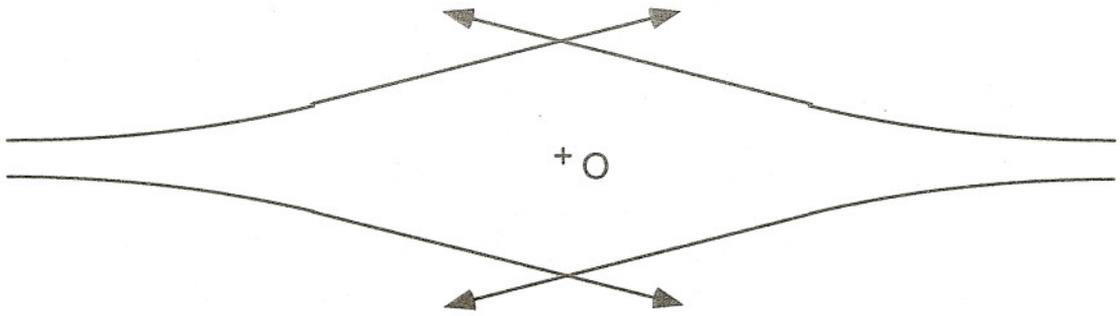


FIG. 5: Configuration laser piégeant les atomes le long de l'axe des faisceaux lumineux. Peut-on généraliser une telle configuration à trois dimensions ?

Pour piéger des atomes par pression de radiation, il faut briser cette proportionnalité entre force de pression de radiation et vecteur de Poynting. Plusieurs méthodes sont possibles, la plus simple et la plus performante à ce jour étant d'utiliser un champ magnétique inhomogène : c'est le piège magnéto-optique, dont nous décrivons ci-dessous le fonctionnement pour une transition atomique simple : un état fondamental f de moment cinétique nul, et un état excité e de moment cinétique 1.

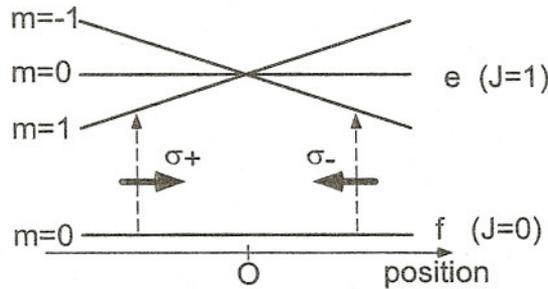


FIG. 6: Principe du piège magnéto-optique : la résultante des deux forces de pression de radiation dans un gradient de champ magnétique permet de créer une force de rappel vers le centre.

Considérons la configuration à une dimension représentée sur la figure 6. On dispose un gradient de champ magnétique tel que $B = 0$ au point où l'on souhaite piéger les atomes. Le champ B est positif si $z > 0$, et négatif si $z < 0$. On éclaire les atomes avec deux ondes contre-propageantes, de même intensité et de même fréquence. Ces deux ondes sont supposées désaccordées sur le rouge de la transition atomique, ce qui assure un effet de refroidissement Doppler. De plus l'onde venant de gauche est polarisée σ_+ , et induit la transition $f \rightarrow e, m = 1$. L'onde venant de droite est polarisée σ_- et induit la transition $f \rightarrow e, m = -1$. Par symétrie, un atome placé au point O ressent une force moyenne nulle. Au contraire, un atome situé à gauche de O est résonnant essentiellement avec l'onde venant de la gauche et ressent donc une force de pression de radiation résultante dirigée vers O . Il en va de même pour un atome situé sur la droite. La force de rappel au voisinage du point $z = 0$ s'écrit simplement :

$$f = -\kappa z \quad \text{avec} \quad \kappa = k\mu b' s_0 \frac{-2\Gamma\delta}{\delta^2 + \Gamma^2/4} \quad (3.3)$$

où l'on a repris les notations de l'équation (1.26). En particulier s_0 représente le paramètre de saturation de chaque onde (s_0 est supposé petit devant 1 pour qu'on puisse ajouter les deux forces de pression de radiation). Le gradient de champ magnétique est noté b' et μ représente le moment magnétique de l'atome dans l'état excité. Si on suppose que le désaccord δ est choisi égal à $-\Gamma/2$ (optimisation du refroidissement Doppler), on trouve une extension du nuage atomique à l'équilibre égale à :

$$\langle z^2 \rangle = \frac{k_B T}{\kappa} \sim \frac{\hbar \Gamma}{k \mu b'} \quad (3.4)$$

où on a choisi $s_0 = 1/4$. En prenant $b' = 0.1$ T/m (valeur typique), on est conduit à une taille de quelques dizaines de microns pour l'atome de rubidium.

Ce mécanisme se généralise sans problème à trois dimensions, en utilisant trois paires d'onde de polarisation circulaire et d'hélicité judicieusement choisie. C'est un piège robuste : un équilibrage imparfait entre deux ondes contre-propageantes se traduit seulement par un léger décalage du centre du piège. On peut alimenter ce piège par un jet atomique ralenti ou le faire fonctionner simplement au centre d'une enceinte contenant le gaz que l'on souhaite piéger. Un atome qui entre dans le volume défini par les trois paires d'onde avec une vitesse relativement faible (de 20 à 30 m/s pour des pièges typiques) est freiné par effet Doppler, puis attiré vers le centre par la force (3.3).

On peut capturer en régime stationnaire jusqu'à 10^{10} atomes si on dispose d'une grande puissance laser et si on utilise de gros faisceaux de capture. La dynamique de ces pièges à grand nombre d'atomes est complexe, en raison des interactions entre atomes, liées au fait que la lumière rayonnée par un atome peut être réabsorbée par un autre. La taille des nuages à l'équilibre est notablement plus grande que celle déduite de (3.4) en raison de cette répulsion effective entre atomes, le diamètre du nuage piégé pouvant atteindre 1 cm.

4 Peut-on refroidir une assemblée d'atomes avec une force dérivant d'un potentiel ?

Ce problème a fait couler beaucoup d'encre et a donné lieu à plusieurs publications erronées⁹. Une partie des difficultés s'élimine simplement lorsque l'on prend soin de définir ce que l'on entend par refroidissement. Nous allons voir ci-dessous trois situations bien distinctes :

- un filtrage, qui ne conserve que les particules de faible vitesse,
- une conversion d'information de l'espace des positions vers l'espace des vitesses,
- un gain réel dans l'espace des phases.

Dans les trois cas, la température de l'échantillon restant est plus basse que la température initiale. Néanmoins seul le troisième exemple correspond à une augmentation de la dégénérescence quantique du système.

Le refroidissement considéré est parfois un simple filtrage : il est bien clair que l'on peut sélectionner, dans une assemblée de particules, les moins énergétiques. Cette sélection aura par définition une énergie moyenne plus faible que l'assemblée de départ et sera en ce sens "plus froide". Un exemple de filtrage, à une dimension, est représenté sur la figure 7. On dispose sur un jet atomique une fente ne transmettant que les atomes ayant une vitesse transverse très faible¹⁰. Après la fente, le jet a une "température" transverse plus basse qu'avant la fente. Le potentiel

⁹Pour une étude critique de ces publications, voir W. Ketterle and D. Pritchard, Phys. Rev. A **46**, 4051 (1992).

¹⁰On néglige ici tout phénomène de diffraction.

créé par la fente (réfléchissant si $|x| > a$, transmettant si $|x| \leq a$) a , en un certain sens, refroidit le jet atomique. Toutefois, il est bien clair que le nombre d'atomes dans une classe de vitesse proche de $v_{\text{transverse}} = 0$ n'a pas été augmenté par un tel diaphragme. On a seulement enlevé les atomes des classes de vitesse plus grande. Il est donc préférable de parler de filtrage plutôt que refroidissement dans ce cas.

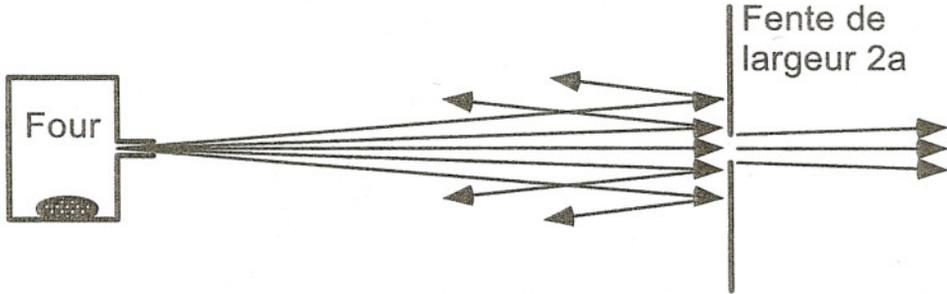


FIG. 7: Une fente placée sur un jet atomique sélectionne la partie des atomes ayant une très faible vitesse transverse. Ce mécanisme est un filtrage plutôt qu'un refroidissement.

Un second type de refroidissement par force dérivant d'un potentiel apparaît lorsque l'on considère une variation temporelle de ce potentiel. Plaçons-nous à une dimension et considérons une assemblée d'atomes thermalisée dans un potentiel harmonique de pulsation ω . On a donc initialement

$$\frac{1}{2}m \Delta v_i^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 \Delta x_i^2 = \frac{1}{2}k_B T \quad \text{soit} \quad \Delta v_i = \omega \Delta x_i$$

Supposons qu'on diminue brusquement la raideur du potentiel à l'instant $t = 0$, la pulsation devenant $\omega' \ll \omega$ (cf. figure 8). Une particule de position x_0 et de vitesse v_0 à l'instant initial aura à l'instant t la position x_t et la vitesse v_t données par :

$$x_t = x_0 \cos(\omega' t) + \frac{v_0}{\omega'} \sin(\omega' t) \quad v_t = -x_0 \omega' \sin(\omega' t) + v_0 \cos(\omega' t)$$

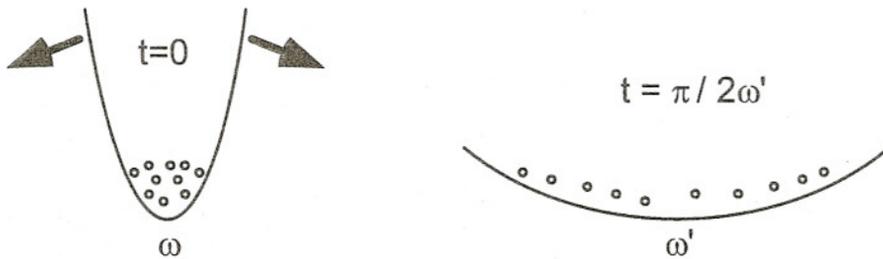


FIG. 8: Refroidissement d'une assemblée d'atomes par ouverture du potentiel confinant. La température est diminuée, mais l'extension spatiale est augmentée. Il n'y a pas de gain dans l'espace des phases.

En particulier la dispersion en vitesse à l'instant t s'écrit :

$$\Delta v_t^2 = \Delta x_i^2 \omega'^2 \sin^2(\omega' t) + \Delta v_i^2 \cos^2(\omega' t)$$

puisque'il n'y a pas de corrélations entre position et vitesse à l'instant initial. Choisissons l'instant $t_f = \pi/(2\omega')$. On a alors :

$$t_f = \frac{\pi}{2\omega'} \quad \Delta v_f^2 = \Delta x_i^2 \omega'^2 = \Delta v_i^2 \frac{\omega'^2}{\omega^2} \ll \Delta v_i^2$$

De même, on trouve $\Delta x_f = \Delta v_i / \omega' = \Delta x_i (\omega / \omega') \gg \Delta x_i$. Si on coupe complètement le potentiel à l'instant t_f , on dispose d'une assemblée d'atomes beaucoup plus froide (par un facteur $(\omega' / \omega)^2$) qu'au départ. Il ne s'agit pas d'un filtrage comme dans l'exemple précédent puisqu'il n'y a pas eu de particules éliminées. Simplement, on a converti une bonne connaissance de la position initiale du gaz atomique ($\Delta x_i \ll \Delta x_f$) en une bonne connaissance de la vitesse finale atomique ($\Delta v_f \ll \Delta v_i$). Il y a donc bien refroidissement, puisque la vitesse quadratique moyenne a diminué, mais la densité dans l'espace des phases n'a pas variée. En effet le produit $\Delta x_f \Delta v_f$ reste égal au produit $\Delta x_i \Delta v_i$. Ce résultat est l'analogie mécanique de la conservation de l'étendue dans un système optique.

