

Fonctions de Corrélation et fonctions de mémoire (X1-1)

pour un système en équilibre thermodynamique.

F- L'Approximation Markoffienne.

Supposons que l'ensemble $\{A\}$ contienne toutes les variables lentes. Le sous-espace orthogonal à $\{A\}$, sur lequel projette $\mathcal{P}$, contient alors uniquement des variables rapides. En particulier, les forces de Langevin $\{F\}$ qui évoluent en restant toujours dans le sous-espace orthogonal à $\{A\}$, sont des variables purement rapides. Donc les fonctions de mémoire $\{\tilde{M}(t)\}$, qui sont les fonctions de corrélation des forces de Langevin $\{F\}$, ont des temps de corrélation beaucoup plus courts que ceux des fonctions de corrélation $\{\tilde{E}(t)\}$ des variables $\{A\}$.

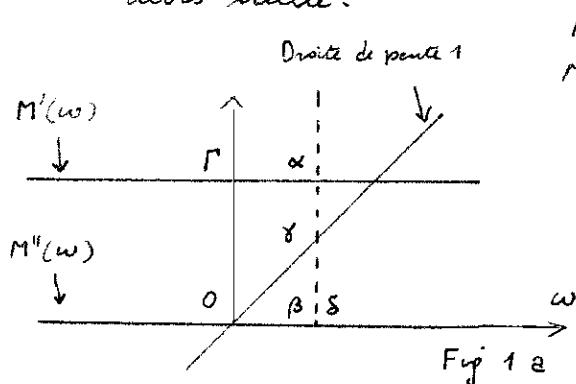
Une séparation très nette entre les échelles de temps caractéristiques des évolutions de $\tilde{E}(t)$ et $\tilde{M}(t)$, c.-à-d. encore entre les largeurs en fréquence des TF $E(\omega)$ et $M(\omega)$, permet de simplifier considérablement les équations grâce à l'approximation markoffienne discutée dans ce §.

Nous discuterons ensuite des améliorations possibles à cette approximation ainsi que ses limites.

① Cas où il y a une seule variable lente A .

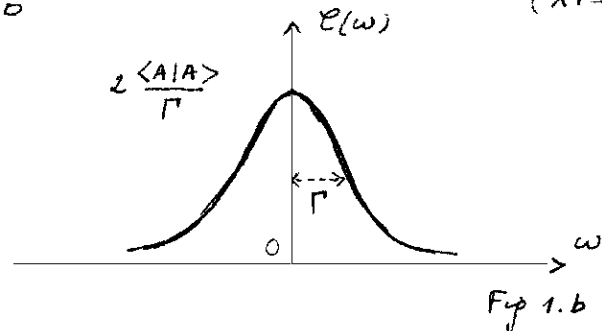
a) Discussions graphique.

- Considérons tout d'abord l'approximation revenant à considérer la mémoire comme infiniment courte, c.-à-d. $\tilde{M}(t)$ comme une fonction $\delta(t)$ infiniment étroite. $M(\omega)$, et par suite $M'(\omega) = M(\omega)/2$ [voir remarque au bas de la page X-4], sont alors assimilés à des constantes indépendantes de ω . $M''(\omega)$ qui est relié à $M'(\omega)$ par X-26 est alors nulle.



$$M'(\omega) \simeq \Gamma \quad \text{indépendant de } \omega$$

$$M''(\omega) \simeq 0 \quad (X1-1)$$



- La construction graphique introduite au § précédent donne alors pour $E(\omega)$ une lorentzienne (fig 1. b), centrée en $\omega = 0$, de $1/2$ largeur à $1/2$ hauteur Γ , et de hauteur $2\langle A|A \rangle / \Gamma$. En effet la formule (X-28) donne dans ce cas

