

18.11.75

RESUME DU COURS DE L'AN DERNIER

Après un bref rappel des résultats établis au cours de l'année antérieure, on a commencé par discuter le contenu physique de quelques états **quantiques du champ** électromagnétique libre. Les états propres de l'hamiltonien du champ décrivent bien l'aspect corpusculaire du rayonnement : ils permettent d'introduire simplement le concept de quantum d'énergie du champ, ou encore de "photon". Un état particulièrement intéressant est le "vide" de photons. On peut considérer que, dans un tel état, il règne en chaque point de l'espace un champ fluctuant, de valeur moyenne nulle, et de temps de corrélation infiniment court (fluctuations du vide). En superposant des états correspondant à des nombres de photons différents, on construit des états du champ mieux adaptés à l'aspect ondulatoire. Il existe une classe d'états qui réalisent le meilleur compromis possible entre les aspects corpusculaire et ondulatoire de la lumière, complémentaires l'un de l'autre. Ce sont les "états cohérents" de Glauber qui ont été introduits et étudiés très en détail. On a insisté en particulier sur l'intérêt qu'il y avait à développer l'opérateur densité du rayonnement sur la base des états cohérents : un tel développement permet d'introduire dans la plupart des cas des densités de "quasi-probabilité" présentant des analogies très étroites avec les densités de probabilité de la mécanique statistique classique. Une étude comparative de plusieurs types de densités de quasi-probabilité a été présentée.

Ayant ainsi discuté les propriétés du rayonnement libre quantifié, on a ensuite considéré l'hamiltonien décrivant l'interaction de ce rayonnement avec des particules chargées non-relativistes, traitées elles aussi par la mécanique quantique. La structure de cet hamiltonien d'interaction, qui fait intervenir le potentiel vecteur du champ et les impulsions des particules, a été analysée en détail. A la demande de nombreux auditeurs, on a également étudié une autre forme équivalente de l'hamiltonien d'interaction qui est plus commode à utiliser lorsqu'on s'intéresse à des systèmes globalement neutres de charges liées (par exemple des atomes ou des molécules neutres), dont les dimensions sont plus petites que la longueur d'onde du rayonnement. Cette nouvelle forme fait intervenir directement les champs électrique et magnétique du rayonnement et leurs gradients, ainsi que les moments multipolaires électriques et magnétiques des systèmes de charges. On a montré en détail comment on passait d'un hamiltonien d'interaction à l'autre en effectuant une transformation unitaire sur le système global. On a expliqué également comment cette transformation faisait disparaître les interactions électrostatiques instantanées entre un système de charges liées et un autre, ce qui rend le nouvel hamiltonien d'interaction beaucoup plus commode que le précédent pour l'étude des effets de retard dans les interactions interatomiques.

Une première application du formalisme précédent a consisté à étudier la diffusion non-résonnante de photons par un atome. L'am-

plitude de diffusion a été calculée au 2ème ordre de la théorie des perturbations en prenant un hamiltonien d'interaction, puis l'autre. On a vérifié que les phénomènes physiques prévus ne dépendaient pas de l'hamiltonien choisi, mais que, suivant l'énergie du photon incident, il était plus commode d'utiliser un hamiltonien ou l'autre. Une discussion physique détaillée des variations de la section efficace de diffusion en fonction de la fréquence du rayonnement incident a été présentée. On a montré comment on passait de la diffusion Rayleigh et Raman à basse fréquence à la diffusion Thomson puis Compton à haute fréquence. L'importance accrue de l'énergie de recul que le photon incident peut communiquer à l'électron atomique a permis de développer une analogie avec l'effet Mössbauer.