Cette conservation de la densité dans l'espace des phases peut être établie de manière très générale dans un système où l'on peut négliger les collisions et les interactions entre les N particules. On peut dans ce cas considérer l'opérateur densité ρ pour une particule. Cet opérateur est hermitien et donc diagonalisable. Sa plus grande valeur propre p_{\max} détermine l'occupation maximale $O_{\max} = N p_{\max}$ d'un état quantique donné, c'est-à-dire la généralisation quantique de la densité maximale dans l'espace des phases. L'évolution de ρ , donnée par $i\hbar\dot{\rho} = [H(t), \rho(t)]$, est unitaire si l'on néglige les interactions entre particules et si l'on agit sur le système uniquement par l'intermédiaire de potentiels (dépendant éventuellement du temps). Par conséquent les valeurs propres de ρ ne sont pas changées lors de l'évolution temporelle. En particulier O_{\max} ne peut pas augmenter.

Cette conservation de O_{\max} n'est plus vraie si des collisions peuvent avoir lieu entre particules. Dans ce cas, il est faux de considérer que l'évolution de la matrice densité à un corps est unitaire. Le refroidissement évaporatif, étudié précédemment dans ce cours, fournit un exemple de situation où l'on peut augmenter O_{\max} en modifiant le potentiel de confinement et en tirant parti des collisions entre particules. Ce gain dans l'espace des phases se fait alors au prix d'une perte de particules.

Pour terminer ce chapitre, nous allons donner un autre exemple de gain dans l'espace des phases, obtenu également par des forces dérivant d'un potentiel, et tirant parti des collisions entre particules : il s'agit du *refroidissement stochastique*. Considérons une assemblée de N particules, supposées à l'instant initial à l'équilibre thermodynamique correspondant à une température T . On se limite pour simplifier à un mouvement à une dimension, dans une "boîte" de longueur L . On mesure à $t = 0$ la vitesse totale du gaz $V = \sum_i v_i$, pour $i = 1, \dots, N$. En moyenne chaque vitesse v_i est nulle, son module étant de l'ordre de $v_{\text{th}} = (k_B T / m)^{1/2}$. Le résultat de la mesure pour V est donc également nul en moyenne, et son ordre de grandeur est $v_{\text{th}} \sqrt{N}$. On suppose que l'on applique immédiatement après la mesure une force sur le gaz pour faire passer chaque vitesse de v_i à $v_i - \frac{V}{N}$, ce qui a pour effet de faire passer la somme des vitesses v_i de V à 0. Cette force est appliquée pendant un intervalle de temps arbitrairement court, de sorte que l'on peut négliger toute collision entre particules pendant cette durée. L'énergie cinétique du gaz après le cycle "mesure de V - action de la force" est changée par :

$$E_{\text{ini}} = \sum_i \frac{1}{2} m v_i^2 \longrightarrow E_{\text{fin}} = \sum_i \frac{1}{2} m \left(v_i - \frac{V}{N} \right)^2$$

En développant le carré et en moyennant sur les vitesses des différentes particules (en particulier $\overline{v_i v_j} = 0$ si $i \neq j$), on trouve :

$$\bar{E}_{\text{ini}} = \frac{1}{2} N k_B T \longrightarrow \bar{E}_{\text{fin}} = \frac{1}{2} (N - 1) k_B T$$

On laisse ensuite le système évoluer librement dans la boîte. Après quelques collisions élastiques entre particules (on néglige tout échange d'énergie avec les parois de la boîte), le système est

de nouveau dans un état d'équilibre thermodynamique. Puisque l'énergie cinétique totale est conservée dans cette phase, le nouvel état d'équilibre correspond à une température $T' = T \frac{N-1}{N}$. On peut alors recommencer la séquence décrite précédemment : "mesure de V – action en retour de la force". On voit que l'on va diminuer ainsi continuellement la température du système, sans perdre de particules et sans changer le volume occupé par ces particules. On augmente donc la densité dans l'espace des phases. Le temps caractéristique de variation de la température est $N\tau_{\text{therm}}$, où τ_{therm} est le temps nécessaire pour la thermalisation.

Ce mécanisme de refroidissement n'a encore jamais été mis en œuvre pour des atomes neutres. En revanche il joue un rôle essentiel pour des particules chargées préparées dans des accélérateurs. La mesure de V se fait en déterminant le courant du faisceau de particules, et la force corrigeant les vitesses est une force électromagnétique.

Chapitre 4

Condensats atomiques

Le but de ce cours est d'étudier l'équilibre d'une assemblée de bosons refroidis et piégés¹. Nous considérerons d'abord le cas d'un gaz parfait, confinés dans un potentiel harmonique, puis dans une boîte. Nous montrerons la singularité découverte par Einstein, qui apparaît lorsque la densité dans l'espace des phases dépasse une valeur critique. Nous décrirons ensuite quelques expériences récentes ayant mis en évidence ce phénomène de condensation. Nous passerons enfin à la description théorique d'un gaz de Bose en interaction, refroidi très en dessous du seuil de condensation. Nous établirons l'équation de Gross-Pitaevskii, qui permet de déterminer, à l'approximation de Hartree, la distribution d'équilibre à température nulle. Nous verrons comment la longueur de diffusion apparaît comme le paramètre essentiel régissant cet équilibre. Selon le signe de cette longueur de diffusion, on peut avoir un condensat avec un nombre arbitrairement élevé d'atomes ($a > 0$), ou au contraire un nombre borné supérieurement à quelques centaines d'atomes ($a < 0$).

1 Les statistiques quantiques

1.1 Fonction de partition grand-canonique

Pour décrire un ensemble de particules quantiques indiscernables, l'ensemble statistique le plus commode est l'ensemble grand-canonique. Il est obtenu en supposant que le système considéré peut échanger de l'énergie et des particules avec un réservoir, supposé beaucoup plus grand². La présence de ce réservoir fixe le nombre moyen de particules N et l'énergie moyenne U . L'état d'équilibre est alors déterminé en choisissant l'opérateur densité du système $\hat{\rho}$ qui

¹Comme références générales sur ce problème, indiquons notamment les cours de C. Cohen-Tannoudji au Collège de France depuis 1996, le livre correspondant à l'Ecole d'été Enrico Fermi de juillet 1998, Cours CXL, "Bose-Einstein condensation in gases", édité par M. Inguscio, S. Stringari, et C. Wieman, et le livre correspondant à l'Ecole des Houches d'août 1999, Cours LXXII, "Coherent atomic matter waves", édité par R. Kaiser, C. Westbrook, et F. David.

²Même si ce réservoir n'existe pas en pratique, ceci importe peu. En effet, on peut montrer que les prédictions des différents ensembles (micro-canonique, canonique, ou grand-canonique) coïncident, pourvu qu'on se limite au calcul des valeurs moyennes des grandeurs thermodynamiques. En revanche, des différences peuvent apparaître au niveau du calcul des fluctuations, et il faut alors revenir précisément à la situation physique concrètement envisagée pour faire des prédictions pertinentes.

maximise l'information manquante, ou *entropie statistique* :

$$S(\hat{\rho}) = -k_B \text{Tr}(\hat{\rho} \ln(\hat{\rho})) , \quad (4.1)$$

compte-tenu des deux contraintes :

$$\langle \hat{N} \rangle = N \quad \langle \hat{H} \rangle = U . \quad (4.2)$$

Cette maximisation sous contraintes se traite simplement dans le formalisme des multiplicateurs de Lagrange. On obtient :

$$\hat{\rho} = \frac{e^{-\alpha \hat{N} - \beta \hat{H}}}{Z_G} \quad \text{avec} \quad Z_G = \text{Tr} \left(e^{-\alpha \hat{N} - \beta \hat{H}} \right) . \quad (4.3)$$

La fonction Z_G est appelée *fonction de partition grand-canonique*. Les multiplicateurs de Lagrange α et β sont associés aux contraintes sur $\langle \hat{N} \rangle$ et $\langle \hat{H} \rangle$. Le paramètre β est relié à la température T par $\beta = (k_B T)^{-1}$. Le paramètre α est relié au potentiel chimique μ (énergie à fournir pour ajouter une particule) par $\alpha = -\beta\mu$, ainsi qu'à la fugacité $z = e^{-\alpha} = e^{\beta\mu}$. La détermination des valeurs de z et β qui vérifient les contraintes (4.2) se fait par l'intermédiaire de :

$$N = z \frac{\partial}{\partial z} \ln Z_G(z, \beta, V) , \quad (4.4)$$

$$U = - \frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z_G(z, \beta, V) . \quad (4.5)$$

qu'il suffit d'inverser pour obtenir z et β comme fonctions de N et U .

Une fois Z_G déterminée, toutes les grandeurs thermodynamiques s'en déduisent par simple dérivation. Ainsi la pression se détermine à partir de :

$$P = k_B T \frac{\partial}{\partial V} \ln Z_G(z, \beta, V) . \quad (4.6)$$

1.2 Le gaz parfait quantique

Le calcul explicite de Z_G , qui permet d'obtenir des résultats explicites à partir d'expressions comme (4.6) est très ardu dans le cas général d'un fluide en interaction. En revanche, le cas du gaz parfait peut être traité exactement d'une manière remarquablement simple, comme nous allons le voir maintenant.

Pour un système de N particules n'interagissant pas, l'hamiltonien total est une somme d'hamiltoniens à un corps :

$$\hat{H} = \hat{h}_1 + \hat{h}_2 + \dots + \hat{h}_N . \quad (4.7)$$

Notons $\{|\lambda\rangle\}$ une base de vecteurs propres de l'hamiltonien à un corps \hat{h} , et ϵ_λ l'énergie associée à $|\lambda\rangle$:

$$\hat{h} |\lambda\rangle = \epsilon_\lambda |\lambda\rangle . \quad (4.8)$$

Passons maintenant en seconde quantification, et introduisons les opérateurs de destruction a_λ et de création a_λ^\dagger d'une particule dans l'état individuel λ . L'hamiltonien total et l'opérateur *nombre de particules* s'écrivent :

$$\hat{H} = \sum_\lambda \epsilon_\lambda a_\lambda^\dagger a_\lambda \quad \hat{N} = \sum_\lambda a_\lambda^\dagger a_\lambda . \quad (4.9)$$

Une base d'états propres de l'espace de Fock est $\{|N_\lambda, N_{\lambda'}, N_{\lambda''}, \dots\rangle\}$ où les nombres d'occupation N_λ des états quantiques individuels (i) valent 0 ou 1 dans le cas de fermions, (ii) sont des entiers positifs ou nuls quelconques dans le cas de bosons. On note par commodité ℓ un ensemble donné $\{N_\lambda\} : |\ell\rangle \equiv |N_\lambda, N_{\lambda'}, N_{\lambda''}, \dots\rangle$. On a donc

$$\hat{N} |\ell\rangle = N_\ell |\ell\rangle \quad \text{avec} \quad N_\ell = \sum_{\lambda} N_\lambda, \quad (4.10)$$

$$\hat{H} |\ell\rangle = E_\ell |\ell\rangle \quad \text{avec} \quad E_\ell = \sum_{\lambda} N_\lambda \epsilon_\lambda. \quad (4.11)$$

La fonction de partition grand-canonique Z_G donnée en (4.3) se calcule aisément dans la base $|\ell\rangle$:

$$\begin{aligned} Z_G &= \sum_{\ell} e^{-\alpha N_\ell - \beta E_\ell} = \sum_{N_\lambda, N_{\lambda'}, \dots} e^{-(\alpha + \beta \epsilon_\lambda) N_\lambda} \times e^{-(\alpha + \beta \epsilon_{\lambda'}) N_{\lambda'}} \times e^{-(\alpha + \beta \epsilon_{\lambda''}) N_{\lambda''}} \times \dots \\ &= \prod_{\lambda} \zeta_\lambda, \end{aligned} \quad (4.12)$$

où on a posé :

$$\zeta_\lambda = \sum_{N_\lambda} e^{-(\alpha + \beta \epsilon_\lambda) N_\lambda}. \quad (4.13)$$

Cette factorisation de Z_G en produit de fonctions de partition, relatives chacune à un état quantique individuel λ est l'avantage majeur de l'utilisation du formalisme grand-canonique.

Cas des fermions : statistique de Fermi-Dirac

Pour des fermions, les valeurs possibles de N_λ dans la somme (4.13) sont $N_\lambda = 0$ ou $N_\lambda = 1$. On a donc :

$$\zeta_\lambda^{(F)} = 1 + e^{-\alpha - \beta \epsilon_\lambda} = 1 + z e^{-\beta \epsilon_\lambda}. \quad (4.14)$$

La fonction de partition vérifie :

$$\ln Z_G = \sum_{\lambda} \ln \left(1 + z e^{-\beta \epsilon_\lambda} \right). \quad (4.15)$$

En utilisant (4.4), on en déduit l'expression du nombre de particules total dans le système :

$$N = \sum_{\lambda} N_\lambda \quad \text{avec} \quad N_\lambda = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_\lambda - \mu)} + 1}. \quad (4.16)$$

Pour un système de température fixée, le potentiel chimique peut prendre n'importe quelle valeur, positive ou négative. Une valeur grande et négative correspond à un nombre moyen de particules très faible, donc à un système bien décrit par la statistique de Boltzmann classique :

$$\mu \longrightarrow -\infty \quad : \quad N_\lambda \simeq z e^{-\beta \epsilon_\lambda}. \quad (4.17)$$

Une valeur positive et grande devant $k_B T$ correspond au contraire à un nombre de particules très élevé, et donc à un gaz de Fermi fortement dégénéré. Les nombres d'occupation N_λ valent presque 1 si $\epsilon_\lambda < \mu$ et 0 sinon.

