

G.- Dépendance en vitesse des forces radiatives (suite et fin)

4 - Limite des faibles vitesses.

- a) Introduction - Motivations ($T-1 \rightarrow 2$)
- b) Cas d'une onde plane
Expression de la force de friction ($T-3 \rightarrow 6$)
- c) Cas d'une onde stationnaire
Solution adiabatique ($T-7 \rightarrow 9$)
Correction à l'approximation adiabatique ($T-10 \rightarrow 13$)
Résultats du calcul et discussion ($T-14 \rightarrow 17$)
- d) Une autre méthode pour éviter les ennuis liés à l'onde stationnaire ($T-18 \rightarrow 21$)
- e) Autre exemple d'approximation adiabatique
Atome soumis à une impulsion laser ($T-22 \rightarrow 25$)

Limite des faibles vitesses (1)

Motivation : pièges radiatifs

Si le potentiel V dont dérive la force dipolaire \vec{F}_d a un minimum (correspondant à un maximum de l'intensité lumineuse I si $\delta = \omega - \omega_0 < 0$) on peut envisager de piéger l'atome dans le "puits" correspondant.

L'atome oscillera autour de sa position d'équilibre, au fond du puits, avec une vitesse faible, et les forces dépendant de la vitesse v_0 seront linéaires en v_0 .

Cette force linéaire en v_0 amortit-elle le mouvement d'oscillation (force de friction) ? Ou au contraire l'amplifie-t-elle ?

Phénomènes négligés ici (2)

Echauffement du ans fluctua-
tions de la force.

On s'intéresse ici uniquement à la force moyenne linéaire en v_0 et au signe du coefficient de proportionnalité. L'effet des fluctuations sera étudié plus tard.

Condition de faible vitesse

$$|\Delta| = k|v_0| \ll \Gamma = \frac{1}{\tau}$$

Effet Doppler \ll Largeur pour v_0 \ll naturelle

On peut encore écrire

$$|v_0| \tau \ll \lambda$$

Pendant la durée de vie τ , l'atome parcourt une distance petite devant la longueur d'onde de la lumière

Cas d'une onde plane

(3)

Expression de \vec{F} (voir V-6)

$$\vec{F} = \hbar \vec{k} \frac{\omega_1^2}{2} \frac{\Gamma}{\epsilon} \frac{s}{(\omega - \omega_0 - \Delta)^2 + \frac{\Gamma^2}{4} + \frac{\omega_1^2}{2}}$$

On peut encore écrire

$$\vec{F} = \hbar \vec{k} \frac{\Gamma}{2} \frac{s}{1+s}$$

$$s = \frac{\omega_1^2/2}{(\delta - \Delta)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}}$$

Paramètre de saturation dépendant de v_0

Développement de s en puissances de $\Delta = k v_0$

$$\text{Pour } \Delta = 0 \quad s = s_0 = \frac{\omega_1^2/2}{\delta^2 + \frac{\Gamma^2}{4}}$$

Au premier ordre en Δ

$$s = \frac{\omega_1^2/2}{\delta^2 + \frac{\Gamma^2}{4} - 2\delta\Delta} \approx s_0 \left(1 + \frac{2\delta\Delta}{\delta^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} \right)$$

Valeur optimale de la force de friction dans une onde plane (5)

$$\frac{s_0}{(1+s_0)^2} \quad \text{Maximal pour } s_0 = 1$$

$$\frac{2|\delta|}{\delta^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} \quad \text{Maximal pour } |\delta| = \frac{\Gamma}{2}$$

$$\text{Or, pour } |\delta| = \frac{\Gamma}{2}, \quad s_0 = \frac{\omega_1^2/2}{\delta^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} = \frac{\omega_1^2}{\Gamma^2}$$

$$\text{Donc } s_0 = 1 \Rightarrow \omega_1^2 = \Gamma^2$$

Conditions optimales

$$\omega_1 = \Gamma \quad s = -\Gamma/2$$

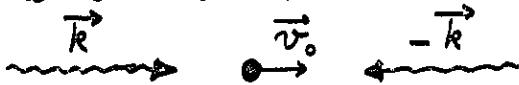
Le coefficient du terme linéaire en v_0 est alors maximal et l'on a

$$\vec{F}(v_0) = \hbar \vec{k} \frac{\Gamma}{4} - \hbar \vec{k} \frac{\Gamma \cdot \vec{v}_0}{4} + \dots$$

Problème : Peut-on éliminer le terme indépendant de v_0 pour avoir une force de friction pure ?