On a ensuite abordé le problème des interactions entre atomes neutres par échanges de photons et la discussion des effets de retard associés. Après avoir décrit quelques approches possibles de ce problème, basées sur la théorie des perturbations stationnaires, la théorie des perturbations dépendant du temps et les représentations diagrammatiques de l'amplitude de diffusion, on a montré que le choix de certaines conditions aux limites sur le propagateur du photon (conditions aux limites de Feynman) permettait de mener simplement le calcul jusqu'au bout dans le cas de 2 atomes d'Hydrogène immobiles, dans l'état fondamental, séparés par une distance R. Une expression analytique de l'énergie d'interaction a été obtenue qui donne, à courte distance, le résultat de la théorie de London (loi d'attraction en $1/R^6$ de Van der Waals), et à longue distance celui de la théorie de Casimir-Polder (loi d'attraction en $1/R^7$). Les divers facteurs apparaissant dans la formule de Casimir-Polder ont été analysés en détail et interprétés physiquement. On a également examiné le cas de 2 atomes identiques dont l'un est excité, l'autre dans l'état fondamental. On a montré qu'il existait un retard dans le transfert d'excitation d'un atome à l'autre, dû au temps de vol fini du photon qui est responsable de ce transfert d'énergie. On a établi que l'énergie d'interaction entre les 2 atomes variait en $1/R^3$ à courte distance, en $\frac{\cos kR}{R}$ à longue distance (où k est le nombre d'onde associé à la transition reliant l'état excité à l'état fondamental de l'atome). La probabilité d'émission d'un photon réel par un tel système de 2 atomes dont l'un est excité, l'autre dans l'état fondamental a été enfin calculée. On a montré que certains états du système étaient "super-radiants", d'autres "sub-radiants". Le passage au régime de la diffusion multiple cohérente a été discuté. Un calcul simple du taux d'affinement maximal des raies de résonance magnétique de l'état excité a été présenté.

RAPPEL DE QUELQUES FORMULES

Développement en ondes planes progressives du champ e.m. libre

- Dans le point de vue de Heisenberg, les opérateurs potentiel vecteur $\vec{A}(\vec{r}, t)$, champs électrique et magnétique $\vec{E}(\vec{r}, t)$ et $\vec{B}(\vec{r}, t)$, l'énergie H_R et l'impulsion \vec{P} du champ, sont donnés par les mêmes expressions que les grandeurs classiques correspondantes, à part que les coefficients du développement en ondes planes progressives $\alpha_{\vec{k}E}$ et $\alpha_{\vec{k}E}^*$ sont remplacés par des opérateurs adjoints l'un de l'autre, $a_{\vec{k}E}$ et $a_{\vec{k}E}^+$, ne commutant pas entre eux.

- Dans les formules qui suivent, $\omega = ck$. L^3 : volume dans lequel on enferme le champ et on impose les conditions de périodicité (les composantes de \vec{k} sont des multiples entiers ≥ 0 de $2\pi/L$) et que l'on fait tendre à l'infini à la fin des calculs; $\sum_{\vec{k}}$: sommation sur 2 vecteurs unitaires, \perp entre eux et à \vec{k} ; ϵ_0 : permittivité du vide

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{k}, \vec{E}} \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 \omega L^3}} \left[a_{\vec{k}\vec{E}} \vec{E} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} + a_{\vec{k}\vec{E}}^+ \vec{E}^* e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} \right] \quad (1)$$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{A}(\vec{r}, t) = i \sum_{\vec{k}, \vec{E}} \sqrt{\frac{\hbar \omega}{2\epsilon_0 L^3}} \left[a_{\vec{k}\vec{E}} \vec{E} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} - a_{\vec{k}\vec{E}}^+ \vec{E}^* e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} \right] \quad (2)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \nabla \times \vec{A}(\vec{r}, t) = i \sum_{\vec{k}, \vec{E}} \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 \omega L^3}} \left[a_{\vec{k}\vec{E}} \vec{k} \times \vec{E} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} - a_{\vec{k}\vec{E}}^+ \vec{k} \times \vec{E}^* e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} \right] \quad (3)$$

$$H_R = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{L^3} d^3r (\vec{E}^2 + c^2 \vec{B}^2) = \sum_{\vec{k}, \vec{E}} \frac{\hbar \omega}{2} \left[a_{\vec{k}\vec{E}} a_{\vec{k}\vec{E}}^+ + a_{\vec{k}\vec{E}}^+ a_{\vec{k}\vec{E}} \right] \quad (4)$$

$$\vec{S} = \epsilon_0 \int_{L^3} d^3r \vec{E} \times \vec{B} = \sum_{\vec{k}, \vec{E}} \hbar \vec{k} a_{\vec{k}\vec{E}}^+ a_{\vec{k}\vec{E}} \quad (5)$$

$$[a_{\vec{k}\vec{E}}, a_{\vec{k}'\vec{E}'}^+] = \delta_{\vec{k}\vec{k}'} \delta_{\vec{E}\vec{E}'} \quad (6)$$

- Pour passer du point de vue de Heisenberg au point de vue de Schrödinger, il suffit de supprimer les $e^{\pm i\omega t}$ dans (1), (2), (3)
- Espace des états du rayonnement quantifié (espace de Fock).