Cas des bosons : statistique de Bose-Einstein

Pour des bosons, le calcul de (4.13) se ramène à une série géométrique, soit :

$$\zeta_{\lambda}^{(B)} = \frac{1}{1 - e^{-\alpha - \beta\epsilon_{\lambda}}} = \frac{1}{1 - ze^{-\beta\epsilon_{\lambda}}}. \quad (4.18)$$

Le nombre de particules est alors donné par :

$$N = \sum_{\lambda} N_{\lambda} \quad \text{avec} \quad N_{\lambda} = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_{\lambda} - \mu)} - 1}. \quad (4.19)$$

Dans ce cas le potentiel chimique peut prendre toutes les valeurs depuis $-\infty$ jusqu'à ϵ_{\min} , qui représente l'énergie du niveau fondamental de \hat{h} . Pour un potentiel chimique au delà de cette valeur, la population de ce niveau fondamental deviendrait négative, ce qui n'a bien sûr aucun sens. Comme pour le gaz de Fermi, les valeurs grandes et négatives de μ correspondent à un gaz bien décrit par la physique classique (distribution de Boltzmann) :

$$\mu \longrightarrow -\infty \quad : \quad N_{\lambda} \simeq ze^{-\beta\epsilon_{\lambda}}. \quad (4.20)$$

2 La condensation de Bose-Einstein dans un piège harmonique

2.1 La saturation des niveaux excités

Considérons la statistique de Bose-Einstein donnée en (4.19). Quand μ tend vers ϵ_{\min} , à température fixée, le nombre de particules N_0 dans le niveau fondamental de \hat{h} tend vers l'infini :

$$\mu \longrightarrow \epsilon_{\min} \quad : \quad N_0 \simeq \frac{k_B T}{\epsilon_{\min} - \mu} \quad (4.21)$$

Si le gaz est confiné dans une enceinte de taille finie ou piégé par un potentiel harmonique, le spectre de \hat{h} est discret. Le nombre de particules N' dans les niveaux excités de \hat{h} est borné supérieurement :

$$N' = \sum_{\lambda}' \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_{\lambda} - \mu)} - 1} < N'_{\max} = \sum_{\lambda}' \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_{\lambda} - \epsilon_{\min})} - 1}, \quad (4.22)$$

où \sum' représente la somme sur tous les états propres λ de \hat{h} sauf l'état fondamental.

Dans ce qui suit, nous appellerons *nombre de saturation* la valeur de N'_{\max} . L'existence de ce nombre, qui représente une borne supérieure au nombre de particules que l'on peut disposer dans les états autres que le niveau fondamental, peut être considérée comme une signature de la condensation de Bose-Einstein : si, à température fixée, on place dans le piège un nombre de particules N supérieur à N'_{\max} , on est certain qu'au moins $N - N'_{\max}$ particules iront se loger sur le niveau fondamental. Cet effet suffit à rendre compte des phénomènes observés dans un piège harmonique.

La saturation des niveaux excités de \hat{h} ne doit pas être identifiée à une transition de phase. Pour introduire cette notion, il faudra prendre la limite thermodynamique du système considéré, et voir si la densité correspondant aux N' atomes disposés sur les niveaux excités reste elle aussi bornée. La réponse à cette question dépendra fortement de la dimensionalité du système. Auparavant, nous allons étudier l'application de (4.22) au cas d'un piège harmonique, pour lequel cette notion de limite thermodynamique n'est pas nécessaire.

2.2 La saturation dans un piège harmonique isotrope

Pour un piège harmonique isotrope de fréquence $\nu = \omega / 2\pi$, les niveaux d'énergie de \hat{h} sont caractérisés par les trois nombres quantiques $(n_x, n_y, n_z) \equiv \mathbf{n}$ caractérisant l'état de vibration de l'oscillateur selon les trois axes. L'énergie correspondante est :

$$\epsilon_n = \hbar\omega \left(n_x + n_y + n_z + \frac{3}{2} \right) \quad \epsilon_{\min} = \frac{3}{2} \hbar\omega . \quad (4.23)$$

D'autre part, chaque niveau d'énergie est a une dégénérescence g_n donnée par :

$$g_n = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \quad n = n_x + n_y + n_z . \quad (4.24)$$

Le nombre de saturation s'écrit alors simplement :

$$N'_{\max} = \sum_{(n_x, n_y, n_z) \neq (0,0,0)} \frac{1}{e^{(n_x+n_y+n_z)\xi} - 1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_n}{e^{n\xi} - 1} \quad \text{avec} \quad \xi = \frac{\hbar\omega}{k_B T} . \quad (4.25)$$

Dans la limite où le quantum de vibration $\hbar\omega$ est très petit devant l'énergie thermique $k_B T$, soit $\xi \ll 1$, on peut calculer de manière approchée cette somme discrète en la remplaçant par une intégrale. On trouve :

$$N'_{\max} \simeq 1.202 \left(\frac{k_B T}{\hbar\omega} \right)^3 . \quad (4.26)$$

La qualité de cette approximation peut être évaluée sur la figure 1 qui donne la variation avec $k_B T / \hbar\omega$ de la somme discrète (4.25) et du résultat approché (4.26). Quand $k_B T$ devient supérieur à $25 \hbar\omega$, les deux résultats diffèrent de moins de 5%. En pratique une fréquence typique de piège harmonique est de l'ordre de 100 Hz, soit $\hbar\nu / k_B \sim 5$ nK. Pour un gaz refroidi à 200 nK, le nombre maximal d'atomes en dehors de l'état fondamental est alors de 80 000.

Démonstration de l'approximation (4.26) :

Quand une fonction $f(x)$ varie lentement sur un intervalle de largeur 1, on a l'approximation :

$$f(1) + f(2) + f(3) + \dots \simeq \int_{1/2}^{3/2} f(u) du + \int_{3/2}^{5/2} f(u) du + \int_{5/2}^{7/2} f(u) du + \dots \quad (4.27)$$

Pour la somme (4.25), cette hypothèse de variation lente correspond au cas $\xi \ll 1$. On a alors :

$$N'_{\max} = \frac{1}{2} \int_{1/2}^{\infty} \frac{(u+1)(u+2) du}{e^{u\xi} - 1} , \quad (4.28)$$

soit, en posant $x = u\xi$:

$$N'_{\max} \simeq \frac{1}{2\xi^3} \int_{\xi/2}^{\infty} \frac{(x+\xi)(x+2\xi) dx}{e^x - 1} . \quad (4.29)$$

Quand on développe le numérateur de l'intégrand en $x^2 + 3x\xi + 2\xi^2$, il est simple de montrer que, pour $\xi \ll 1$, la contribution essentielle provient de x^2 car la fonction à intégrer prend des valeurs significatives pour $x \sim 1$. Gardons uniquement ce terme, et faisons tendre la borne inférieure de l'intégrale ($\xi/2$) vers 0, ce qui est possible puisque la fonction à intégrer est continue en 0. On trouve alors :

$$N'_{\max} \simeq \frac{1}{2\xi^3} \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{e^x - 1} , \quad (4.30)$$

ou encore

$$N'_{\max} \simeq \left(\frac{k_B T}{\hbar\omega} \right)^3 g_3(1) . \quad (4.31)$$

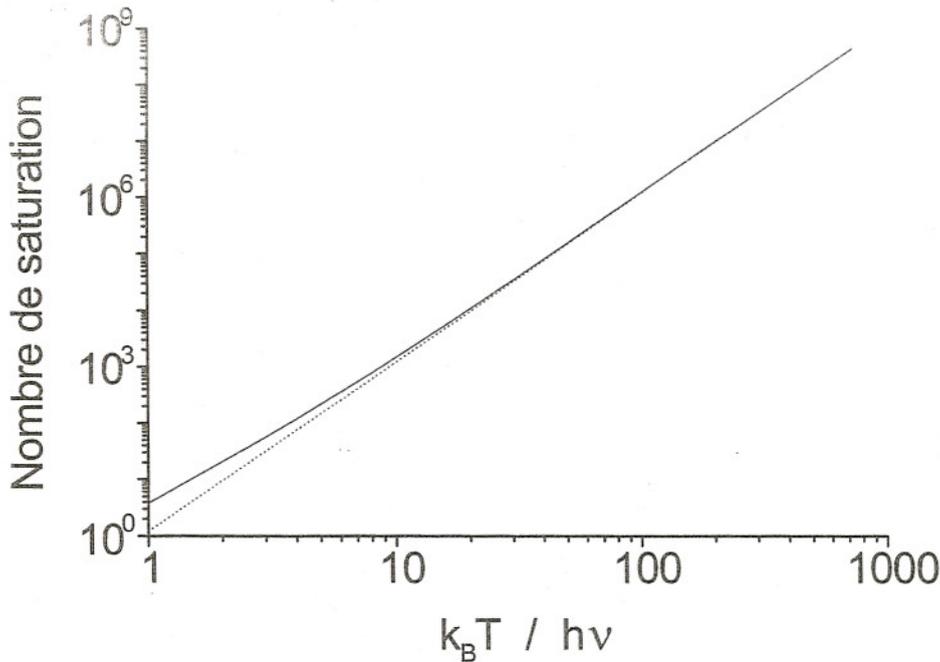


FIG. 1: Nombre de saturation dans un piège harmonique tri-dimensionnel isotrope. La courbe en trait plein donne le résultat exact (4.25) et la courbe pointillé représente le résultat approché (4.26).

Nous avons introduit ici les deux fonctions spéciales :

$$g_{\alpha}(z) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{z^{\ell}}{\ell^{\alpha}} \quad I_{\alpha}(z) = \int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha-1} dx}{z^{-1}e^x - 1}, \quad (4.32)$$

reliées par la relation :

$$I_{\alpha}(z) = \Gamma(\alpha) g_{\alpha}(z) \quad \text{avec} \quad \Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} y^{\alpha-1} e^{-y} dy. \quad (4.33)$$

On a $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha)$ avec notamment :

$$\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1 \quad , \quad \Gamma(3/2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad , \quad \Gamma(3) = 2 \quad ,$$

et

$$g_{3/2}(1) \simeq 2.612 \quad , \quad g_2(1) = \frac{\pi^2}{6} \quad , \quad g_3(1) \simeq 1.202 \quad .$$

Pour obtenir une meilleure précision sur la valeur de la température critique, on peut chercher à évaluer les contributions des termes $3x\xi$ et $2\xi^2$ intervenant au numérateur de (4.29). Pour le terme en $3x\xi$ on peut encore étendre la borne inférieure de l'intégrale à 0 et on obtient une correction en ξ^{-2} à N'_{\max} . Pour le terme en $2\xi^2$, la fonction à intégrer diverge comme $1/x$ en 0, et il faut garder la borne inférieure égale à $\xi/2$. La contribution dominante pour ce dernier terme est $\xi^{-1} \ln \xi$. Notons toutefois que ces développements plus raffinés que (4.31) sont en pratique peu intéressants. Si on cherche à déterminer le nombre de saturation avec une très bonne précision dans le cas où $k_B T$ n'est pas très grand devant $\hbar\omega$, il est plus sûr et plus rapide de revenir à la série (4.25).

2.3 La distribution d'équilibre dans un piège harmonique

Disposant du nombre de saturation pour un piège harmonique, nous pouvons décrire l'état d'équilibre d'un système de N bosons dans ce piège, quand on varie sa température. Nous nous limiterons dans la discussion qui suit au cas d'un nombre d'atomes grand devant 1. Ce cas correspond à la ligne inférieure de la figure 2. La ligne supérieure et la ligne médiane de la figure 2 donnent une indication sur les modifications à apporter pour des nombres d'atomes plus faibles ($N = 10$ et $N = 1000$ respectivement).

La température critique pour laquelle $N'_{\max} = N$ se déduit de (4.26). Elle est donnée par :

$$k_B T_c = 0.94 \hbar \omega N^{1/3} \quad (4.34)$$

et elle est donc grande devant $\hbar \omega / k_B$: les expressions approchées calculées au paragraphe précédent sont valables. Pour simplifier les notations, nous décalerons l'origine des énergies de $3/2 \hbar \omega$ pour que l'énergie du niveau fondamental soit 0.