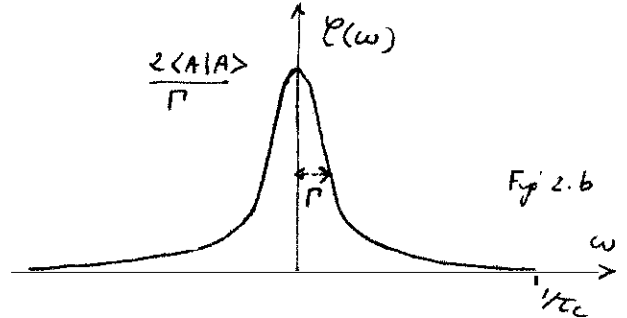
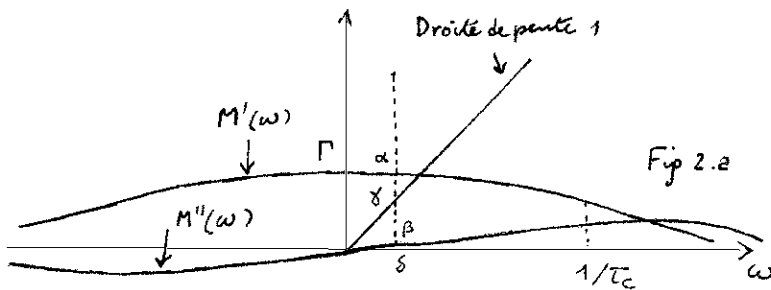
$$E(\omega) = 2\langle A|A \rangle \frac{\alpha\delta}{(\beta\delta)^2 + (\alpha\delta)^2} = 2\langle A|A \rangle \frac{\Gamma}{\omega^2 + \Gamma^2} \quad (X1-2)$$

- Evidemment l'assimilation de $M'(\omega)$ à une constante est une approximation trop grossière puisqu'elle conduit à des moments tous infinis pour $M(\omega)$, en contradiction avec les résultats du § précédent. La construction de la figure 2 a cependant l'intérêt d'attirer l'attention sur

l'ordonnée à l'origine de $M'(\omega)$, qui donne la largeur de $\mathcal{E}(\omega)$, c.-à-d. encore l'inverse du temps de corrélation de A.

- Prenons alors maintenant pour $M'(\omega)$ une fonction plus réaliste, tendant vers 0 quand $|\omega| \rightarrow \infty$. La largeur en fréquence d'une telle fonction est l'inverse du temps de corrélation τ_c de la force de Langmuir, alors que l'ordonnée à l'origine est, d'après ce que nous avons vu plus haut, l'inverse du temps de relaxation T de A.

Si donc il y a une séparation nette entre échelles de temps des variables lentes et rapides, c.-à-d. si $\tau_c \ll T$, la largeur de la courbe $M'(\omega)$ doit être beaucoup plus grande que sa hauteur. $M'(\omega)$ doit donc être une courbe très "aplatie". $M''(\omega)$, liée à $M'(\omega)$ par la relation (X-26), a une forme de dispersion, les abscisses des maxima sont de l'ordre de $1/\tau_c$, leur hauteur de l'ordre de $1/T$. Donc la pente à l'origine de la courbe de dispersion est de l'ordre de $\tau_c/T \ll 1$.



La construction graphique de $\mathcal{E}(\omega)$ conduit alors à une courbe qui, pour $\omega \ll 1/\tau_c$, coïncide pratiquement avec la lorentzienne de la figure 1 b [hauteur $2\langle A|A \rangle / \Gamma$ et $1/2$ largeur $\sim 1/2$ hauteur Γ], mais qui, pour $\omega \gg 1/\tau_c$, tend vers 0 beaucoup plus vite qu'une lorentzienne.

- En conclusion, si les échelles de temps des variables lente et rapides sont suffisamment séparées, et si on observe la variable lente avec une résolution en temps inférieure à τ_c , on peut dire que la fonction de corrélation de la variable lente est une lorentzienne.
- b) Simplification des équations.