Expression de \vec{F} aux faibles vitesses (4)Développement de s dans \vec{F}

$$\hookrightarrow \vec{F} = \hbar \vec{k} \frac{\Gamma}{2} \frac{s_0}{1+s_0} + \hbar \vec{k} (\vec{k} \cdot \vec{v}_0) \frac{\Gamma}{2} \frac{s_0}{(1+s_0)^2} \frac{2\delta}{\delta^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} + \dots$$

1^{ère} ligne : Force pour $v_0 = 0$ 2^{ème} ligne : Force linéaire en v_0 : \vec{F}_{lin} Si $\delta < 0$, c.-à.-d si $\omega < \omega_0$, \vec{F}_{lin} représente une force de friction pour la composante de \vec{v}_0 sur \vec{k} Toujours opposé à \vec{v}_0 , quel que soit le signe de $\vec{k} \cdot \vec{v}_0$ Idée la plus simple possible (5)Prendre 2 ondes planes \vec{k} et $-\vec{k}$ de même intensité

A très faible intensité, il semble possible d'ajouter indépendamment les effets des 2 ondes (l'atome n'interagit qu'avec une seule onde à la fois). Les termes indépendants de v_0 de (VI-4) s'éliminent, les termes linéaires en v_0 se doublent. Donc si $s_0 \ll 1$, $\vec{F} = \hbar \vec{k} (\vec{k} \cdot \vec{v}_0) s_0 \Gamma \frac{2\delta}{\delta^2 + \frac{\Gamma^2}{4}}$

A plus forte intensité, apparition d'effets d'interférence entre les 2 ondes. Il faut étudier ce qui se passe pour une onde stationnaire

Onde stationnaire. Forces à la limite des faibles vitesses

Méthode des fractions continues

A forte puissance, les résonances à plusieurs photons

$$\Delta = k v_0 = \pm \frac{w_0 - w}{2n+1}$$

s'accumulent au voisinage de $v_0 = 0$ ($\Delta \rightarrow 0$ si $n \rightarrow \infty$)

On voit que la pente à l'origine change de signe

Intérêt d'une autre méthode

meilleur adaptée à la condition $|\Delta| \ll \Gamma$ et donnant un résultat analytique pouvant être discuté

Approximation adiabatique et premières corrections à cette approximation.

Expression de $\{u_a(\vec{R}), v_a(\vec{R}), w_a(\vec{R})\}$

D'après (IV-6), on a

$$\begin{cases} u_a(\vec{R}) = \frac{\delta}{\omega_1(\vec{R})} \frac{s(\vec{R})}{1 + s(\vec{R})} \\ v_a(\vec{R}) = \frac{\Gamma}{2\omega_1(\vec{R})} \frac{s(\vec{R})}{1 + s(\vec{R})} \\ w_a(\vec{R}) = -\frac{1}{2} \frac{1}{1 + s(\vec{R})} \end{cases}$$

$$\text{avec } s(\vec{R}) = \frac{[\omega_1(\vec{R})]^2 / 2}{(w - w_0)^2 + (\Gamma^2 / 4)}$$

Dans les expressions précédentes, $\vec{R} = \vec{R}_0 + \vec{v}_0 t$. Donc $u_a(\vec{R}), v_a(\vec{R}), w_a(\vec{R})$ sont des fonctions implicites de t via \vec{R} et l'on a

$$\dot{u}_a(\vec{R}) = \vec{\nabla} u_a(\vec{R}) \cdot \vec{R} = \vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla} u_a(\vec{R})$$

$\dot{u}_a(\vec{R})$ est donc différent de 0, bien que tendant vers 0 si $v_0 \rightarrow 0$. Il en est de même pour \dot{v}_a et \dot{w}_a .