Champ électromagnétique: équivalent à une collection d'oscillateurs harmoniques indépendants, 1 pour chaque "mode" $\vec{k}\vec{E}$. Excitation élémentaire de chacun de ces modes: "photon" d'énergie $\hbar\omega$, d'impulsion $\hbar\vec{k}$, de polarisation \vec{E}

Base orthonormée de l'espace de Fock: $|n_1, n_2, \dots, n_i, \dots\rangle$

n_i : nombre d'occupations du "mode" i , ou encore nombre de photons dans ce mode.

Etat le plus général possible:

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{n_1, n_2, \dots, n_i, \dots} c_{n_1, n_2, \dots, n_i, \dots}(t) |n_1, n_2, \dots, n_i, \dots\rangle \quad (7)$$

Plusieurs autres bases possibles, mieux adaptées au moment cinétique, à l'aspect ondulatoire...

Hamiltonien d'interactions entre le champ et un système de charges (Jauge de Coulomb).

$$H = H_{part} + H_R + H_I \quad (8)$$

Particules. Particule α : masse m_α , charge e_α , spin \vec{S}_α , rapport gyromagnétique γ_α , Position \vec{R}_α , Impulsion \vec{P}_α

$$[R_{\alpha i}, P_{\alpha' j}] = i\hbar \delta_{\alpha\alpha'} \delta_{ij} \quad i, j = x, y, z \quad (9)$$

- Hamiltonien des particules : $H_{part} = \sum_{\alpha} \frac{\vec{P}_{\alpha}^2}{2m_{\alpha}} + \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \sum_{\beta \neq \alpha} \frac{e_{\alpha} e_{\beta}}{R_{\alpha\beta}}$
- Hamiltonien du rayonnement : même expression que (4)
- Interaction

$$H_I = \sum_{\alpha} \left[-\frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}} \vec{P}_{\alpha} \cdot \vec{A}(\vec{R}_{\alpha}) + \frac{e_{\alpha}^2}{2m_{\alpha}} (\vec{A}(\vec{R}_{\alpha}))^2 - \gamma_{\alpha} \vec{S}_{\alpha} \cdot \vec{B}(\vec{R}_{\alpha}) \right] \quad (11)$$

Remarque : Si les particules se groupent en systèmes distincts A, B, C... le dernier terme de (10) comporte non seulement les interactions électrostatiques instantanées à l'intérieur de A, B, C..., mais également les interactions électrostatiques instantanées entre A et B, A et C, B et C... Les systèmes A, B, C... interagissent également (au 2^{ème} ordre) via le rayonnement (par H_I) : émission d'un photon par un système et réabsorption de ce photon par l'autre. Evidemment lorsqu'on tient compte de H_I et du dernier terme de (10), l'interaction globale est retardée.

Autres formes plus commodes de l'interaction, valable lorsque les charges se groupent en systèmes globalement neutres A, B, C... de dimensions petites devant λ , et suffisamment séparés.

Par une transformation unitaire, on transforme (8) en :

$$H' = H'_{part} + H'_R + H'_I \quad (12)$$

- H'_R même expression que (4)
- $H'_{part} = H_A + H_B + \dots$ (13)

H_A : énergie de A (somme des énergies cinétiques des particules de A et des interactions électrostatiques instantanées entre particules de A)

Attention : H'_{part} ne comprend plus d'interactions électrostatiques instantanées entre systèmes différents A-B, A-C, B-C, ...

$$H'_I = -\sum_A \vec{D}_A \cdot \vec{E}(\vec{R}_A) - \sum_A \vec{M}_A \cdot \vec{B}(\vec{R}_A) - \sum_{\substack{A \\ i,j}} \varphi_{ij}^A \partial_i \vec{E}_j(\vec{R}_A) + \dots \quad (14)$$

\vec{E}, \vec{B} donnés en (2), (3)

\vec{R}_A : centre de masse de A.