- Si, comme nous le supposons ici, $\tilde{E}(t)$ varie beaucoup plus lentement que $\tilde{M}(t)$, on peut, dans l'équation fondamentale IX-12, remplacer $\tilde{E}(t-\tau)$ par $\tilde{E}(t)$ et sortir $\tilde{E}(t)$ de l'intégrale dont on peut alors étendre la borne supérieure à $+\infty$ si t est supérieur à la largeur τ_c de $\tilde{M}(t)$.

$$-\int_0^t dt \tilde{E}(t-\tau) \tilde{M}(\tau) \approx -\tilde{E}(t) \int_0^\infty dt \tilde{M}(\tau) \quad (X1-3)$$

Notons d'ailleurs que, compte tenu de (IX-30) :

$$\int_0^\infty dt \tilde{M}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \tilde{M}(\tau) = M(0) \quad (X1-4)$$

- Dans l'espace des fréquences, l'approximation précédente revient à négliger, dans la formule fondamentale IX-36, la variation avec ω de $M(\omega)$ qui est beaucoup plus lente que celle de $\mathcal{E}(\omega)$. On remplace dans (IX-36) $M(\omega)$ par $M(0)$, ce qui donne, compte tenu du fait que $\Omega = 0$ lorsqu'il n'y a qu'une variable

$$C(\omega) \simeq \frac{\langle A|A \rangle}{-i\omega + M(0)} \quad (X1-5)$$

X1-3

Nous posons désormais

$$M(0) = \Gamma \quad (X1-6)$$

- Si le produit scalaire choisi est (IX-4), l'évolution de la moyenne à 1 temps $\langle A(t) \rangle$ devient, compte tenu de (X1-3, 4, 6) :

$$\frac{d}{dt} \langle A(t) \rangle = -\Gamma \langle A(t) \rangle \quad (X1-7)$$

Γ est donc un temps de relaxation. D'après (X1-4) et (IX-10)

$$\Gamma = \int_0^\infty \tilde{M}(\tau) d\tau = (\langle A|A \rangle)^{-1} \int_0^\infty d\tau \langle F(0) | F(\tau) \rangle \quad (X1-8)$$

En utilisant l'expression (IX-28) de $\langle A|A \rangle$ pour le produit scalaire choisi, on obtient

$$\Gamma = \chi^{-1} L \quad (X1-9)$$

où $\chi = \langle A|A \rangle$ est une susceptibilité statique et

$$L = \frac{1}{kT} \int_0^\infty d\tau \langle F(0) | F(\tau) \rangle \quad (X1-10)$$

est appelé coefficient cinétique ou coefficient d'Onsager. La relation (X1-10) est appelée relation de Green-Kubo.

② Cas où il y a plusieurs variables lentes

a) Discussion graphique simple montrant que les densités spectrales des variables lentes ne sont plus forcément lorentziennes

- Supposons qu'on veuille introduire le projecteur sur l'ensemble des variables lentes $\{A_1, A_2, \dots, A_r\}$, on ait projeté uniquement sur l'une d'entre elles, A_1 , par exemple. Tous les calculs exposés plus haut demeurent valables, en particulier la formule (X-27) sur laquelle est basé la construction graphique de la densité spectrale $E_{11}(\omega)$ de la fonction d'autocorrélation de A_1 . Reprenons alors cette construction graphique et voyons comment les résultats du § précédent risquent d'être modifiés.

- Le point important est que le sous-espace orthogonal à A_1 ne contient plus uniquement des variables rapides puisqu'il y a d'autres variables lentes que A_1 . En particulier, la fonction $M'(\omega)$ n'est plus forcément une fonction "aplatisée" comme c'était le cas dans le § précédent (voir fig 2-2), mais peut présenter des structures étroites (hauteurs plus grandes que larges) dues à la manifestation des variables lentes autres que A_1 dans l'opérateur d'évolution $e^{i\mathcal{P}\mathcal{L}\mathcal{P}t}$.

- Montrons alors que, même si $M'(\omega)$ a une forme simple, on ne peut pas écarter à priori la possibilité de formes plus compliquées pour $E(\omega)$. Supposons par exemple que $M'(\omega)$ ait la forme d'une courbe d'absorption étroite (fig 3-2). $M''(\omega)$ a alors la forme d'une courbe de dispersion étroite (pente à l'origine > 1) et la droite de pente 1 coupe cette courbe de dispersion en 2 points C et D.