A haute température, le nombre de saturation N'_{\max} (proportionnel à T^3) est bien supérieur à N . Le gaz n'est alors que très faiblement dégénéré et on peut lui appliquer la statistique de Boltzmann (4.20). La fugacité est déterminée en utilisant $N = \sum_{\mathbf{n}} N_{\mathbf{n}} \simeq \sum_{\mathbf{n}} g_{\mathbf{n}} z e^{-\xi_{\mathbf{n}}}$, ce qui donne après sommation d'une triple série géométrique :

$$z = N \left(1 - e^{-\xi}\right)^3 \simeq N \xi^3 \simeq 1.202 \frac{N}{N'_{\max}} \ll 1, \quad (4.35)$$

dont on déduit l'occupation de chaque niveau :

$$N_{n_x, n_y, n_z} = N e^{-\xi(n_x + n_y + n_z)} \left(1 - e^{-\xi}\right)^3 \simeq N \xi^3 e^{-\xi(n_x + n_y + n_z)}. \quad (4.36)$$

En particulier, la proportion d'atomes dans l'état fondamental N_0/N est donnée par $\xi^3 = (\hbar \omega / k_B T)^3$ et est très petite devant 1. Les distributions en position et en vitesse des atomes sont des gaussiennes, de variances respectives $k_B T / (m \omega^2)$ et $k_B T / m$.

Quand la température s'abaisse et se rapproche de T_c , la fugacité z croît et se rapproche de 1 (figure 2). Cette fugacité est obtenue par résolution de l'équation transcendante :

$$N = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g_n}{z^{-1} e^{\xi n} - 1} \simeq N_0 + \xi^{-3} g_3(z) \quad \text{avec} \quad N_0 = \frac{z}{1-z} \quad (4.37)$$

où on a effectué une approximation similaire à (4.27-4.30). Notons qu'il est essentiel d'exclure la contribution du niveau fondamental dans ce passage d'une somme discrète à une intégrale. Si on ne le fait pas, la borne inférieure de l'intégrale remplaçant (4.28) vaut $-1/2$ et l'intégrale peut diverger si z est assez proche de 1.

Pour $T = T_c$, la proportion d'atomes dans l'état fondamental est encore faible devant 1, mais la population des niveaux excités est quasiment saturée. Notons que de très nombreux niveaux ont une occupation significative en ce point. Le nombre quantique de vibration n_v à partir duquel le taux d'occupation devient inférieur à 1 est de l'ordre de $k_B T / \hbar \omega$, soit $n_v \sim N^{1/3} \gg 1$. Il ne faut donc pas confondre la condensation qui se produit en ce point avec le phénomène plus trivial qu'on attend dans le régime d'ultra-basse température, *i.e.* $k_B T \ll \hbar \omega$, pour lequel seul le niveau fondamental a une population appréciable, quel que soit le nombre de particules présentes.

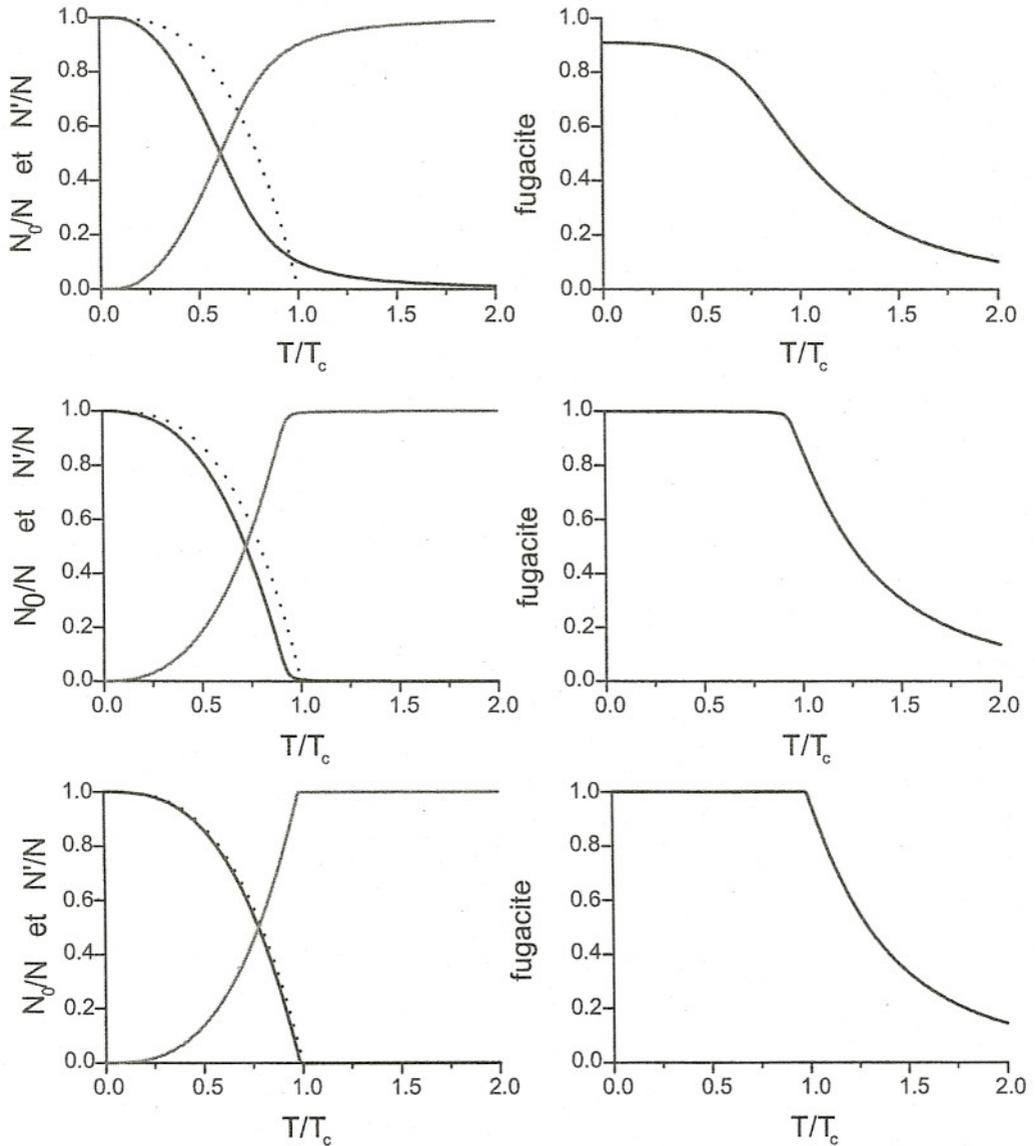


FIG. 2: Colonne de gauche : variations de la population de la fraction condensée N_0/N et de la fraction non condensée N'/N en fonction de la température, exprimée en unité de la température critique T_c . Colonne de droite : fugacité z en fonction de T/T_c . Le nombre d'atomes N est 10 pour la ligne supérieure, 10^3 pour la ligne du milieu, et 10^5 pour la ligne inférieure.

Si la température s'abaisse au dessous de T_c , on assiste à une redistribution des particules depuis les niveaux excités vers le niveau fondamental, la fugacité restant quasiment égale à 1. La population des niveaux excités décroît selon la loi de saturation déterminée précédemment :

$$N'(T) = 1.202 \left(\frac{k_B T}{\hbar \omega} \right)^3 = N \left(\frac{T}{T_c} \right)^3, \quad (4.38)$$

et la population du niveau fondamental vaut donc :

$$N_0(T) = N \left(1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^3 \right). \quad (4.39)$$

Le résultat (4.37) doit donc être compris de la manière suivante dans le régime $\xi \ll 1$:

– ou bien $T > T_c$, et le nombre d'atomes dans l'état fondamental est négligeable ; on a alors :

$$N \simeq \xi^{-3} g_3(z) ; \quad (4.40)$$

– ou bien $T < T_c$ et la distribution des états excités est saturée :

$$N \simeq N_0 + \xi^{-3} g_3(1). \quad (4.41)$$

Une fois la température abaissée sous la température critique, la distribution spatiale et la distribution en vitesse des atomes présentent chacune deux composantes bien distinctes. Par exemple la distribution spatiale est la superposition d'un pic étroit, de largeur $\Delta x_0 = (\hbar / m\omega)^{1/2}$ correspondant à l'état fondamental du piège harmonique, et d'un pic plus large correspondant à la fraction d'atomes non condensés, de largeur $\Delta x' = (k_B T / m\omega^2)^{1/2}$. Le rapport des deux largeurs vaut :

$$\frac{\Delta x_0}{\Delta x'} = \left(\frac{\hbar \omega}{k_B T} \right)^{1/2} \quad \text{soit, pour } T = T_c : \quad \frac{\Delta x_0}{\Delta x'} \simeq N^{-1/6} \ll 1. \quad (4.42)$$

De même, dans l'espace des vitesses, on trouve $\Delta v_0 = (\hbar \omega / m)^{1/2}$ et $\Delta v' = (k_B T / m)^{1/2}$, ce qui conduit à un rapport $\Delta v_0 / \Delta v'$ égal au rapport $\Delta x_0 / \Delta x'$.

3 La condensation de Bose-Einstein dans une boîte

Nous passons maintenant à la description de la condensation de Bose-Einstein pour un gaz confiné dans une boîte parallélépipédique, qui est la situation initialement considérée par Einstein en 1924, pour découvrir ce phénomène. Cette géométrie correspond aux expériences menées sur des échantillons macroscopiques confinés dans des récipients matériels, comme l'étude de la superfluidité de l'hélium dans un cryostat, ou d'un gaz d'excitons dans un semi-conducteur, ou encore d'un gaz bidimensionnel d'atomes d'hydrogène maintenus en lévitation au dessus d'une surface d'hélium liquide.

3.1 Niveaux d'énergie

Considérons une boîte parallélépipédique, de côtés L_x, L_y, L_z . On note $V = L_x L_y L_z$ le volume de la boîte. Nous choisirons ici des conditions aux limites périodiques. Les états propres λ de l'hamiltonien à un corps sont les ondes planes $|\lambda\rangle \equiv |\mathbf{k}\rangle$:

$$\langle \mathbf{r} | \mathbf{k} \rangle = \frac{e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}}{\sqrt{V}} \quad k_i = \frac{2\pi n_i}{L_i} \quad i = x, y, z, \quad (4.43)$$

où les n_i sont des entiers positifs ou négatifs. On a :

$$\epsilon_{\mathbf{k}} = \frac{2\pi^2\hbar^2}{m} \left(\frac{n_x^2}{L_x^2} + \frac{n_y^2}{L_y^2} + \frac{n_z^2}{L_z^2} \right) \quad (4.44)$$

et $\epsilon_{\min} = 0$.

Le problème que nous souhaitons maintenant résoudre est le suivant : lorsqu'on prend la limite thermodynamique pour ce système, en faisant tendre les dimensions de la boîte vers l'infini en gardant constant la densité de particules, la température, et le potentiel chimique, comment se répartissent les particules sur les niveaux d'énergie ? Plus précisément, il s'agit de déterminer si la saturation des niveaux excités de \hat{h} , trouvée au paragraphe précédent pour un système de taille finie, va "survivre" à ce passage à la limite, bien que l'écart entre ϵ_{\min} et les premiers niveaux excités de \hat{h} tende vers 0 quand la taille de la boîte augmente indéfiniment.

3.2 Le gaz de bosons quasi-unidimensionnel

Commençons par la situation la plus simple, qui correspond à un confinement fort selon les axes x et y : les dimensions transverses L_x et L_y de la boîte sont supposées petites et fixées. Plus précisément, on suppose que l'énergie nécessaire pour exciter le mouvement d'une particule selon ces directions $\hbar^2\pi^2/(2mL_i^2)$ (avec $i = x, y$) est bien supérieure à l'énergie thermique $k_B T$. La limite thermodynamique est prise en faisant tendre L_z vers l'infini avec N/L_z constant, et on cherche comment se comporte le densité linéique maximale de particules non condensées dans l'état fondamental de la boîte N'_{\max}/L_z .