\vec{D}_A : moment dipolaire électrique de A.

\vec{M}_A : moment dipolaire magnétique de A (orbital et de spin)

$\vec{\varphi}^A$: moment quadripolaire électrique de A.

- Avec ce nouvel hamiltonien, A et B ne peuvent interagir que par échange d'un photon transverse, et le caractère retardé de l'interaction apparaît beaucoup plus simplement.

Evolution d'un état discret couplé à un continuum

Modèle simplifié

A. Introduction

Lien avec le problème de l'émission spontanée :

- Etats propres de $H_0 = H_A + H_R$ couplés par V .
 - $\{ |e, 0\rangle$: atome dans niveau excité e , 0 photon - Etat discret
 - $\{ |f, \vec{k}, \vec{E}\rangle$: atome dans niveau fondamental + 1 photon \vec{k}, \vec{E} - Continuum
- Autre exemple : photoionisation par une onde monochromatique.

Problèmes que l'on cherche à résoudre :

- Comment l'état discret se vide-t-il ? Comment le continuum se remplit-il ?
- Rappel très bref de la théorie habituelle qui prévoit, en 1^{ère} approximation, une décroissance exponentielle. Ensuite, discussion détaillée des limites de cette approximation : comportement non exponentiel aux temps très courts et très longs, disparition complète du comportement exponentiel pour un couplage avec le continuum suffisamment fort et une "largeur" du continuum suffisamment faible, apparition d'un régime analogue à la précession de Rabi.

Modèle choisi - Méthode utilisée :

- Modèle le plus simple possible : 1 seul état discret, 1 seul continuum, de manière à pouvoir mener le plus loin possible des calculs exacts.
- On essaie de résoudre l'équation de Schrödinger correspondant à une condition initiale donnée : à $t=0$, système dans l'état discret.
- Ensuite, pour des modèles plus réalistes, utilisation de méthodes plus puissantes (opérateurs de projections, équations pilote...), se prêtant moins bien à l'étude des transitions entre les divers types de régime (exponentiel, oscillant).

B. Notations

Hamiltonien non perturbé H_0

Etat discret : $H_0 |\varphi_i\rangle = E_i |\varphi_i\rangle$ (I-1)

Continuum : $H_0 |\alpha\rangle = E |\alpha\rangle$, $E \geq 0$ (I-2)



Autres notations : $|\alpha\rangle = |\beta, E\rangle$ (I-3)

β : paramètres autres que E caractérisant α (par exemple polarisation \vec{E} et direction du photon émis)

Densité d'états $\rho(\beta, E)$: $d\alpha = \rho(\beta, E) d\beta dE$ (I-4)

Couplage V

les seuls éléments de matrice non nuls de V couplent $|\alpha\rangle$ à $|\varphi_i\rangle$

$\langle \alpha | V | \alpha' \rangle = \langle \varphi_i | V | \varphi_i \rangle = 0$ (I-5)

$\langle \alpha | V | \varphi_i \rangle = \langle \beta, E | V | \varphi_i \rangle = \nu(\alpha) = \nu(\beta, E)$ (I-6)

Etats négligés dans le problème de l'émission spontanée : états à plusieurs photons
 $|e, 0\rangle \leftrightarrow |f, \vec{k}, \vec{E}\rangle \leftrightarrow |e', \vec{k}', \vec{E}'\rangle \leftrightarrow |e'', \vec{k}'', \vec{E}'', \vec{k}''', \vec{E}'''\rangle \dots$

Equation de Schrödinger

I-6

$$|\psi(t)\rangle = b_i(t) e^{-iE_i t/\hbar} |\varphi_i\rangle + \int d\alpha b(\alpha, t) e^{-iEt/\hbar} |\alpha\rangle \quad (I-7)$$

$$\left\{ \begin{aligned} i\hbar \frac{d}{dt} b_i(t) &= \int d\alpha e^{i(E_i - E)t/\hbar} v^*(\alpha) b(\alpha, t) & (I-8-a) \\ i\hbar \frac{d}{dt} b(\alpha, t) &= e^{i(E - E_i)t/\hbar} v(\alpha) b_i(t) & (I-8-b) \end{aligned} \right.$$

Conditions initiales : $b(\alpha, 0) = 0 \quad b_i(0) = 1 \quad (I-9)$

Equation intégrodifférentielle équivalente à l'équation de Schrödinger.