Comme $\beta\gamma$ s'annule en ces 2 points et que $(\beta\gamma)^2$ figure au dénominateur de l'expression X-28 donnant $\mathcal{E}(\omega)$, on voit que $\mathcal{E}(\omega)$ est alors une courbe à 3 maxima, l'un en 0 et les 2 autres au voisinage des abscisses des points C et D.

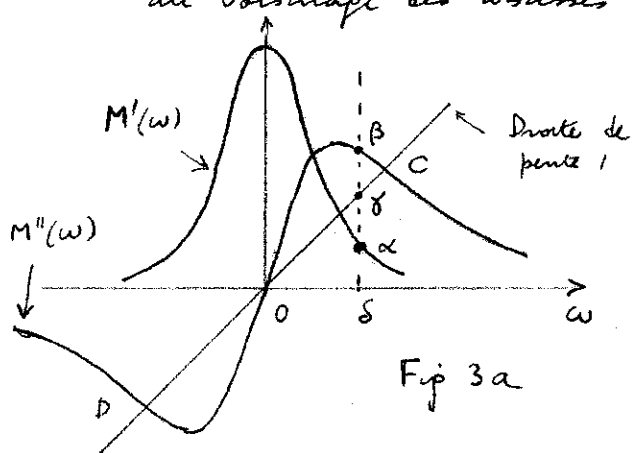


Fig 3a

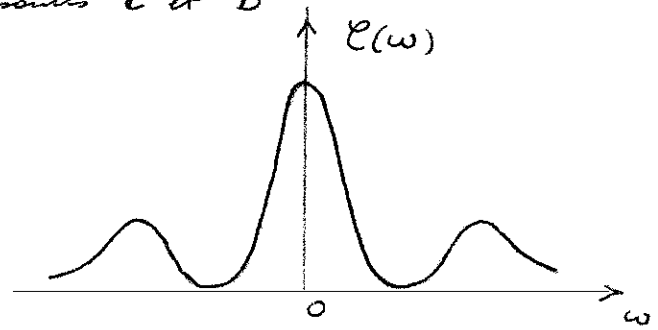


Fig 3b

En conclusion, dès qu'il y a plus d'une variable lente, les densités spectrales des fonctions d'auto-corrélation des variables lentes peuvent avoir une forme plus complexe que celle d'une simple lorentzienne, même à la limite Markoffienne.

b) Simplification des équations grâce à l'approximation Markoffienne.

- La discussion précédente montre que, pour pouvoir introduire simplement les approximations correspondant à l'existence de 2 échelles de temps bien distinctes dans le problème, il faut absolument projeter sur l'ensemble de toutes les variables lentes, de manière à ce qu'il ne reste dans la fonction de mémoire $\tilde{M}_{AA}(t)$ que des constantes de temps courtes. On peut alors valablement assimiler à 0 la largeur temporelle $L_{\tilde{M}_{AA}(t)}$, ou ce qui revient au même, négliger la variation avec ω de $\tilde{M}_{AA}(\omega)$.
- Toutes les formules établies plus haut dans le cas d'une seule variable se généralisent aisément à condition de remplacer les nombres $M(t)$, $M(0)$, Γ ... par des matrices $r \times r$.
- Par exemple, si le produit scalaire choisi est (IX-4), on obtient pour l'évolution des valeurs moyennes à 1 temps

$$\frac{d}{dt} \langle A_i(t) \rangle = \sum_{\ell=1}^r \langle A_{\ell}(t) \rangle (i\Omega_{\ell i} - \Gamma_{\ell i}) \quad (X1-11)$$

où les fréquences $\Omega_{\ell i}$ (qui ne sont plus nécessairement nulles comme dans le cas à 1 variable) sont données par

$$\Omega_{\ell i} = \beta \sum_{k=1}^r (\chi^{-1})_{\ell k} \langle A_k | \mathcal{L} | A_i \rangle \quad (X1-12)$$

la matrice χ^{-1} étant l'inverse de la matrice χ des susceptibilités

$$\chi_{ij} = \beta \langle A_i | A_j \rangle \quad (X1-13)$$

et où les temps de relaxation $\Gamma_{\ell i}$ valent

$$\Gamma_{\ell i} = \sum_k (\chi^{-1})_{\ell k} L_{ki} \quad (X1-14)$$

le coefficient cinétique L_{ki} étant donné par la relation de Green-Kubo

$$L_{ki} = \frac{1}{kT} \int_0^\infty d\tau \langle F_k(0) | F_i(\tau) \rangle \quad (X1-15)$$