Le calcul explicite de N'_{\max} à partir de (4.22) pour les niveaux d'énergie (4.44) se fait de manière très simple si on néglige la population des niveaux excités transversalement ($n_x \neq 0$ ou $n_y \neq 0$). On obtient :

$$N'_{\max} \simeq 2 \sum_{n_z=1}^{+\infty} \frac{1}{e^{2\pi^2\hbar^2 n_z^2 / (mk_B T L_z^2)} - 1} \quad (4.45)$$

Introduisons la longueur d'onde thermique :

$$\lambda_T = \frac{\sqrt{2\pi} \hbar}{\sqrt{mk_B T}}, \quad (4.46)$$

et posons :

$$f(u) = \frac{1}{e^{\pi u^2 \lambda_T^2 / L_z^2} - 1} \quad (4.47)$$

En utilisant (4.27) qui est valable si $\lambda_T \ll L_z$, on trouve :

$$N'_{\max} \simeq 2 \int_{1/2}^{\infty} f(u) du = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{L_z}{\lambda_T} \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{dv}{e^{v^2} - 1}, \quad (4.48)$$

où la borne inférieure de l'intégrale vaut $\epsilon = \sqrt{\pi} \lambda_T / (2L_z)$. La densité linéique non condensée dans le niveau fondamental vaut donc au plus :

$$\Lambda'_{\max} = \frac{N'_{\max}}{L_z} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\lambda_T} \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{dv}{e^{v^2} - 1} \quad (4.49)$$

Faisons maintenant tendre la taille L_z de la boîte vers l'infini. L'intégrale qui intervient dans (4.49) diverge comme $1/\epsilon$, soit plus précisément :

$$\Lambda'_{\max} \simeq \frac{4}{\pi} \frac{L_z}{\lambda_T^2}. \quad (4.50)$$

Il n'y a donc pas de limite finie à la densité linéique de saturation quand on prend la limite thermodynamique $L_z \rightarrow \infty$. En d'autres termes, pour une densité linéique N/L_z et une température fixées, il y a une taille L_z au dessus de laquelle les atomes se répartiront essentiellement sur les niveaux excités, la fraction d'atomes dans le niveau fondamental étant négligeable. Dans ce cas unidimensionnel, la saturation des niveaux excités n'a pas survécu à la limite thermodynamique.

3.3 Le gaz de bosons tri-dimensionnel

Prenons maintenant $L_x = L_y = L_z = L$. Le nombre d'atomes non condensés s'écrit :

$$N'_{\max} = \sum'_{(n_x, n_y, n_z)} \frac{1}{e^{\pi \lambda_T^2 (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)/L^2} - 1} \simeq \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{L^3}{\lambda_T^3} \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{v^2 dv}{e^{v^2} - 1} \quad (4.51)$$

La somme discrète porte sur tous les triplets différents du triplet nul $(0, 0, 0)$ correspondant à l'état fondamental. De même, la borne inférieure ϵ de l'intégrale correspond à l'exclusion d'une sphère de rayon de l'ordre de λ/L , correspondant à la contribution de ce niveau fondamental. Dans le cas tri-dimensionnel qui nous intéresse ici, l'intégrale à calculer est convergente, même quand on remplace sa borne inférieure par 0, et sa valeur ne dépend donc pas de ϵ dans la limite $L \rightarrow \infty$. On trouve :

$$n'_{\max}(T) = \frac{N'_{\max}}{L^3} = \frac{g_{3/2}(1)}{\lambda^3} \quad \text{soit} \quad n'_{\max}(T) \lambda^3 \simeq 2.612. \quad (4.52)$$

Dans ce cas, la saturation des niveaux excités a "survécu" au passage à la limite thermodynamique. L'étude de ce gaz est faite en détail dans de nombreux manuels de physique statistique³ et nous donnerons simplement les résultats majeurs, la démarche à suivre pour les obtenir étant similaire à celle suivie dans le cas du piège harmonique.

Prenons un gaz de densité fixée n . Dans le domaine de haute température, caractérisé par $n\lambda_T^3 \ll 1$, la densité critique $n'_{\max}(T)$, qui varie comme $T^{3/2}$, est bien supérieure à n , et le gaz n'est que très faiblement dégénéré. Physiquement, ce domaine de température correspond au cas où la distance entre les particules $n^{-1/3}$ est très grande devant leur longueur d'onde thermique. Les effets quantiques sont donc en général masqués et le gaz peut être décrit valablement par la statistique de Boltzmann. Sa distribution en vitesse est bien décrite par une gaussienne, de variance $k_B T/m$, et la fugacité est donnée par $z = n\lambda_T^3 \ll 1$.

Quand on abaisse la température de ce gaz, l'approximation gaussienne pour la distribution en vitesse devient de moins en moins bonne, et la fugacité z doit être déterminée par l'équation transcendante :

$$n = n_0 + \frac{g_{3/2}(z)}{\lambda_T^3} \quad \text{avec} \quad n_0 = \frac{1}{L^3} \frac{z}{1-z}. \quad (4.53)$$

D'une façon similaire à ce que nous avons vu pour (4.37), cette équation doit être comprise de la manière suivante :

³Voir par exemple B. Diu *et al.*, *Physique Statistique*, Hermann, Paris.

- Si $T > T_c$, où la température critique T_c est telle que $n = n'_{\max}(T_c)$, alors la densité dans l'état fondamental n_0 est négligeable et on a :

$$n = \frac{g_{3/2}(z)}{\lambda_T^3} . \quad (4.54)$$

- Si $T < T_c$, alors les niveaux excités sont saturés, et on a :

$$n = n_0 + \frac{g_{3/2}(1)}{\lambda_T^3} . \quad (4.55)$$

Les $N - N'$ atomes restants s'accumulent dans l'état fondamental $p = 0$, et la densité condensée est :

$$n_0(T) = n - n'_{\max}(T) = n \left(1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^{3/2} \right) . \quad (4.56)$$

Au contraire du piège harmonique, cette condensation se produit uniquement dans l'espace des vitesses. La distribution en position des atomes reste uniforme, comme il se doit compte-tenu de l'invariance par translation du système.

4 C.B.E. dans un piège à l'approximation semi-classique

Le critère de condensation (4.34) trouvé pour un piège harmonique peut être étendu à un piège de forme $V(\mathbf{r})$ quelconque, et rapproché de celui trouvé dans une boîte cubique $n\lambda_T^3 \simeq g_{3/2}(1)$. On se place pour cela dans l'approximation semi-classique⁴. Cette approximation consiste à poser que la fonction de Wigner à l'équilibre thermodynamique (quasi-densité dans l'espace des phases) est approximativement donnée par :

$$w(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \simeq \frac{1}{h^3} \frac{1}{z^{-1} e^{(p^2/2m + V(\mathbf{r}))/k_B T} - 1} . \quad (4.57)$$

Cette approximation est valable si le quantum d'énergie $\hbar\omega$ (où ω est une fréquence typique d'oscillation dans le piège) est petit devant $k_B T$. La densité en un point \mathbf{r} quelconque est alors obtenue par :

$$n(\mathbf{r}) = \int w(\mathbf{r}, \mathbf{p}) d^3p = \frac{1}{h^3} \int d^3p \sum_{n=1}^{\infty} z^n e^{-np^2/(2mk_B T)} e^{-nV(\mathbf{r})/k_B T} = \frac{g_{3/2}(ze^{-V(\mathbf{r})/k_B T})}{\lambda_T^3} .$$

Au seuil de condensation, le potentiel chimique μ est égal à la valeur minimale $V_{\min} = V(\mathbf{0})$ du potentiel (dans cette approximation semi-classique, on néglige le quantum de vibration $\hbar\omega$ donnant l'énergie de l'état fondamental). La densité en ce point $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ est alors donnée par :

$$n(\mathbf{0}) = \frac{g_{3/2}(1)}{\lambda_T^3} , \quad (4.58)$$

ce qui n'est autre que le critère obtenu dans le cas d'une boîte, écrit ici pour la densité maximale au fond du piège.

⁴Pour une discussion de cette approximation et de sa validité, voir par exemple V. Bagnato *et al.*, Phys. Rev. A **35**, 4354 (1987), et Y. Castin dans *Les Houches LXXII, Coherent atomic matter waves*, Août 1999 (edt. R. Kaiser, C. Westbrook, and F. David)

5 C.B.E. en phase gazeuse : quelques aspects expérimentaux

5.1 La superfluidité de l'hélium

“C'est une belle théorie, mais contient-elle une vérité?” C'est par ces mots qu'Einstein lui-même décrira son résultat dans une lettre à Paul Ehrenfest, avant de se détourner définitivement du phénomène de condensation. Cette défiance demeura générale pendant les années qui suivirent. Il fallut attendre 1937, avec la découverte de la superfluidité de l'hélium liquide, pour que la prédiction d'Einstein soit reconsidérée avec intérêt. London remarqua que la température de la transition superfluide, $T_\lambda = 2,2$ K, est étonnamment proche de la température de la condensation de Bose-Einstein d'un gaz parfait de même densité que l'hélium liquide, $T_c = 3,2$ K, et il eut l'intuition que les deux phénomènes devaient être liés.

Cette remarque de London est à la base des modèles théoriques modernes de l'hélium liquide : l'hélium est un ensemble de particules de spin entier (en l'occurrence 0) et il est légitime de lui appliquer les principes de la statistique découverte par Bose et Einstein. Néanmoins, on sait aussi que le rapport entre condensation de Bose-Einstein et superfluidité n'est pas immédiat. La superfluidité trouve son origine dans l'interaction entre particules, alors que le modèle d'Einstein – ce n'est pas son aspect le moins surprenant – traite d'un gaz parfait. Plus quantitativement, les expériences de diffusion de neutrons révèlent que le condensat dans l'hélium liquide ne contient pas plus de 10 % des atomes, même à température nulle, alors qu'il devrait pouvoir accueillir la totalité des atomes pour un gaz parfait. L'hélium liquide est cependant resté depuis les travaux de London l'exemple-type de condensat de Bose-Einstein, que l'on retrouve dans tous les manuels de physique statistique.

5.2 Condensation de gaz d'alcalins et d'hydrogène

La recherche de systèmes plus proches du modèle initial d'Einstein est devenue très active au cours des vingt dernières années. Le développement des techniques de piégeage et de refroidissement d'atomes par des faisceaux lumineux ou des champs magnétiques statiques a permis de faire sauter les verrous qui avaient auparavant bloqué cette recherche. En 1995, à Boulder, la découverte par le groupe de E. Cornell et C. Wieman d'un condensat de rubidium, suivie de peu par son analogue pour le lithium, le sodium, et l'hydrogène est venue couronner ces efforts.

Quels sont les outils nécessaires pour un tel succès ? On souhaite se rapprocher de l'hypothèse de base d'Einstein, c'est-à-dire travailler avec un gaz très dilué et pas un liquide, comme c'est le cas pour l'hélium. Le prix à payer se lit immédiatement sur l'équation $n\lambda_T^3 \sim 2,612$. Quand on diminue la densité spatiale du système en jeu, la température de transition s'abaisse également. Ces nouveaux condensats atomiques se forment pour une densité voisine de 10^{19} atomes/m³ (au lieu de 10^{27} atomes/m³ pour l'hélium liquide) et la température de condensation est dans le domaine du microkelvin, ou en deçà.

Cette contrainte en température vient imposer un point commun à toutes ces expériences : le confinement du gaz atomique ne peut pas se faire par des parois matérielles, car la totalité des atomes se collerait immédiatement aux parois pour ne plus en bouger. Le gaz est piégé grâce à un champ magnétique inhomogène, qui le maintient en lévitation au centre d'une enceinte où règne un vide très poussé (10^{-9} Pa).

Le refroidissement des atomes piégés se fait par évaporation. Le produit $n\lambda_T^3$ ne vaut que

10^{-6} à l'issue du chargement du piège magnétique (ce facteur résulte du pré-refroidissement laser pour les atomes alcalins, ou d'un refroidissement par cryogénie "standard" pour l'hydrogène). On doit donc gagner plusieurs ordres de grandeur sur la température et sur la densité spatiale du gaz. Cette évaporation se pratique en maintenant constant le taux de collision élastique entre atomes. Ainsi le processus de rethermalisation des particules restant dans le piège se produit de manière efficace. Le taux de collision est proportionnel à la densité spatiale et à la vitesse thermique des atomes, soit n/λ . Un calcul simple prouve alors qu'il faut augmenter n et λ d'un facteur 30 pour gagner les six ordres de grandeur nécessaires sur le produit $n\lambda^3$. En pratique on part d'environ un milliard d'atomes dans le piège magnétique, pour finir avec un million seulement, la température passant de quelques centaines de microkelvins à quelques centaines de nanokelvins.

Pour modifier à volonté la hauteur du puits de potentiel magnétique confinant les atomes, on utilise une onde radio de pulsation ω ajustable. Cette onde fait basculer les moments magnétiques résonnants avec elle, c'est-à-dire ceux situés sur une surface de champ magnétique donné, tel que $\mu B = \hbar\omega$, où μ est le moment magnétique d'un atome. La valeur initiale de ω est grande : ceci correspond à une profondeur élevée pour le puits de potentiel, et permet de confiner même des atomes d'énergie importante (millikelvin). Le refroidissement évaporatif forcé se fait en maintenant constant le courant créant le piège magnétique, et en diminuant progressivement ω . La valeur finale de la fréquence radio correspond à un champ magnétique B voisin de la valeur minimale pour le piège magnétique considéré. La profondeur du puits de potentiel en fin d'évaporation est très faible, de l'ordre de quelques microkelvins seulement.

