

⑤ 2^{ème} exemple : équations de Fokker-Planck pour la fonction de distribution de x et p d'un atome dans un puits de potentiel optique

a) Analyse des phénomènes physiques

Problème à une dimension : Pour simplifier, on suppose que la configuration laser appliquée à l'atome a un axe de symétrie Ox , et on étudie la projection du mouvement sur cet axe. Découplage avec les mouvements sur les 2 autres axes. On note x et p les projections sur Ox de $\vec{r}$ et $\vec{p}$

Force moyenne

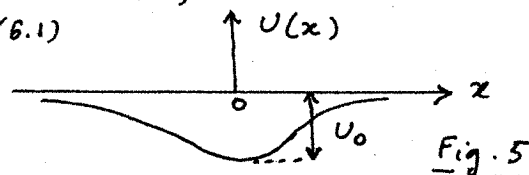
- Prenons d'abord un atome immobile en x . La force moyenne totale (pression de radiation + force dipolaire) agissant sur l'atome a une valeur $\phi(x)$ qui dépend de x . En général, dans les configurations de type piège, la pression de radiation est nulle (superposition de 2 ondes de même forme, de même foyer, se propageant en sens inverse, de sorte que les 2 pressions de radiation s'équilibrent), et la force moyenne se réduit à la force dipolaire qui dérive d'un potentiel $U(x)$

$$\phi(x) = -\frac{d}{dx} U(x) \quad (6.1)$$

Allure de $U(x)$ pour $\delta = \omega - \omega_0 < 0$

Puits de potentiel de profondeur U_0

(Voir cours III)



- Atome de vitesse $v = p/M$ très faible ($kv \ll \Gamma$). Une résolution approchée des équations de Bloch optiques (utilisant la première correction à l'approximation adiabatique), introduit une force supplémentaire, linéaire en p , que nous noterons $-\gamma(x)p$, où $\gamma(x)$ dépend en général de x [voir cours 1982-83, cours VI]. Nous supposons que les paramètres ont été choisis pour que $\gamma(x)$ soit positif (force de friction). La force moyenne totale, développée à l'ordre 1 en p , s'écrit donc

$$\text{Force moyenne} = \phi(x) - \gamma(x)p \quad (6.2)$$

Fluctuations de la force autour de sa valeur moyenne

Le caractère aléatoire de l'émission spontanée (instant où elle se produit, direction de l'émission...) introduit des fluctuations dans les échanges d'impulsion entre atomes et photons. Les fluctuations de la pression de radiation ont déjà été analysées dans le cours IV. Les fluctuations des forces dipolaires, qui sont, elles aussi, dues à l'émission spontanée, seront analysées plus loin. Pour le problème étudié ici, le point important est que les fluctuations de ce force sont responsables d'une marche au hasard de p dans l'espace des impulsions, pouvant être décrite par une diffusion de l'impulsion atomique. Si $\tau_c \ll \delta t \ll T_R$

$$\overline{\delta p^2} - \overline{\delta p}^2 = 2D(x) \delta t \quad (6.3)$$

où le coefficient de diffusion $D(x)$ [qui sera calculé ultérieurement en fonction des gradients d'intensité] dépend en général de x

Identification des variables markoviennes

Comme $\phi(x)$, $\gamma(x)$, $D(x)$ dépendent de x , l'évolution de l'atome entre t et $t + \delta t$ dépend non seulement de $p(t)$ mais aussi de $x(t)$. C'est l'ensemble $\{x, p\}$ qui est markovien, et non p tout seul (voir remarque page V-3)

b) Description par une équation de Langevin

[VI-2]

- Comme dans l'exemple précédent (§ 4c), la diffusion de l'impulsion atomique peut être décrite en ajoutant dans l'équation du mouvement de p une force de Langevin aléatoire $F(x, t)$ qui dépend maintenant de x (comme D)

$$\begin{cases} \dot{p} = \phi(x) - \gamma(x)p + F(x, t) \\ \dot{x} = p/M \end{cases} \quad \begin{matrix} (6.4.a) \\ (6.4.b) \end{matrix}$$

Le temps de corrélation $\tau_c \sim \Gamma^{-1}$ de F doit être court devant γ^{-1} et Ω^{-1} (où Ω est la fréquence d'oscillation de l'atome dans le puits de la figure 5), pour qu'on puisse considérer le processus $\{x, p\}$ comme markovien

$$\tau_c \sim \Gamma^{-1} \ll \gamma^{-1}, \Omega^{-1} \quad (6.5)$$

Pendant τ_c , les variations de x et p sont négligeables. La fonction de corrélation de $F(x, t)$ peut alors être considérée comme une fonction $\delta(\tau)$ vis à vis des variables lentes. Si l'on pose

$$\overline{F(x, t) F(x, t+\tau)} = 2D(x) \delta(\tau) \quad (6.6)$$

on retrouve alors (6.3), comme cela sera démontré plus loin. Les autres hypothèses sur F , énoncées dans le § 4c ci-dessus, sont supposées également remplies ici.