X1-5

- Avec le produit scalaire (IX-5), on obtient pour les fonctions de corrélation symétriques.

$$\frac{d}{dt} \tilde{C}_{ji}(t) = \sum_{\ell=1}^r \tilde{C}_{j\ell}(t) [i\Omega_{\ell i} - \Gamma_{\ell i}] \quad (X1-16)$$

$$\text{ou} \quad \Omega_{\ell i} = \sum_k (\sigma^{-1})_{\ell k} \langle A_k | \mathcal{L} | A_i \rangle \quad (X1-17)$$

$$(\sigma)_{\ell k} = \langle A_\ell | A_k \rangle \quad (X1-18)$$

$$\Gamma_{\ell i} = \sum_k (\sigma^{-1})_{\ell k} \int_0^\infty d\tau \langle F_k(0) | F_i(\tau) \rangle \quad (X1-19)$$

- Montrons enfin comment on peut calculer aisément les densités spectrales associées aux variables lentes à partir de l'équation (IX-36) où l'on remplace la matrice $M_{AA}(\omega)$ par $M_{AA}(0) = \Gamma$. Cette équation s'écrit alors, si l'on explicite les éléments de matrice.

$$\sum_{\ell=1}^r C_{i\ell}(\omega) [-i\omega \delta_{\ell j} - i\Omega_{\ell j} + \Gamma_{\ell j}] = \langle A_i | A_j \rangle \quad (X1-20)$$

On obtient ainsi un système de r équations linéaires avec second membre que l'on peut résoudre aisément pour obtenir chaque $C_{ij}(\omega)$.

Supposons par exemple qu'il y ait 3 variables lentes A_1, A_2, A_3 et que le signal expérimental soit proportionnel à $C_{11}(\omega) = 2 \operatorname{Re} C_{11}(\omega)$.

On obtient alors en résolvant (X1-20) pour C_{11} un fractionnaire de 2 déterminants (3×3) dont il faut prendre la partie réelle pour avoir $C_{11}(\omega)$.

$$C_{11}(\omega) = 2 \operatorname{Re} \frac{\det \begin{pmatrix} \langle A_1 | A_1 \rangle & -i\Omega_{12} + \Gamma_{12} & -i\Omega_{13} + \Gamma_{13} \\ \langle A_1 | A_2 \rangle & -i\omega - i\Omega_{22} + \Gamma_{22} & -i\Omega_{23} + \Gamma_{23} \\ \langle A_1 | A_3 \rangle & -i\Omega_{32} + \Gamma_{32} & -i\omega - i\Omega_{33} + \Gamma_{33} \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} -i\omega - i\Omega_{11} + \Gamma_{11} & -i\Omega_{12} + \Gamma_{12} & -i\Omega_{13} + \Gamma_{13} \\ -i\Omega_{21} + \Gamma_{21} & -i\omega - i\Omega_{22} + \Gamma_{22} & -i\Omega_{23} + \Gamma_{23} \\ -i\Omega_{31} + \Gamma_{31} & -i\Omega_{32} + \Gamma_{32} & -i\omega - i\Omega_{33} + \Gamma_{33} \end{pmatrix}} \quad (X1-21)$$

Ce résultat se généralise aisément à un nombre quelconque r de variables lentes.

Quand il y a r variables lentes, la densité spectrale d'une variable lente est, à l'approximation scalaire, la partie réelle du quotient d'un polynôme de degré $r-1$ en ω par un polynôme de degré r . Le caractère non lorentzien d'un tel spectre pour $r > 1$ apparaît clairement.