Solution adiabatique des équations de Bloch : $\{u_a, v_a, w_a\}$

A chaque instant t , c'est la solution stationnaire des E.B.O. pour un atome qui serait "figé" au point $\vec{R} = \vec{R}_0 + \vec{v}_0 t$ où se trouve le vrai atome :

$$\begin{cases} 0 = \delta v_a(\vec{R}) - \Gamma u_a(\vec{R}) / 2 \\ 0 = -\delta u_a(\vec{R}) - \omega_1(\vec{R}) w_a(\vec{R}) - \Gamma v_a(\vec{R}) / 2 \\ 0 = \omega_1(\vec{R}) v_a(\vec{R}) - \Gamma [\frac{1}{2} + w_a(\vec{R})] \end{cases}$$

En (V-8) on avait pris

$$\omega_1(\vec{R}) = \omega_1(z) = 2w_1 \cos kz$$

mais le calcul qui suit est plus général et valable pour une onde stationnaire quelconque décrite par $\omega_1(\vec{R})$

Corrections à l'approximation adiabatique

- Comme u_a, v_a, w_a sont non nuls, $\{u_a, v_a, w_a\}$ n'est pas une solution des E.B.O. pour le vrai atome. Au 1^{er} membre des équations on n'a pas 0 comme dans (VI-8) mais $\{u_a, v_a, w_a\}$

- $\{u_a, v_a, w_a\}$ n'est donc qu'une solution approchée (approximation adiabatique), d'autant meilleure que v_0 est plus petit.

- La vraie solution peut s'écrire $\{u = u_a + u_{na}, v = v_a + v_{na}, w = w_a + w_{na}\}$ où u_{na}, v_{na}, w_{na} sont des corrections non adiabatiques, s'annulant si $v_0 \rightarrow 0$.

Calcul de $\{u_{na}, v_{na}, w_{na}\}$ à l'ordre 1 en v_0 (11)

- Reportons $u = u_a + u_{na}$, $v = \dots$ dans les E.B.O.

u_a, v_a, w_a sont d'ordre 0 en v_0
 u_a, v_a, w_a sont d'ordre 1 en v_0
 ainsi que u_{na}, v_{na}, w_{na} à l'ordre le plus bas.

- A l'ordre 0 en v_0 , les E.B.O. donnent les équations de VI-8 permettant de calculer $\{u_a, v_a, w_a\}$

- A l'ordre 1 en v_0 , on obtient

$$\begin{cases} \dot{u}_a(\vec{R}) = \delta v_{na}(\vec{R}) - \Gamma u_{na}(\vec{R})/2 \\ \dot{v}_a(\vec{R}) = -\delta u_{na}(\vec{R}) - \omega_1(\vec{R}) w_{na}(\vec{R}) - \Gamma v_{na}(\vec{R})/2 \\ \dot{w}_a(\vec{R}) = \omega_1(\vec{R}) v_{na}(\vec{R}) - \Gamma w_{na}(\vec{R}) \end{cases}$$

Noter que le terme inhomogène de la 3^e équation de Bloch, $-\frac{\Gamma}{2}$, a disparu car il est d'ordre 0 en v_0 .

Autre formulation équivalente (13)

Forme matricielle des E.B.O.

$$\frac{d}{dt} \vec{S} = (\vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla}) \vec{S} = (A) \vec{S} - \vec{S}_0$$

\vec{S} : vecteur de Bloch $\{u, v, w\}$

$$(A) = \begin{pmatrix} -\frac{\Gamma}{2} & \delta & 0 \\ -\delta & -\frac{\Gamma}{2} & -\omega_1(\vec{R}) \\ 0 & \omega_1(\vec{R}) & -\Gamma \end{pmatrix} \quad \vec{S}_0 : \{0, 0, \frac{\Gamma}{2}\}$$

Résolution itérative des E.B.O.

$$(A) \vec{S} = \vec{S}_0 + \frac{d}{dt} \vec{S} \quad \frac{d}{dt} = \vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla}$$

$$\hookrightarrow \vec{S} = (A)^{-1} \vec{S}_0 + (A)^{-1} (\vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla}) \vec{S}$$

Itération

$$\begin{aligned} \vec{S} &= (A)^{-1} \vec{S}_0 \\ &\quad + (A)^{-1} (\vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla}) (A)^{-1} \vec{S}_0 \\ &\quad + (A)^{-1} (\vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla}) (A)^{-1} (\vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla}) (A)^{-1} \vec{S}_0 + \dots \end{aligned}$$

1^{re} ligne : approximation adiabatique

2^{me} ligne : 1^{re} correction, linéaire en v_0

3^{me} ligne : 2^{me} correction, en v_0^2

Récapitulation des calculs à faire (12)

1) u_a, v_a, w_a donnés en VI-9

2) Calcul de $\dot{u}_a = \vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla} u_a$, $\dot{v}_a = \dots$