On intègre (I-8-b) et on reporte $b_\alpha(t)$ dans (I-8-a), compte tenu de (I-9):

$$\frac{d}{dt} b_i(t) = -\frac{1}{\hbar^2} \int d\alpha \int_0^t dt' e^{i(E_i - E)(t-t')/\hbar} |v(\alpha)|^2 b_i(t') \quad (I-10)$$

En utilisant (I-4), et en intégrant sur β , on obtient :

$$\boxed{\frac{d}{dt} b_i(t) = -\frac{1}{2\pi\hbar} \int_0^\infty dE \int_0^t dt' \Gamma(E) e^{i(E_i - E)(t-t')/\hbar} b_i(t')} \quad (I-11)$$

avec

$$\boxed{\Gamma(E) = \frac{2\pi}{\hbar} \int d\beta |v(\beta, E)|^2 \rho(\beta, E)} \quad (I-12)$$

La vitesse de variation de $b_i(t)$ à l'instant t dépend de toute "l'histoire antérieure" $b_i(t')$.

Allure de la fonction $\Gamma(E)$ - Largeur du continuum.

- $\Gamma(E)$: homogène à l'inverse d'un temps
- $\frac{\hbar}{2\pi} \Gamma(E) dE$: somme des carrés des éléments de matrice de V reliant $|\varphi_i\rangle$ à tous les états du continuum d'énergie comprise entre E et $E+dE$.
- $\Gamma(E)$ caractérise la dépendance en E du couplage de $|\varphi_i\rangle$ avec le continuum.

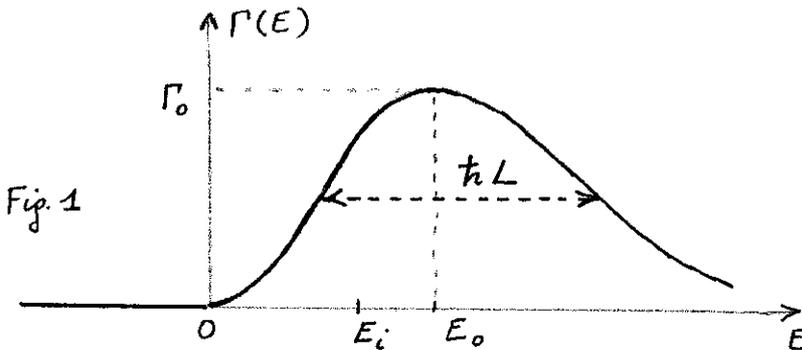


Fig. 1

$$\Gamma(E) \geq 0 \quad (I-13)$$

- Pour $E < 0$, $\rho(\beta, E) = 0$. Donc :

$$\Gamma(E) = 0 \text{ pour } E < 0 \quad (I-14)$$

- Pour $E \rightarrow \infty$, $\rho(\beta, E) \rightarrow \infty$ mais on suppose que $v(\beta, E) \rightarrow 0$ suffisamment vite pour que

$$\Gamma(E) \rightarrow 0 \text{ pour } E \rightarrow \infty \quad (I-15)$$

- Ceci permet de définir une "largeur $\hbar L$ " du continuum (voir fig. 1) L est homogène à l'inverse d'un temps.

- On suppose que $\Gamma(E) \rightarrow 0$ suffisamment vite quand $E \rightarrow \infty$ pour que $\int \Gamma(E) dE$ converge et on pose :

$$\int_0^\infty \Gamma(E) dE = 2\pi\hbar \Omega_i^2 \quad (I-16)$$

où Ω_i a les dimensions d'une fréquence caractérisant le couplage de $|\varphi_i\rangle$ avec tout le continuum. Si Γ_0 est le maximum de $\Gamma(E)$, on a :

$$\Omega_i^2 \sim \Gamma_0 L \quad (I-17)$$

C - Traitement perturbatif .

1) Principe .