① Idee générale

- Pour simplifier la discussion, on se limitera dans ce § au cas où il n'y a qu'une seule variable lente A , par exemple la vitesse v d'une particule Brownienne.
- Plutôt que de remplacer dans l'équation fondamentale (IX-36) $M(\omega)$ par une constante $\Gamma = M(0)$, on essaie de "modéliser" la fonction de mémoire $M(\omega)$ sous forme d'une fonction simple de ω dépendant d'un certain nombre de paramètres.
- Quelle forme analytique choisir pour $M(\omega)$?

On peut se laisser guider par des arguments de simplicité (choisir par exemple une Lorentzienne ou une gaussienne) ou par le développement en fractions continues de $C(\omega)$ [voir § C4 plus haut], trouvant après un certain nombre d'itérations.

- Comment choisir les paramètres figurant dans la fonction choisie pour modéliser $M(\omega)$?

On essaie d'utiliser au maximum les informations exactes qu'on a sur le système.

(i) Pour ω petit.

La T.F.L. de la force de friction $-\int_0^t dt \langle A(t-T) \rangle M(T)$ s'écrit $-M(\omega) \langle A(\omega) \rangle$. Pour $\omega \rightarrow 0$, c.-à-d pour des phénomènes variant très lentement [par exemple, régime stationnaire atteint par la vitesse de la particule Brownienne après application d'une force extérieure faible branchée très lentement], cette T.F.L. doit s'écrire $-\Gamma \langle A \rangle$ ou Γ est le coefficient de friction statique. Donc la valeur en $\omega=0$ de $M(\omega)$ est fixée.

$$M(0) = \Gamma \quad \text{coef. de friction statique} \quad (\text{XI-22})$$

(ii) Pour ω grand

On essaie de choisir les paramètres figurant dans $M(\omega)$ de manière à simuler un temps de collisions ou à reproduire un certain nombre de moments de la fonction de corrélation $C(\omega)$, notamment ceux qui peuvent être reliés grâce aux règles de somme à d'autres paramètres susceptibles d'être mesurés.

- On obtient ainsi une approximation de la fonction de corrélation essayant de reproduire le comportement du système, à la fois aux temps longs, comme dans l'approximation Markoffienne, mais également dans une certaine mesure aux temps courts. Dans le cas de l'hydrodynamique, une telle description améliorant celle de l'approximation markoffienne, porte le nom d'"hydrodynamique généralisée".

② Premier exemple : Choix d'une fonction simple pour $M(\omega)$

a) Assimilation de la fonction de mémoire à une exponentielle décroissante

- On prend pour $\tilde{M}(t)$:

$$\tilde{M}(t) = \tilde{M}(0) e^{-|t|/\tau_0} \quad (\text{XI-23})$$

Le paramètre τ_0 est physiquement un "temps de mémoire", ou encore un "temps de corrélation de la force de Langevin", ou encore un "temps de collision".

- De X1-23 on déduit :

$$M(\omega) = \int_0^\infty dt e^{i\omega t} \tilde{M}(t) = \tilde{M}(0) \frac{1}{\frac{1}{\tau_0} - i\omega} \quad (X1-24)$$

En identifiant $M(0) \sim \Gamma$ (voir X1-22), on obtient :

$$M(0) = \tau_0 \tilde{M}(0) = \Gamma \quad (X1-25)$$

ce qui donne finalement :

$$M(\omega) = \frac{\Gamma}{1 - i\omega\tau_0} \quad (X1-26)$$

En résumé, la fonction de mémoire choisie dépend de 2 paramètres : le coefficient de friction statique Γ et le temps de corrélation de la force de Langevin τ_0 .

b) Discussion physique.