5.3 Comment voir un condensat ?

L'observation de ces condensats gazeux se fait en les éclairant par une brève impulsion lumineuse, dont on mesure ensuite l'absorption ou le déphasage par l'assemblée atomique. On a ainsi accès à la distribution spatiale des atomes dans le potentiel magnétique. On peut également couper le piège magnétique et laisser l'assemblée atomique s'étaler pendant une durée de quelques dizaines de millisecondes, avant d'envoyer l'éclair lumineux. De l'étendue du nuage atomique après étalement, on déduit la distribution en vitesse initiale.

La figure 3 illustre ce principe. Les figures 3a et 3c sont des photos *in situ*, qui montrent la répartition des atomes au sein du piège magnétique. La distribution des atomes a une forme de cigare, qui résulte de la forte anisotropie du piège. La présence éventuelle d'un condensat est révélée de manière non ambiguë par les clichés donnant les distributions en vitesse (3b,d). Pour la photo 3b, prise pour une densité inférieure à la densité critique, on obtient une distribution en vitesse quasi-isotrope, comme attendu à partir de l'équipartition d'énergie pour un gaz bien décrit par la physique statistique classique. Au contraire le cliché 3d, pris pour une densité centrale plus élevée que la densité critique, montre une distribution en vitesse fortement anisotrope, la direction la plus fortement confinée dans le piège magnétique étant celle ayant la plus grande dispersion en vitesse. Cette conséquence directe de la relation d'incertitude de Heisenberg révèle que les atomes se sont accumulés dans ce cas dans l'état fondamental du piège magnétique : ils ont tous la même fonction d'onde, dont la dispersion horizontale est plus grande que la dispersion verticale du fait de l'asymétrie du piège. En retour, la dispersion verticale des vitesses est plus grande que la dispersion horizontale.

Ce type d'images permet d'obtenir des informations quantitatives sur les condensats, comme le nombre d'atomes et la température résiduelle associée à la fraction d'atomes non condensés.

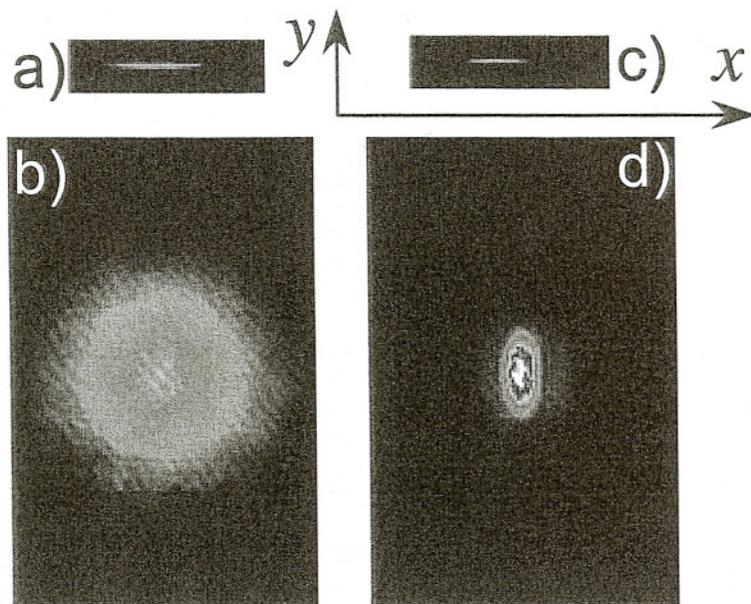


FIG. 3: Photographies d'un ensemble d'atomes de rubidium après évaporation, obtenues en mesurant l'absorption d'un faisceau lumineux par le gaz atomique. Les photos (a) et (c) sont des images *in situ* des atomes dans le piège magnétique. Le piège est fortement anisotrope, avec une fréquence d'oscillation selon x de 11 Hz, et une fréquence d'oscillation selon y et z de 150 Hz. L'anisotropie du nuage reflète cette anisotropie du confinement. Ces photos correspondent respectivement à un gaz non condensé (a) et condensé (c), mais il est difficile de le prouver sans ambiguïté, car la taille transversale de ce nuage est de quelques microns seulement, ce qui correspond à la limite de résolution du système d'imagerie optique. Pour faire des mesure quantitatives, on utilise plutôt des images prises après expansion balistique du nuage atomique (b et d). Ces photos, qui correspondent à la même séquence d'évaporation que les photos (a) et (c) respectivement, sont prises 30 ms après la coupure du piège. Elles donnent accès à la distribution en vitesse des atomes juste après coupure. Sur la photo (b), la distribution est quasi-isotrope, ce qui prouve que le gaz piégé était bien décrit par la loi classique d'équipartition de l'énergie, $mv_i^2 = k_B T$, pour les trois axes $i = x, y, z$, avec ici $T = 500$ nK. La photo (d), également prise 30 ms après la coupure du piège, a été obtenue après qu'on a poussé le refroidissement par évaporation au delà du seuil de condensation. La structure elliptique centrale, de longueur totale de $270 \mu\text{m}$ et de largeur $130 \mu\text{m}$, représente les atomes condensés. L'ellipticité de la distribution en vitesse, inversée par rapport à celle des positions dans le piège, est une conséquence directe des relations d'incertitude de Heisenberg. Le halo quasi-circulaire extérieur correspond aux atomes non condensés, et il donne accès à la température du système (200 nK). (Photos de P.Desbiolles, D. Guéry-Odelin et J. Söding, ENS)

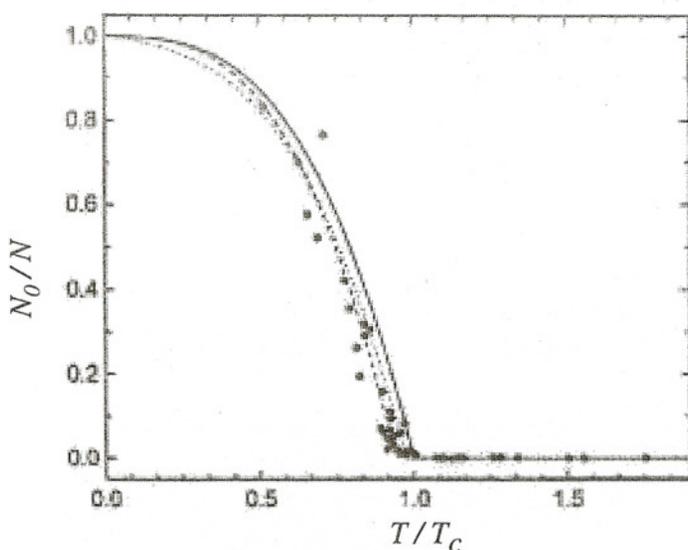


FIG. 4: Variation de la fraction condensée N_0/N en fonction de T/T_c , où T_c est donné pour chaque point par $kT_c = 0,94 \hbar\omega N^{1/3}$. La courbe en trait plein indique la prédiction théorique pour un gaz parfait et les courbes en pointillé correspondent à diverses prédictions théoriques prenant en compte de manière approchée les interactions. Les données expérimentales sont extraites de J.R. Ensher *et al.*, Phys. Rev. Lett. 77, 4984 (1996).

On a ainsi vérifié avec une très bonne précision (quelques %) que la température de la transition était effectivement donnée par $k_B T_c \simeq \hbar\omega N^{1/3}$ (voir par exemple la figure 4). On a également pu produire des condensats pratiquement purs, dans lesquels la fraction non condensée ne dépasse pas 15% du nombre total d'atomes (en dessous de cette valeur, elle devient très difficile à mesurer).

5.4 Cohérence et superfluidité

L'accumulation des atomes dans un même état quantique est un phénomène physique qui rappelle fortement le principe du laser, dans lequel on accumule un grand nombre de photons dans le même mode d'une cavité. Il manque encore un ingrédient pour vraiment faire l'analogie entre ce système atomique et un laser. Il faut extraire les atomes du piège magnétique, tout comme on extrait les photons de la cavité laser en mettant un miroir semi-transparent. Pour cela, on utilise une onde électromagnétique pour changer l'état magnétique de l'atome. La figure 5 montre le principe de cette méthode pour des atomes dont le moment cinétique est $J = 1$. Le sous-niveau Zeeman qui correspond à l'orientation correcte entre μ et \mathbf{B} correspond au nombre quantique $m = 1$. Grâce à l'onde électromagnétique, on fait basculer ce nombre quantique magnétique de $m = 1$ à $m = 0$, pour les atomes se trouvant juste au centre du condensat. Une fois le basculement opéré, l'énergie magnétique $-\mu \cdot \mathbf{B}$ devient nulle, et les atomes tombent simplement sous l'effet de la pesanteur. La situation est analogue à celle d'un fluide coulant d'un robinet, mais ce filet d'atomes correspond à une onde de matière macroscopique cohérente. Ce principe d'extraction d'ondes de matière d'un condensat a été mis en œuvre dans plusieurs laboratoires⁵. La divergence du jet ainsi obtenu est limitée simplement par l'inégalité de Heisen-

⁵Voir par exemple K. Helmerson, D. Hutchinson, K. Burnett and W. D. Phillips, *Atom lasers*, Physics World, Août 1999, p. 31 ; Y. Castin, R. Dum and A. Sinatra, *Bose condensates make quantum leaps and bounds*, Physics

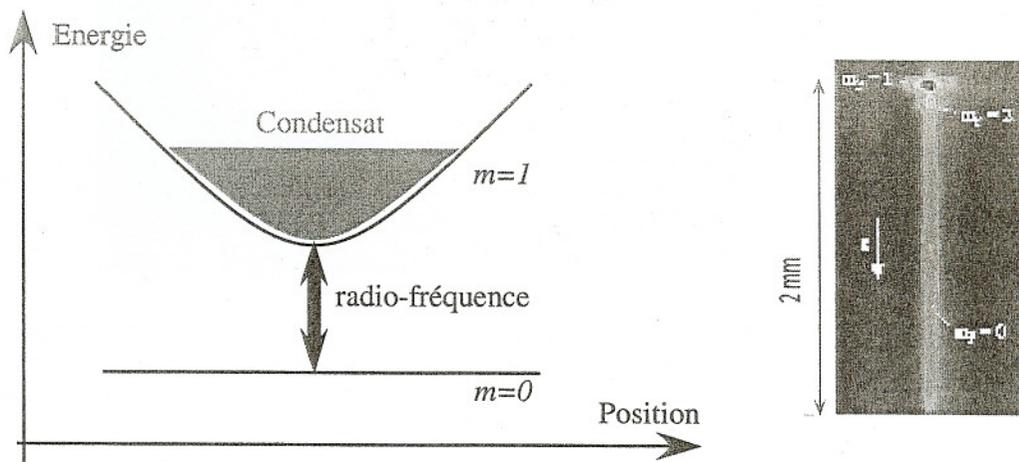


FIG. 5: Principe d'un "laser à atomes"; une radio-fréquence résonante extrait un filet quasi-continu d'atomes au fond du puits de potentiel magnétique (photo extraite de I. Bloch *et al.*, Phys. Rev. Lett. 82, 3008 (1999)).

berg : son extension transverse est de l'ordre de $\delta x = 10$ micromètres, et sa dispersion en vitesse est $\delta v \sim \hbar/m \delta x$, soit 0,07 mm/s (plus lent qu'un escargot).

La cohérence de l'onde atomique extraite du condensat a été montrée de manière spectaculaire par le groupe de Munich. En utilisant deux ondes radio-fréquences, les chercheurs de ce groupe ont extrait deux faisceaux d'atomes et observé leur interférence éventuelle. Tant que le seuil de la condensation n'est pas franchi, aucune interférence n'est visible : ceci correspond bien à l'intuition que deux zones bien séparées d'un gaz classique sont incohérentes entre elles. En revanche, une fois le condensat obtenu, on observe des franges avec un contraste élevé (voisin de 100 % pour un condensat pur), ce qui prouve bien que les atomes occupent tous un même état quantique.