- Pour t suffisamment petit, on peut remplacer dans (I-11) $b_i(t')$ par $b_i(0)=1$, ce qui permet d'effectuer immédiatement l'intégrale sur t' et donne :

$$\frac{d}{dt} b_i(t) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} dE \Gamma(E) \left\{ \frac{\sin(E_i-E)t/\hbar}{E_i-E} + i \left[\frac{1 - \cos(E_i-E)t/\hbar}{E_i-E} \right] \right\} = -[A(t) + iB(t)] \quad (I-18)$$

- Pour avoir $A(t)$ et $B(t)$, il faut, pour chaque valeurs de t , multiplier les 2 fonctions de E représentés ~~sur~~ sur les figures 2a et 2b par $\Gamma(E)$, et intégrer sur E .

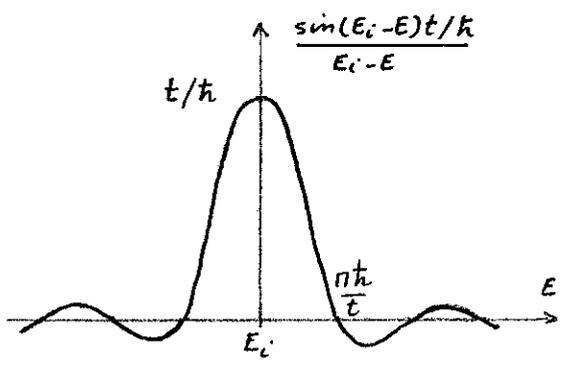


Fig 2a

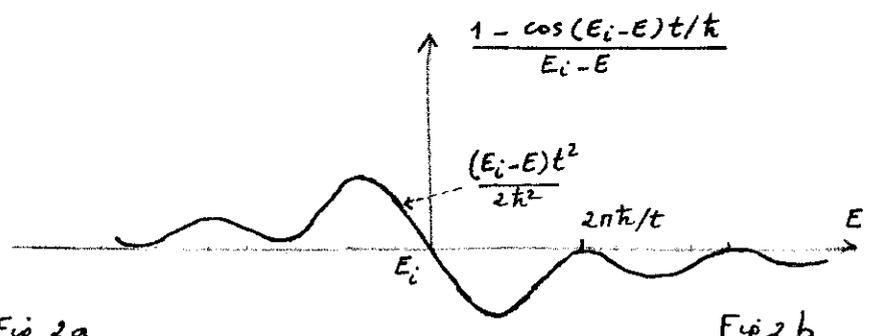


Fig 2b

Le résultat de cette intégration sur E dépend des largeurs relatives de $\Gamma(E)$ [largeur $\hbar L$] et des courbes 2a et 2b [largeur \hbar/t].

- Si $\frac{\hbar}{t} \gg \hbar L$, c-à-d si : $t \ll 1/L$ (I-19)

$$\begin{cases} A(t) \sim \frac{1}{2\pi} \int dE \Gamma(E) \frac{t}{\hbar} = \Omega_i^2 t & (I-20) \\ B(t) : \text{très petit terme en } t^2 & (I-21) \end{cases}$$

- Si $\frac{\hbar}{t} \ll L$, c-à-d si : $t \gg 1/L$ (I-22)

le terme $\left\{ \right\}$ de (I-18) se comporte comme $\pi \delta(E_i-E) + i \mathcal{P} \frac{1}{E_i-E}$, et on a :

$$\begin{cases} A(t) \simeq \frac{1}{2\pi} \int dE \Gamma(E) \delta(E_i-E) = \frac{\Gamma(E_i)}{2} = \frac{\Gamma_i}{2} & (I-23) \\ B(t) \simeq \frac{1}{2\pi} \int dE \Gamma(E) \mathcal{P} \frac{1}{E_i-E} = \Delta(E_i) = \Delta_i & (I-24) \end{cases}$$

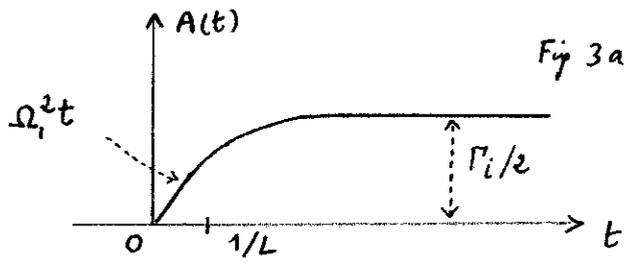


Fig 3a

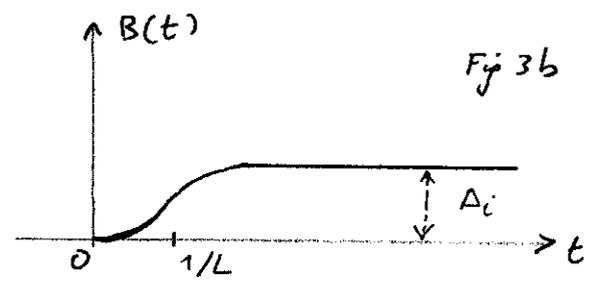


Fig 3b

- Finalement, on obtient $b_i(t)$ en intégrant (I-18)