- La T.F.L. $R(\omega)$ de la force de friction (on prend $A = v$),

$$\tilde{R}(t) = - \int_0^t d\tau \langle v(t-\tau) \rangle \tilde{M}(\tau) \quad (X1-27)$$

s'écrit

$$R(\omega) = - M(\omega) \langle v(\omega) \rangle \quad (X1-28)$$

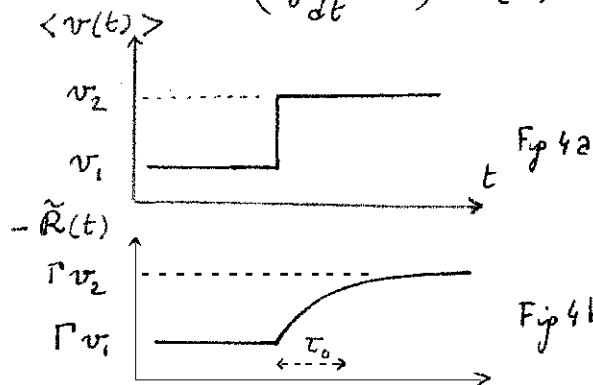
On voit que la friction est en opposition de phase avec $\langle v \rangle$ aux fréquences basses [Pour $\omega \ll 1/\tau_0$, on a, d'après X1-26, $M(\omega) = \Gamma$]. La friction est alors dissipative. Par contre, pour les hautes fréquences ($\omega \gg 1/\tau_0$) la friction devient réactive car elle est en quadrature avec $\langle v \rangle$.

- En reportant (X1-26) dans (X1-28), on obtient :

$$(1 - i\omega\tau_0) R(\omega) = - \Gamma \langle v(\omega) \rangle \quad (X1-29)$$

ce qui, par T.F., permet d'obtenir l'équation différentielle suivante reliant la friction $\tilde{R}(t)$ à la vitesse moyenne $\langle v(t) \rangle$

$$\left(\tau_0 \frac{d}{dt} + 1\right) \tilde{R}(t) = - \Gamma \langle v(t) \rangle \quad (X1-30)$$



A partir de cette équation, on montre aisément que si $\langle v(t) \rangle$ change brusquement de v_1 à v_2 (fig 4a) $\tilde{R}(t)$ ne suit pas instantanément, mais passe de $-\Gamma v_1$ à $-\Gamma v_2$ avec une constante de temps τ_0 .

Une telle équation rappelle beaucoup l'équation phénoménologique de Drude Maxwell pour l'étude de la conductivité.

c) Utilisation des règles de somme - Moments

- $\tilde{M}(t=0)$ coïncide avec le moment d'ordre 0, μ_0 , de $M(\omega)$:

$$\tilde{M}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega M(\omega) = \mu_0 \quad (X1-31)$$

Or d'après (X-36) (on prend $A = v$ et on passe à la limite classique où les diverses fonctions de corrélation coïncident) :

$$M_0 = \frac{\langle \dot{A} | \dot{A} \rangle}{\langle A | A \rangle} = \frac{\overline{\dot{v}^2}}{\overline{v^2}} \quad (XI-32)$$

On obtient alors à partir de (XI-25) la relation suivante entre τ_0 et Γ

$$\tau_0 \frac{\overline{\dot{v}^2}}{\overline{v^2}} = \Gamma \quad (XI-33)$$

— les règles de somme (VII-6) et (VII-19) donnent

$$\overline{v^2} = kT/m \quad (XI-34)$$

$$\overline{\dot{v}^2} = \overline{\ddot{x}^2} = kT \omega_\infty^2 / m \quad (XI-35)$$

avec

$$\omega_\infty^2 = \frac{n}{3m} \int d^3p \, g(p) \Delta U(p) \quad (XI-36)$$

où $g(p)$ et $U(p)$ sont respectivement la fonction de corrélation spatiale statique et le potentiel d'interaction entre la particule Brownienne et les molécules du fluide dont le nombre par unité de volume est n .