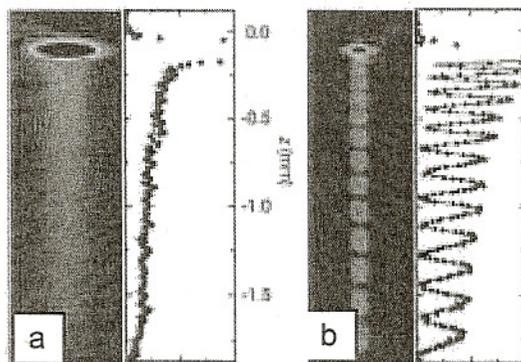


FIG. 6: Mise en évidence de la cohérence d'un condensat. Les deux sources atomiques extraites d'un condensat présentent une figure d'interférence à fort contraste, alors que deux sources extraites d'un nuage au dessus de la température de condensation ne présentent pas d'interférence visible (I. Bloch *et al.*, Nature 403, 166 (2000)).

Les condensats de Bose-Einstein gazeux permettent également de mettre en évidence des

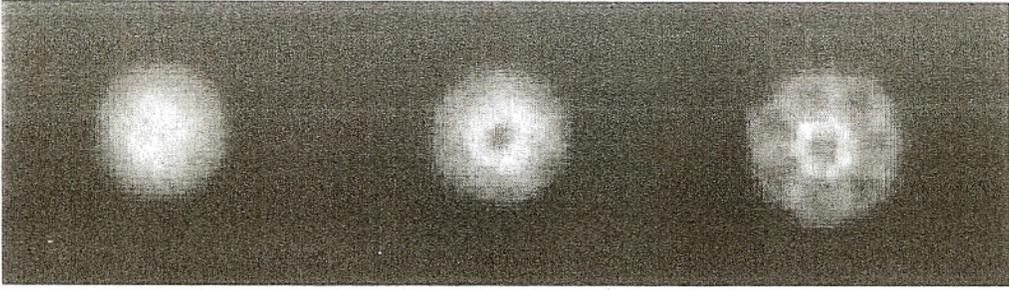


FIG. 7: Images de condensats mis en rotation par un agitateur laser. En dessous d'une fréquence de rotation critique Ω_c , le condensat reste au repos. Juste au dessus de Ω_c , un tourbillon apparaît au centre du condensat. Le moment cinétique par particule est de l'ordre de \hbar . Pour des fréquences de rotation notablement plus élevées, un réseau ordonné de tourbillons se forme (Photo par F. Chevy et K. Madison, voir par exemple K. Madison *et al.*, Phys. Rev. Lett. **84**, 806 (2000)).

phénomènes macroscopiques analogues à ceux rencontrés en physique de la matière condensée, comme la superfluidité (observée pour l'hélium liquide) ou la supraconductivité. Un exemple de ces études est présenté sur la figure 7. Il s'agit d'une expérience dans laquelle on cherche à mettre en rotation le condensat lui-même. Pour cela, on le place dans un piège légèrement anisotrope, et on fait tourner les axes propres correspondants. Le comportement du condensat est très différent de celui d'un fluide classique. En dessous d'une fréquence de rotation critique, le condensat reste immobile : c'est une manifestation de la superfluidité, comme pour l'hélium liquide (figure 7, gauche). La perturbation apportée par la rotation du potentiel qui confine les atomes n'est pas assez forte pour mettre en mouvement ce fluide. Au dessus de la fréquence critique, les atomes se mettent en mouvement, mais de manière collective et régie par la mécanique quantique. Leur moment cinétique est égal à \hbar , ce qui impose une vitesse de rotation du fluide $v = \hbar/mr$. C'est un tourbillon quantique, avec une vitesse d'autant plus grande qu'on s'approche du centre. Pour $r = 0$, la vitesse est infinie, ce qui impose une densité atomique nulle. C'est l'origine du trou noir visible au centre de la photo 7 (milieu). Si on augmente encore la vitesse de rotation, on fait apparaître plusieurs tourbillons quantiques, qui forment un réseau régulier (figure 7, droite). Ce résultat présente une analogie étroite avec la physique d'un supraconducteur plongé dans un champ magnétique.

6 Le gaz de Bose en interaction

6.1 Le critère de Landau.

Pour rendre compte des propriétés de superfluidité d'un condensat gazeux, il faut prendre en compte les interactions entre atomes. En effet, en suivant un raisonnement dû à Landau, on ne s'attend pas à ce qu'un gaz parfait soit superfluide.

L'interprétation de Landau de la superfluidité est fondée sur la relation de dispersion linéaire des excitations élémentaires du milieu $E(\mathbf{p}) = c|\mathbf{p}|$, où c est la vitesse du son. Considérons un objet ponctuel⁶ de masse M et d'impulsion \mathbf{P} , et cherchons s'il peut être freiné en créant une

⁶Pour un objet étendu, d'autres types d'excitations doivent également être considérées, comme les vortex de la figure 7, ce qui vient abaisser notablement la vitesse critique.

excitation d'impulsion p . La conservation de l'énergie et de l'impulsion entraîne :

$$P = P' + p \qquad \frac{P^2}{2M} = \frac{P'^2}{2M} + E(p).$$

On vérifie aisément que ces deux équations n'ont pas de solution si la vitesse initiale de l'objet P/M est inférieure à la vitesse du son c . Un objet bougeant dans ce fluide à température nulle ne peut donc pas être freiné : c'est une des manifestations caractéristiques de la superfluidité. En l'absence d'interaction (gaz parfait), cette relation de dispersion linéaire est remplacée par la relation quadratique $E(p) = p^2/2m$, où m est la masse d'une particule du superfluide. Il est alors toujours possible de trouver une solution aux deux équations précédentes, ce qui prouve qu'un gaz parfait n'est pas superfluide.

Pour rendre compte des propriétés superfluides des condensats, il faut donc prendre en compte les interactions entre particules. C'est également indispensable pour expliquer quantitativement la taille du condensat piégé, ainsi que ses fréquences d'oscillation quand on le fait vibrer.

6.2 L'hamiltonien du problème

Considérons N bosons piégés dans un potentiel $V(\mathbf{r})$. Ces particules interagissent entre elles par l'intermédiaire d'un potentiel à deux corps $w(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$, l'hamiltonien complet du système s'écrivant par conséquent :

$$H = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m} + V(\mathbf{r}_i) + \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} w(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j). \quad (4.59)$$

Nous nous limiterons ici au cas d'un potentiel d'interaction w que l'on peut décrire à l'approximation de Born. L'amplitude de diffusion de \mathbf{k} vers \mathbf{k}' s'écrit donc :

$$f(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \simeq -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \int e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \cdot \mathbf{r}} w(\mathbf{r}) d^3r,$$

où $\mu = m/2$ est la masse réduite de la particule relative. Par ailleurs les énergies cinétiques en jeu sont supposées suffisamment faibles pour que les collisions se produisent uniquement dans l'onde s , et que l'on puisse considérer la limite $E \rightarrow 0$ de l'amplitude de collision correspondante. Le paramètre pertinent pour décrire la collision est alors la longueur de diffusion a associée à $w(\mathbf{r})$:

$$a = -\lim_{E \rightarrow 0} f(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \simeq \frac{m}{4\pi\hbar^2} \int w(\mathbf{r}) d^3r. \quad (4.60)$$

Le rôle essentiel joué par la longueur de diffusion dépasse très largement le cas de potentiels traitables à l'approximation de Born. Dans le cas d'un potentiel interatomique réel (sodium-sodium ou rubidium-rubidium par exemple), cette approximation de Born n'est certainement pas correcte. Néanmoins, on peut montrer⁷ que les résultats qui suivent restent valables. La longueur de diffusion n'est alors pas calculable aussi simplement que dans (4.60) et doit être évaluée à partir du comportement asymptotique de la solution d'énergie nulle de l'équation de Schrödinger associée au potentiel $w(\mathbf{r})$ (cf. T.D. sur la longueur de diffusion).

⁷Voir par exemple P. Nozières and D. Pines, *The theory of quantum liquids*, § 9.3, Addison Wesley.

6.3 L'équation de Gross-Pitaevskii

Fonctions de Hartree

Dans ce paragraphe nous allons chercher à déterminer l'état fondamental de l'hamiltonien (4.59). Cette détermination sera bien sûr approchée, le problème à N corps n'étant généralement pas soluble exactement. Nous allons utiliser une méthode variationnelle. On sait que l'état fondamental de H est le vecteur d'état $|\Psi\rangle$ qui minimise la fonctionnelle $\langle\Psi|H|\Psi\rangle$. Nous allons effectuer cette minimisation en nous restreignant à une classe particulière de vecteurs d'états $|\Psi\rangle$, les fonctions de Hartree. Ces fonctions sont telles que les N particules sont toutes mises dans le même état à une particule $|\phi\rangle$:

$$|\Psi\rangle = |1 : \phi\rangle \otimes |2 : \phi\rangle \otimes \dots \otimes |N : \phi\rangle$$

Ces fonctions satisfont par construction au principe de symétrisation pour des bosons. Pour le cas d'un gaz de Bose sans interaction, on sait que l'on peut obtenir exactement l'état fondamental du système en prenant pour $|\phi\rangle$ l'état fondamental à une particule dans le potentiel extérieur $V(\mathbf{r})$.

La méthode variationnelle

Calculons $\langle\Psi|H|\Psi\rangle$. On trouve N contributions identiques provenant du terme d'énergie cinétique et du terme dû au potentiel extérieur, et $N(N-1)$ contributions du terme d'interaction entre particules :

$$\begin{aligned} \langle\Psi|H|\Psi\rangle &= N \left(\int \frac{\hbar^2}{2m} \nabla\phi^*(\mathbf{r}) \cdot \nabla\phi(\mathbf{r}) d^3r + \int V(\mathbf{r}) |\phi(\mathbf{r})|^2 d^3r \right) \\ &\quad + \frac{N(N-1)}{2} \iint |\phi(\mathbf{r})|^2 |\phi(\mathbf{r}')|^2 w(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d^3r d^3r', \end{aligned} \quad (4.61)$$

où l'on a supposé que le vecteur d'état à une particule $|\phi\rangle$ était normé.

Il faut maintenant minimiser (4.61) en tenant compte de la contrainte $\langle\Psi|\Psi\rangle = 1$. Cette optimisation sous contrainte se fait en utilisant la méthode des multiplicateurs de Lagrange. On forme la quantité :

$$F(\Psi) = \langle\Psi|H|\Psi\rangle - \lambda \langle\Psi|\Psi\rangle,$$

qui doit être stationnaire par rapport à une variation arbitraire de Ψ :

$$\delta(\langle\Psi|H|\Psi\rangle) - \lambda \delta(\langle\Psi|\Psi\rangle) = 0.$$

Utilisons maintenant l'expression trouvée plus haut pour $\langle\Psi|H|\Psi\rangle$. La variation de cette quantité va faire intervenir $\delta\phi$ et $\delta\phi^*$ que l'on peut traiter comme des variables indépendantes, puisque l'on peut faire varier indépendamment $\text{Re}(\phi)$ et $\text{Im}(\phi)$. En faisant varier ϕ^* , on trouve pour tout $\delta\phi^*$:

$$\int d^3r \delta\phi^*(\mathbf{r}) \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta\phi(\mathbf{r}) + V(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r}) + (N-1) \left(\int d^3r' |\phi(\mathbf{r}')|^2 w(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \right) \phi(\mathbf{r}) - \lambda\phi(\mathbf{r}) \right] = 0.$$

Cette identité ne peut être vérifiée pour tout $\delta\phi^*$ que si le terme entre crochets est identiquement nul, soit :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta\phi(\mathbf{r}) + V(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r}) + (N-1) \left(\int d^3r' |\phi(\mathbf{r}')|^2 w(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \right) \phi(\mathbf{r}) = \lambda\phi(\mathbf{r}).$$

Cette équation a la structure d'une équation aux valeurs propres pour un hamiltonien à une particule faisant intervenir l'énergie cinétique de la particule, l'énergie potentielle de confinement $V(\mathbf{r})$, et l'énergie de champ moyen créé par le gaz formé par les $N-1$ autres particules, de densité spatiale $(N-1)|\phi(\mathbf{r}')|^2$.

Comme nous l'avons signalé plus haut, nous supposons que les collisions décrites par le potentiel w sont dans le régime basse énergie et à l'approximation de Born. Ceci revient à dire que les solutions ϕ de l'équation ci-dessus varient lentement à l'échelle de la portée du potentiel et que l'on peut faire le remplacement :

$$\int d^3r' |\phi(\mathbf{r}')|^2 w(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \longrightarrow |\phi(\mathbf{r})|^2 \int d^3r' w(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m} |\phi(\mathbf{r})|^2 .$$

L'équation vérifiée par la fonction ϕ est donc finalement :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta\phi(\mathbf{r}) + V(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r}) + (N-1)\frac{4\pi\hbar^2 a}{m} |\phi(\mathbf{r})|^2 \phi(\mathbf{r}) = \lambda\phi(\mathbf{r}) , \quad (4.62)$$

associée à la condition de normalisation $\langle\phi|\phi\rangle = 1$. Cette équation de Schrödinger non-linéaire est également appelée équation de Gross-Pitaevskii.