$$b_i(t) = 1 - \int_0^t dt' [A(t') + iB(t')] \quad (I-25)$$

Encore faut-il prendre t suffisamment petit pour que $b_i(t)$ diffère très peu de 1.

2 cas sont alors à distinguer suivant que la valeur limite de t au delà de laquelle la théorie des perturbations cesse d'être valable est inférieure ou supérieure à la valeur $1/L$ qui sépare les 2 comportements limites différents de $A(t)$ et $B(t)$ représentés sur les figures 3a et 3b

2) Couplage fort avec un continuum de largeur faible

- Le maximum de la courbe $\Gamma(E)$, Γ_0 , est supposé grand devant la largeur L de cette courbe :

$$\Gamma_0 \gg L \quad (\text{I-26})$$

ce qui entraîne d'après (I-17) :

$$\Omega_1 \gg L \quad (\text{I-27})$$

(On suppose également $|E_i - E_0|/\hbar \ll \Gamma_0, \Omega_1$).

- Choisissons la borne supérieure de l'intégrale de (I-25) inférieure à $1/L$. On peut alors utiliser les formes limite (I-20) et (I-21) de $A(t')$ et $B(t')$. La contribution de $B(t')$ est négligeable, et il vient :

$$b_i(t) \approx 1 - \int_0^t dt' \Omega_1^2 t' = 1 - \frac{\Omega_1^2 t^2}{2} \quad (\text{I-28})$$

Cette expression perturbative n'est valable que si $\Omega_1 t \ll 1$, c-à-d si :

$$t \ll \frac{1}{\Omega_1} \quad (\text{I-29})$$

Comme d'après (I-27), $\frac{1}{\Omega_1} \ll \frac{1}{L}$, il était bien légitime d'utiliser les expressions limite (I-20) et (I-21).

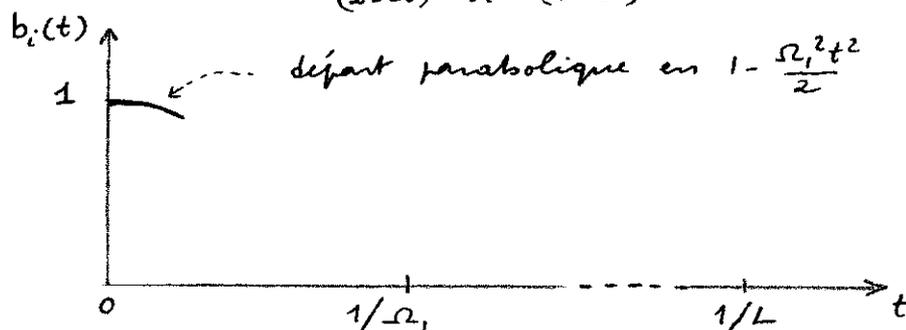


Fig 4

En conclusion, pour un couplage fort avec un continuum étroit, le départ de $b_i(t)$ est parabolique (pour des temps inférieurs à $1/\Omega_1$).

Questions : ce départ est-il celui d'une sinusoïde ? Que se passe-t-il pour $t \sim 1/\Omega_1$, $t \sim 1/L$?

3) Couplage faible avec un continuum large. Règle d'or de Fermi.