Supposons que l'on puisse déterminer $g(p)$ et $U(p)$ par d'autres méthodes et que par suite on connaisse ω_∞^2 . On peut alors exprimer τ_0 en fonction de Γ et ω_∞^2

$$\tau_0 = \Gamma / \omega_\infty^2 \quad (XI-37)$$

ce qui donne pour $M(\omega)$ d'après (XI-26)

$$M(\omega) = \frac{\Gamma \omega_\infty^2}{\omega_\infty^2 - i\omega\Gamma} \quad (XI-38)$$

et par suite pour la densité spectrale $\mathcal{E}(\omega)$ [comme $\langle A | A \rangle = \overline{v^2} = \frac{kT}{m}$]

$$\mathcal{E}(\omega) = 2 \operatorname{Re} \frac{\langle A | A \rangle}{-i\omega + M(\omega)} = \frac{2kT}{m} \frac{\Gamma}{\omega^2 + \Gamma^2 \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_\infty^2}\right)^2} \quad (XI-39)$$

Alors que l'approximation markoffienne donne une lorentzienne de largeur Γ , on voit que la fonction de mémoire (XI-23) donne une densité spectrale décroissant comme $1/\omega^4$ pour $\omega \rightarrow \infty$. $\mathcal{E}(\omega)$ a donc 2 moments non divergents, γ_0 et γ_2 , alors qu'à l'approximation markoffienne, seul γ_0 ne diverge pas.

Notons qu'en choisissant pour fonction de mémoire une gaussienne au lieu d'une lorentzienne, on aurait alors une densité spectrale $\mathcal{E}(\omega)$ ayant tous ses moments finis. Mais toutes les règles de somme ne sont plus alors forcément respectées.

③ Deuxième exemple : Utilisation du développement en fractions continues.

a) Développement tronqué après une itération.

En tronquant (IX-65) après une seule itération on obtient (en supposant toujours $A = v$ et en utilisant $\Omega = 0$)

$$C(\omega) = \frac{\overline{v^2}}{-i\omega + \frac{1}{-i\omega + \frac{\Delta_1^2}{-i\omega + \alpha}}} \quad (XI-40)$$

Le dernier terme du dénominateur de (XI-36) n'est autre que $M(\omega)$. La constante α est déterminée en écrivant que $M(0) = \Gamma$. Enfin,

en utilisant l'expression (X-47) de Δ_1^2 et les équations (X1-32, 34, 35) on obtient

$$M(\omega) = \frac{\Gamma \omega_\infty^2}{\omega_\infty^2 - i\omega \Gamma} \quad (X1-41)$$

On retrouve l'expression utilisée au § précédent pour $M(\omega)$. Un tel résultat a l'intérêt de montrer que le choix d'une fonction de mémoire exponentielle n'est pas purement arbitraire mais peut être justifié à partir du développement en fractions continues.

b) Développement tronqué après 2 itérations.

- On obtient alors pour $M(\omega)$

$$M(\omega) = \frac{\Delta_1^2}{-i\omega + \frac{\Delta_2^2}{-i\omega + \alpha}} \quad (X1-42)$$

- le paramètre α s'obtient en écrivant que $M(0) = \Gamma$

$$\alpha = \Gamma \frac{\Delta_2^2}{\Delta_1^2} \quad (X1-43)$$

- les paramètres Δ_1^2 et Δ_2^2 sont donnés par (X-45) et (X-46)

$$\Delta_1^2 = \frac{\overline{\ddot{v}^2}}{\overline{v^2}} = \frac{\overline{\ddot{x}^2}}{\overline{\dot{x}^2}} = \omega_\infty^2 \quad (X1-44)$$

$$\Delta_2^2 = \frac{\overline{\ddot{v}^2}}{\overline{\dot{v}^2}} - \frac{\overline{\ddot{v}^2}}{\overline{v^2}} = \omega_\infty'^2 \quad (X1-45)$$

- Il y a donc maintenant 3 paramètres, le coefficient de friction statique, ω_∞^2 qui peut être calculé à partir de (X1-36) et $\omega_\infty'^2$ qui nécessiterait de faire intervenir la règle de somme suivante.

- l'expression de $\mathcal{L}(\omega)$ à laquelle conduit (X1-42) décroît comme $1/\omega^6$ pour $\omega \rightarrow \infty$ et a 3 moments non divergents $\delta_0, \delta_2, \delta_4$.

On verrait de même, par un calcul analogue à celui du § précédent, que le comportement de la force de friction lorsque $\langle v \rangle$ varie brusquement de v_1 à v_2 est encore plus "arrondi" que celui de la figure 4b.