A partir de l'expression $u_a = \frac{\delta}{\omega_1} \frac{s}{1+s}$

$\hookrightarrow \frac{\dot{u}_a}{u_a} = -\frac{\dot{\omega}_1}{\omega_1} + \frac{s}{s+1} - \frac{\dot{s}}{1+s}$
 A partir de l'expression de $s \rightarrow \frac{\dot{s}}{s} = \frac{2\dot{\omega}_1}{\omega_1}$
 Tout se ramène à $\frac{\dot{\omega}_1}{\omega_1} = \vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla} \log |\omega_1| = \vec{v}_0 \cdot \vec{\alpha}$

3) Connaisant $\{\dot{u}_a, \dot{v}_a, \dot{w}_a\}$, le système linéaire de (VI-11) donne $\{u_{na}, v_{na}, w_{na}\}$ qui sont linéaires en v_0

4) On reporte $u = u_a + u_{na}$ dans

$$\vec{F} = -\hbar u(\vec{R}) \vec{\nabla} w_1(\vec{R})$$

$u_a(\vec{R}) \rightarrow$ Force dipolaire pour un atome immobile en \vec{R}

$u_{na}(\vec{R}) \rightarrow \vec{F}_{na}(\vec{R}) = -\hbar u_{na}(\vec{R}) \vec{\nabla} w_1(\vec{R})$

Force non-adiabatique linéaire en v_0 .

Résultats du calcul (14)

Force adiabatique \vec{F}_a

$$\vec{F}_a(\vec{R}) = -\hbar \delta \frac{s(\vec{R})}{1+s(\vec{R})} \vec{\alpha}(\vec{R})$$

avec $\vec{\alpha}(\vec{R}) = \vec{\nabla} \log |\omega_1(\vec{R})| = \frac{\vec{\nabla} w_1(\vec{R})}{w_1(\vec{R})}$

Force non adiabatique \vec{F}_{na}

linéaire en v_0

$$\vec{F}_{na}(\vec{R}, v_0) = \hbar \delta \frac{s(\vec{R})}{[1+s(\vec{R})]^3} \vec{\alpha}(\vec{R}) \times$$

$$\frac{\Gamma^2 [1-s(\vec{R})] - [\omega_1(\vec{R})]^2 s(\vec{R})}{\Gamma (\frac{\Gamma^2}{4} + \delta^2)} \vec{\alpha}(\vec{R}) \cdot \vec{v}_0$$

\vec{F}_a et \vec{F}_{na} sont toutes deux proportionnelles à $\vec{\alpha}(\vec{R})$, et sont donc dirigées suivant le gradient d'amplitude $\vec{\nabla} w_1(\vec{R})$

Valeur de \vec{F}_{na} au fond du puits (15)

- Pour piéger un atome neutre à un maximum d'intensité, il faut prendre $\delta < 0$. Par exemple, dans une onde stationnaire gaussienne, le piégeage longitudinal existe dans les ventre de l'onde, le piégeage transversal au foyer



Au fond du puits, $\vec{F}_{na} = \vec{0}$ (position d'équilibre). Donc $\vec{\alpha} = \vec{0}$

Mais, comme \vec{F}_{na} est aussi proportionnelle à $\vec{\alpha}$, la force linéaire en v_0 s'annule elle aussi au fond du puits.

Circonstance défavorable : pas de force de friction au point d'équilibre

Expression de \vec{F}_{na} aux faibles intensités ($\delta \ll 1$) (17)

$$\vec{F}_{na}(\vec{R}, \vec{v}_0) = \hbar \delta \frac{\Gamma}{\frac{\Gamma^2}{4} + \delta^2} s(\vec{R}) (\vec{\alpha}(\vec{R}), \vec{v}_0)$$

Pour une onde plane stationnaire

$$\omega_r(\vec{R}) = 2\omega_1 \cos kZ$$

$$\alpha(Z) = -k \operatorname{tg} kZ$$

$$s(Z) = 4s_0 \cos^2 kZ \quad s_0 = \frac{\omega_1^2/2}{\frac{\Gamma^2}{4} + \delta^2}$$

$$\vec{F}_{na}(Z, \vec{v}_0) = \hbar \delta \frac{\Gamma}{\frac{\Gamma^2}{4} + \delta^2} 4s_0 \sin^2 kZ \vec{R} (\vec{k}, \vec{v}_0)$$