Remarquons que l'on aurait obtenu la même équation en remplaçant l'hamiltonien de départ (4.59) par :

$$H = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m} + V(\mathbf{r}_i) + \frac{2\pi\hbar^2 a}{m} \sum_i \sum_{j \neq i} \delta(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) . \quad (4.63)$$

Les interactions entre atomes sont alors remplacées par des interactions de contact en $\delta(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$.

Le potentiel chimique du condensat

Le potentiel chimique d'un système est un paramètre très utile pour la description statistique de ce système. Il correspond à l'énergie qu'il faut fournir pour ajouter une particule à ce système. Nous allons montrer dans ce qui suit que le potentiel chimique n'est autre que le multiplicateur de Lagrange λ .

Notons $E([\phi], N)$ l'énergie totale du système, à l'approximation de Hartree :

$$E([\phi], N) = N \left(\int \frac{\hbar^2}{2m} \nabla\phi^*(\mathbf{r}) \cdot \nabla\phi(\mathbf{r}) d^3r + \int V(\mathbf{r}) |\phi(\mathbf{r})|^2 d^3r \right) + \frac{N(N-1)}{2} \frac{4\pi\hbar^2 a}{m} \int |\phi(\mathbf{r})|^4 d^3r . \quad (4.64)$$

Le potentiel chimique est par définition $\mu = E([\phi], N) - E([\phi], N-1)$. Notons qu'il est inutile de tenir compte à ce stade de la variation de ϕ avec N puisque $E([\phi], N)$ est stationnaire vis à vis de ϕ . On trouve donc :

$$\mu = \int \frac{\hbar^2}{2m} \nabla\phi^*(\mathbf{r}) \cdot \nabla\phi(\mathbf{r}) d^3r + \int V(\mathbf{r}) |\phi(\mathbf{r})|^2 d^3r + (N-1) \frac{4\pi\hbar^2 a}{m} \int |\phi(\mathbf{r})|^4 d^3r . \quad (4.65)$$

Ceci n'est autre que le paramètre de Lagrange, comme on le voit en multipliant (4.62) par $\phi^*(\mathbf{r})$ et en intégrant sur tout l'espace.

6.4 Condensat dans un piège harmonique

Lois d'échelle

Considérons à partir de maintenant le cas où le potentiel confinant est harmonique et isotrope de fréquence $\omega/(2\pi)$, une valeur typique pour cette fréquence étant de l'ordre de 100 Hz. Nous allons chercher dans ce paragraphe à comprendre comment varient la forme et la taille du condensat en fonction du nombre de particules N .

Notons R la taille typique du condensat, donnée par l'extension de la fonction d'onde $\phi(\mathbf{r})$ solution de (4.62). Sans chercher à résoudre explicitement l'équation de Gross-Pitaevski, il est facile de préciser la variation avec R des trois contributions à l'énergie totale du système :

1. L'énergie cinétique de confinement de N atomes dans un volume de rayon R est donnée par $\sim N\hbar^2/(2mR^2)$.
2. L'énergie potentielle harmonique est simplement donnée par $\sim Nm\omega^2 R^2/2$.
3. L'énergie d'interaction fait intervenir la densité moyenne \bar{n} dans le volume occupé par le condensat, soit $\bar{n} = N/(4\pi R^3/3)$, ce qui conduit à une énergie de champ moyen $\sim 3N^2\hbar^2 a/(2mR^3)$.

La taille d'équilibre R du condensat sera, à un facteur numérique voisin de l'unité près, la valeur de R qui minimise la somme de ces trois énergies :

$$E_{\text{approx.}} = \frac{N\hbar^2}{2mR^2} + \frac{Nm\omega^2 R^2}{2} + \frac{3N^2\hbar^2 a}{2mR^3}. \quad (4.66)$$

En l'absence d'interactions, la valeur de R minimisant cette énergie est bien connue : il s'agit de l'extension de l'état fondamental de l'oscillateur harmonique $R = a_{\text{oh}} = \sqrt{\hbar/(m\omega)}$, ce résultat étant indépendant du nombre d'atomes. Les interactions vont venir modifier considérablement ce résultat, d'une manière qui dépend de manière cruciale du signe de a .

Condensat à longueur de diffusion positive

Si la longueur de diffusion est positive, le terme d'interaction tend à favoriser les grandes tailles de condensat. Les interactions correspondent à une répulsion effective entre atomes, et leur effet vient s'ajouter à celui de l'énergie cinétique. Il est simple de voir à partir de quelle valeur de N les interactions commencent à jouer un rôle important. Il faut pour cela que l'énergie d'interaction soit de l'ordre ou supérieure à l'énergie cinétique pour une distance R égale à la taille d'équilibre *en l'absence* d'interaction, a_{oh} . Si cette condition est remplie, la taille à l'équilibre sera essentiellement déterminée par l'équilibre entre la force de confinement harmonique et la force "d'explosion" liée aux interactions. Sinon, la taille à l'équilibre du nuage reste voisine de celle d'un gaz parfait, a_{oh} .

Plus quantitativement, on a donc :

$$\text{Interactions importantes} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3N^2\hbar^2 a}{2ma_{\text{oh}}^3} > \frac{N\hbar^2}{2ma_{\text{oh}}^2},$$

ou encore

$$\text{Interactions importantes} \quad \Leftrightarrow \quad N > \frac{a_{\text{oh}}}{a}.$$

On a typiquement $a_{\text{oh}} = 1 \mu\text{m}$, et $a = 1$ à 10 nm , soit un nombre critique d'atomes variant de 100 à 1000. Au delà de ce nombre, les interactions sont essentielles pour déterminer la forme d'équilibre du condensat, et on peut négliger la contribution de l'énergie cinétique à l'énergie totale. La taille typique R s'obtient alors en minimisant simplement :

$$E_{\text{approx.}} = \frac{Nm\omega^2 R^2}{2} + \frac{3N^2\hbar^2 a}{2mR^3},$$

ce qui conduit à $R_{\text{eq}} \sim a_{\text{oh}}(Na/a_{\text{oh}})^{1/5}$ et $E_{\text{approx.}}/N \sim \hbar\omega(Na/a_{\text{oh}})^{2/5}$. La taille du condensat augmente donc avec le nombre d'atomes, comme on pouvait s'y attendre pour des interactions répulsives entre atomes. Les prédictions $R \propto N^{1/5}$ et $E_{\text{approx.}}/N \propto N^{2/5}$ sont bien vérifiées expérimentalement (cf. figure 8).

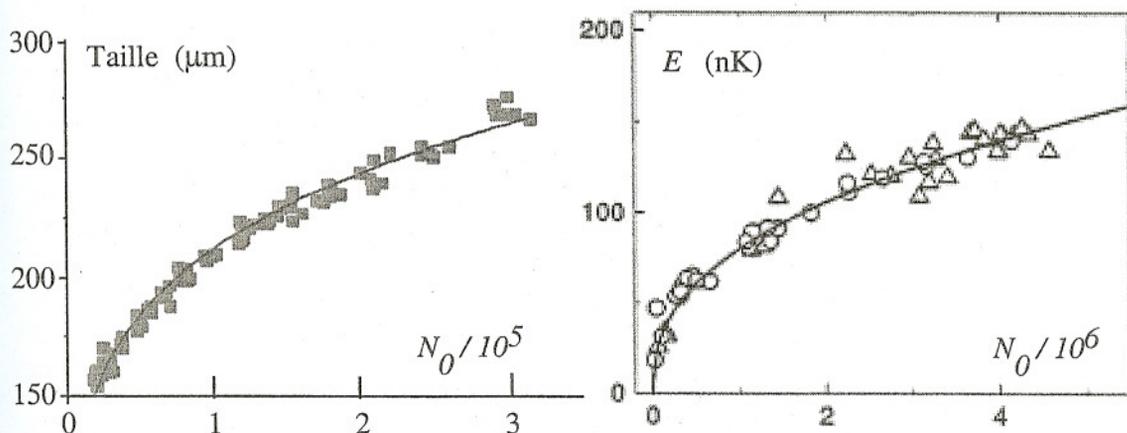


FIG. 8: Gauche : variation de la taille d'un condensat de rubidium après temps de vol ($a = 5,5 \text{ nm}$) avec le nombre d'atomes condensés. La courbe continue est un ajustement avec une loi en $N_0^{1/5}$ (figure extraite de J. Söding *et al.*, Appl. Phys. B **69**, 257 (1999)). Droite : énergie interne d'un condensat de sodium en fonction du nombre d'atomes condensés; triangles : pas de fraction non condensée visible, cercles : fraction non condensée bien visible. La courbe continue est un ajustement par une loi en $N_0^{2/5}$ (figure extraite de M.-O. Mewes, Phys. Rev. Lett. **77**, 416 (1996)).

Condensat à longueur de diffusion négative

Cette situation correspond à une interaction attractive entre atomes. L'équation de Gross-Pitaevski devient alors délicate à résoudre. Physiquement, on voit que deux termes tendent à comprimer le nuage atomique, d'une part le potentiel de confinement, d'autre part le terme de champ moyen. Cette tendance à l'implosion du nuage est compensée uniquement par le terme d'énergie cinétique.

Deux comportements différents peuvent se produire, selon que (4.66) admet ou non un minimum local en fonction de R . Cette énergie tend de toute façon vers $-\infty$ quand R tend vers 0, puisque le terme d'implosion lié aux interactions, variant comme en R^{-3} l'emporte toujours sur le terme stabilisant lié à l'énergie cinétique, variant seulement comme R^{-2} . Le nombre critique d'atomes pour que ce minimum existe est ici encore de l'ordre de a_{oh}/a . C'est seulement pour un nombre d'atomes plus petit que ce nombre critique que l'on peut espérer obtenir un condensat

métastable. Au dessus de ce nombre, on s'attend à ce que le condensat se contracte sur lui-même, les atomes étant finalement regroupés en molécules et en agrégats qui s'échappent du piège.

Les expériences menées au Texas sur le lithium (${}^7\text{Li}$), pour lequel $a = -1,5$ nm ont confirmé cette prédiction⁸. Pour le piège utilisé dans ces expériences ($\omega/(2\pi) = 145$ Hz), le nombre d'atomes dans le condensat ne dépasse jamais 1400, même si le nombre d'atomes disponibles dans la fraction non condensée est beaucoup plus grand.

6.5 Remarques complémentaires

Validité de l'équation de Gross-Pitaevski

Un paramètre important pour caractériser un système bosonique est la fraction condensée. Celle-ci correspond à la plus grande valeur propre de la matrice densité à un corps, obtenue en prenant la trace de la matrice densité totale sur $N - 1$ particules.

La description du gaz de Bose par une fonction de Hartree revient à supposer que la fraction condensée est de 100 %, puisque tous les atomes sont dans le même état quantique. On peut estimer la validité de cette approximation par la méthode de Bogoliubov, qui permet de montrer que la proportion d'atomes dans la partie non condensée est de l'ordre de $\sqrt{\bar{n} a^3}$. Ce paramètre est très petit pour les condensats gazeux usuels : $\bar{n} = 10^{20} \text{ m}^{-3}$, $a \sim 5$ nm, soit $\sqrt{\bar{n} a^3} \sim 0,3\%$. A température nulle, il est donc bien légitime de supposer que tous les atomes sont dans le même état quantique. Cette situation est très différente de celle de l'hélium liquide, pour lequel la fraction condensée ne dépasse pas 10 %, même à température nulle. Ceci est dû aux interactions très fortes qui prennent place au sein du liquide.

Que se passe-t-il à température non nulle ?

La description du gaz de Bose à température non nulle est loin d'être aussi simple qu'à $T = 0$. On peut simplifier ce traitement en remarquant que dans un potentiel harmonique, la densité de la fraction non condensée est en général beaucoup plus faible que celle du condensat. Les interactions entre atomes non condensés sont alors négligeables et on peut se limiter en première approximation à l'interaction d'un atome de la fraction non condensée avec le condensat⁹. Cette approche permet d'évaluer l'évolution de la distribution d'équilibre avec la température. En ce qui concerne les problèmes dépendant du temps, le traitement des excitations d'un condensat à température non nulle reste un problème très discuté.

⁸C. C. Bradley, C. A. Sackett, and R. G. Hulet, Phys. Rev. Lett. **78**, 985 (1997).

⁹Pour en savoir plus sur ce problème, on pourra consulter l'article de revue de F. Dalfovo, S. Giorgini, L. Pitaevskii, et S. Stringari, Rev. Mod. Phys. **71**, 463-512 (1999), qui contient une description très détaillée du problème ainsi que de nombreuses références.