- On suppose maintenant :

$$\Gamma_0 \ll L \quad (\text{I-30})$$

ce qui entraîne d'après (I-17) :

$$\Omega_1 \ll L \quad (\text{I-31})$$

- Comme d'après les figures 3a et 3b

$$0 \leq A(t) \leq \Gamma_i/2 \quad 0 \leq B(t) \leq \Delta_i \quad (\text{I-32})$$

on a :

$$\int_0^t |A(t') + iB(t')| dt' \leq \sqrt{(\Gamma_i/2)^2 + \Delta_i^2} t \approx \Gamma_0 t \quad (\text{I-33})$$

le résultat perturbatif n'est valable que tant que :

$$t \ll 1/\Gamma_0 \quad (\text{I-34})$$

- Comme d'après (I-30), $\frac{1}{\Gamma_0} \gg \frac{1}{L}$, il faut utiliser la dépendance complète en t de $A(t)$ et $B(t)$ représentée sur les figures 3a et 3b et on peut intégrer ces fonctions de 0 à des temps courts, tout en étant petits devant $\frac{1}{\Gamma_0}$, peuvent être grands devant $\frac{1}{L}$. On obtient ainsi pour les parties réelles et imaginaires de $b_i(t)$ les comportements représentés sur les figures 5a et 5b.

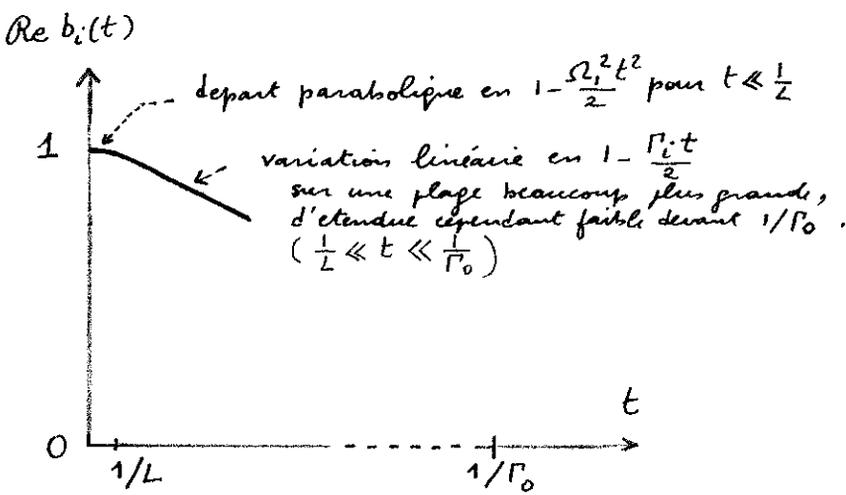


Fig 5a

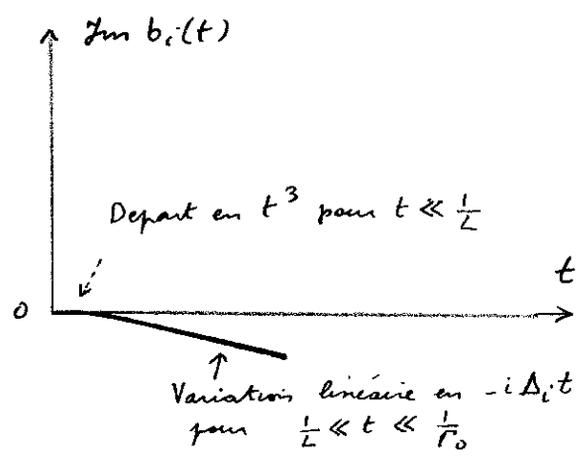


Fig 5b

En conclusion, pour $\frac{1}{L} \ll t \ll \frac{1}{\Gamma_0}$, la variation de $b_i(t)$ est linéaire.

$$b_i(t) \approx 1 - \left(\frac{\Gamma_i}{2} + i \Delta_i \right) t \tag{I-35}$$

Questions : ce départ est-il le début d'une exponentielle ? Que se passe-t-il pour $t \sim \frac{1}{\Gamma_0}$, pour $t \gg \frac{1}{\Gamma_0}$?

- Lien avec la règle d'or de Fermi.

En négligeant des termes très petits $\sim \Gamma_0^2 t^2$, on obtient à partir de (I-35)

$$|b_i(t)|^2 = 1 - \Gamma_i t \tag{I-36}$$

Par suite de la conservation de la norme, $\Gamma_i t$ est la probabilité de trouver le système dans un état quelconque du continuum.

Comme cette probabilité croît linéairement avec t , on peut parler d'une probabilité de transition par unité de temps vers le continuum qui est donnée par $\Gamma_i = \Gamma(E_i)$, c-à-d d'après (I-12) par la règle d'or de Fermi.