La moyenne spatiale de \vec{F}_{na} ($\sin^2 kZ = \frac{1}{2}$) redonne alors la somme des forces linéaires en v_0 des 2 ondes planes formant l'onde stationnaire (voir VI-6)

Signe de la force linéaire en v_0 (16)

- Aux faibles intensités ($\delta \ll 1$)

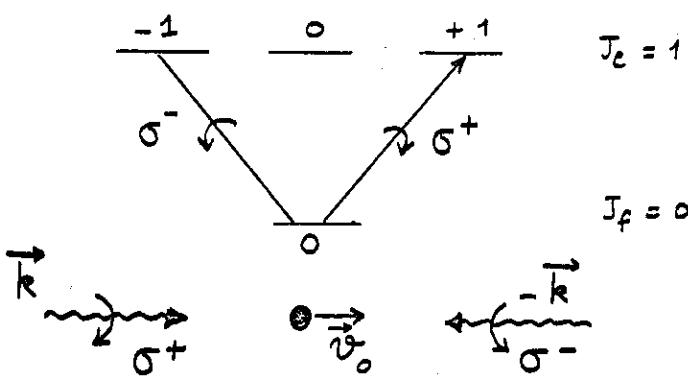
$$\Gamma^2 [1 - s(\vec{R})] - [\omega_r(\vec{R})]^2 s(\vec{R}) > 0$$
 Si $\delta < 0$ (cas d'un piège), \vec{F}_{na} est bien une force de friction toujours opposée à \vec{v}_0 , que \vec{v}_0 soit parallèle ou antiparallèle à \vec{z}
- Par contre, aux fortes intensités le coefficient $\Gamma^2(1-s) - \omega_r^2 s$ peut devenir négatif, et, dans un puits ($\delta < 0$), \vec{F}_{na} peut changer la particule quand elle s'écarte de sa position d'équilibre

Circonstance très défavorable pour un piège.

Une autre idée pour éviter les ennuis liés à l'onde stationnaire (18)

J. DALIBARD S. REYNAUD

- Utiliser des polarisations différentes pour les 2 ondes se propageant en sens inverse, de manière à ce qu'elles interagissent avec les composantes Zeeman differentes de la raie optique
- Le dipôle induit par une onde ne peut alors rayonner dans le mode associé à l'autre onde. On évite ainsi les effets d'interférence entre les 2 ondes, responsables du changement de signe de la force linéaire en v_0 aux hautes intensités.

Exemple précisTransition atomique $J_f = 0 \leftrightarrow J_e = 1$ 

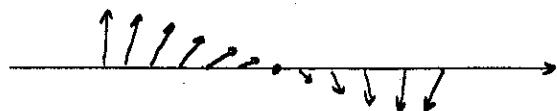
Après avoir absorbé un photon σ^+ l'atome ne peut que réemettre un photon σ^+ (conservation du moment cinétique)

Impossibilité d'absorber un photon \vec{k} et de réemettre de manière stimulée un photon $-\vec{k}$

Pas de force de type miroir

Structure de l'onde résultante- Intensité uniforme

Par contre, l'onde résultante est polarisée linéairement, avec un vecteur polarisation qui tourne hélicoïdalement autour de \vec{k} .



Comme il n'y a pas de gradient d'intensité, il n'y a pas de "puits" de potentiel comme dans une onde stationnaire.

Il faut une autre onde pour piéger. Séparation des fonctions de piégeage et de refroidissement.

(19)

Valeur optimale de la force de friction

Si les 2 ondes ont même intensité, le calcul donne une force de friction pure (nulle pour $v_0 = 0$), toujours de même signe, et de valeur optimale

$$\vec{F} = -0,31 \frac{\hbar}{m} \vec{k} (\vec{k} \cdot \vec{v}_0)$$

Mouvement le long de \vec{k}

$$M \frac{d\vec{v}_0}{dt} = -0,31 \frac{\hbar}{m} \vec{k}^2 \vec{v}_0$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{v}_0}{dt} = -\frac{1}{T_{\text{ext}}} \vec{v}_0$$

$$\begin{aligned} T_{\text{ext}} &= \text{Temps d'amortissement} \\ &= \frac{1}{0,31} \frac{\hbar}{E_{\text{rcal}}} \end{aligned}$$

On retrouve bien \hbar/E_{rcal} comme temps d'évolution caractéristique des variables externes

Autre exemple d'approximation adiabatique et de correction à cette approximation

Atome à 2 niveaux, initialement immobile, soumis à une impulsion laser (paquet d'ondes à 1 dimension)



Durée T de l'impulsion supposée très courte devant τ (émission spontanée négligeable) mais suffisamment longue pour que

$$\frac{1}{T} \ll \omega = \sqrt{\omega_r^2 + \delta^2}$$

y compris si $\omega_r = 0$: $\frac{1}{T} \ll |\delta|$

La précession du spin fictif autour du champ effectif (voir IV-11) est très rapide devant la vitesse de rotation de ce champ

Corrections à l'approximation

(24)

adiabatique

u_a, v_a, w_a ne sont solutions des équations de Bloch (avec $\Gamma=0$) que si w_a et S_2 ne dépendent pas de t

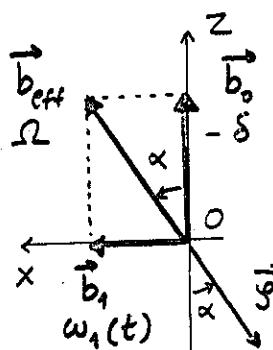
En fait, w_a et S_2 varient lentement au cours du temps et u_a, v_a, w_a sont non nuls

Si l'on pose $u = u_a + u_{na}$, $v = v_a + v_{na}$, $w = w_a + w_{na}$, on obtient, à l'ordre 1 en $1/T$

$$\begin{cases} \dot{u}_a = \delta v_{na} \\ \dot{v}_a = -\delta u_{na} - w_a w_{na} \\ \dot{w}_a = w_a v_{na} \end{cases}$$

Expression de la force

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \text{Dipôle } E_0 \vec{P} \phi = \hbar \vec{k} \vec{\omega}_1 \vec{w}, \vec{v} \\ &= \underbrace{\hbar \vec{k} \vec{\omega}_1 v_a}_{\vec{F}_a} + \underbrace{\hbar \vec{k} \vec{\omega}_1 w_a v_{na}}_{\vec{F}_{na}} \end{aligned}$$

Dans le référentiel tournant (23)

En 1^{re} approximation, le spin fictif \vec{S} (gardant un module constant $\frac{1}{2}$) reste aligné le long de \vec{b}_{eff} en partant à $t=-\infty$ de la position d'équilibre : $u=0$,

$v=0$, $w=-\frac{1}{2}$ et en y revenant à $t=+\infty$

Solution adiabatique

A tout instant t , \vec{S} aligné sur \vec{b}_{eff} supposé "figé" à cet instant

$$u_a = -\frac{1}{2} \sin \alpha = -\frac{w_1}{2 S_2} \quad S_2 = \sqrt{w_1^2 + S^2}$$

$$v_a = 0$$

$$w_a = -\frac{1}{2} \cos \alpha = \frac{\delta}{2 S_2}$$

Équations de Bloch (avec $\Gamma=0$)

$$\begin{cases} \dot{u} = \delta v \\ \dot{v} = -\delta u - w_a w \\ \dot{w} = w_a v \end{cases}$$

Interprétation physique de \vec{F} (25)

- Comme $v_a = 0$, $\vec{F}_a = \vec{0}$
 \vec{F}_a est nul car on a pris $\Gamma=0$

- D'après l'équation $\dot{w}_a = w_a v_{na}$

$$\vec{F}_{na} = \hbar \vec{k} \dot{w}_{na}$$

$$\text{Or } w_a = \frac{\delta}{2 S_2} \rightarrow \vec{F}_{na} = -\frac{\hbar \vec{k}}{2} \delta \frac{\dot{S}}{S_2}$$

Comme on néglige l'émission spontanée, l'atome ne peut qu'absorber un photon et monter dans e , en gagnant l'impulsion $\hbar \vec{k}$, puis retomber dans f par émission stimulée, en perdant $\hbar \vec{k}$. La force est donc, dans tous les cas

$$\vec{F} = \hbar \vec{k} \dot{\sigma}_{ee} = \hbar \vec{k} \dot{w}$$

Si l'on peut remplacer \dot{w} par \dot{w}_a (ordre 1 en $1/S_2 T$), σ_{ee} part de 0, croît lentement, puis redécerait à 0. L'atome est donc accéléré, puis ralenti et se retrouve avec une vitesse nulle à la fin de l'impulsion laser.

Référence pour le § 4 c

J.P. GORDON, A. ASHKIN

Phys. Rev. A 21, 1606 (1980)