- Calcul de δx et δp pour une valeur donnée de x et p à t . L'intégration de (6.4.a) entre t et $t+\delta t$ (avec $\tau_c \ll \delta t \ll \gamma^{-1}, \Omega^{-1}$) donne

$$\delta p = \delta t [\phi(x) - \gamma(x)p] + \int_t^{t+\delta t} F(x, t') dt' \quad (6.7)$$

Dans le 1^{er} terme, et dans $F(x, t)$, on a négligé les variations de x et p entre t et $t+\delta t$. L'intégration de (6.4.b) donne

$$\begin{aligned} \delta x &= \frac{1}{M} \int_t^{t+\delta t} p(t') dt' = \frac{1}{M} \int_t^{t+\delta t} \left[p + \int_t^{t'} \dot{p}(t'') dt'' \right] dt' \\ &\approx p \delta t / M + \frac{1}{M} \int_t^{t+\delta t} dt' \int_t^{t'} dt'' F(x, t'') \end{aligned} \quad (6.8)$$

$\dot{p}(t'')$ a été remplacé par $F(x, t'')$ dans le dernier terme de la 1^{re} ligne, car les autres termes de (6.4.a) donneraient des contributions en δt^2

c) Equation de Fokker-Planck

- D'après le § 3 ci-dessus (voir fin de la page 1-6), la fonction de distribution de x et p , $\mathcal{P}(x, p, t)$, obéit à l'équation

$$\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial p} (M_1 \mathcal{P}) - \frac{\partial}{\partial x} (N_1 \mathcal{P}) + \frac{\partial^2}{\partial p^2} (M_2 \mathcal{P}) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} (N_2 \mathcal{P}) + \frac{\partial^2}{\partial x \partial p} (R_2 \mathcal{P}) \quad (6.9)$$

où

$$M_1 = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\overline{\delta p}}{\delta t} \quad N_1 = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\overline{\delta x}}{\delta t} \quad (6.10.a)$$

$$M_2 = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\overline{\delta p^2}}{2\delta t} \quad N_2 = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\overline{\delta x^2}}{2\delta t} \quad R_2 = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\overline{\delta x \delta p}}{\delta t} \quad (6.10.b)$$

M_1, N_1, M_2, N_2, R_2 dépendent en général de x et p . La limite $\delta t \rightarrow 0$ doit être comprise comme $\delta t \ll \gamma^{-1}, \Omega^{-1}$, δt restant grand devant $\tau_c \sim \Gamma^{-1}$. Les termes en $\delta t, \delta t^2, \dots$ qui subsistent dans $M_1, \dots, R_2$ sont alors négligeables (en $\gamma \delta t, \Omega \delta t, \dots$)

- Les moyennes de (6.7) et (6.8) donnent, compte tenu de $\overline{F} = 0$

$$\frac{\overline{\delta p}}{\delta t} = \phi(x) - \gamma(x)p = M_1, \quad \frac{\overline{\delta x}}{\delta t} = \frac{p}{M} = N_1 \quad (6.11)$$

- Parmi les 3 moyennes $\overline{\delta p^2}, \overline{\delta x^2}, \overline{\delta x \delta p}$, seule $\overline{\delta p^2}$ donne un terme linéaire en δt . En effet, d'après (6.7),

$$\overline{\delta p^2} = \text{Termes en } (\delta t)^2 + \int_t^{t+\delta t} dt' \int_t^{t+\delta t} dt'' \overline{F(x, t') F(x, t'')} \quad (6.12) \quad \text{VI-3}$$

L'utilisation de (6.6) donne alors

$$\lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\overline{\delta p^2}}{2\delta t} = D(x) = M_2 \quad (6.13)$$

ce qui justifie le choix de (6.6) pour retrouver (6.3). Par contre, dans $\overline{\delta x^2}$, le carré du 1^{er} terme de (6.8) donne une contribution en δt^2 , le carré du 2^{ème} donne une intégrale quadruple de la fonction de corrélation de F , c-à-d une contribution en δt^3 , le double produit étant nul par suite de $\overline{F} = 0$ (L'interprétation du terme en δt^3 est que, la dispersion sur p , variant en $\sqrt{\delta t}$, produit au bout de δt une dispersion sur x égale à $\delta t \sqrt{\delta t}$, donc une variance en δt^3). Un raisonnement analogue permet de montrer que $\overline{\delta x \delta p}$ est au moins en δt^2 . Il s'ensuit que N_2 et R_2 sont nuls.

- En regroupant tous les résultats précédents, on obtient finalement

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \frac{p}{m} \frac{\partial}{\partial x} + \phi(x) \frac{\partial}{\partial p} \right] \mathcal{P}(x, p, t) = \gamma(x) \left[\frac{\partial}{\partial p} p \mathcal{P}(x, p, t) + M k_B T(x) \frac{\partial^2}{\partial p^2} \mathcal{P}(x, p, t) \right] \quad (6.14)$$

$$\text{où l'on a posé} \quad k_B T(x) = \frac{D(x)}{M \gamma(x)} \quad (6.15)$$

D'après les résultats du § 4b ci-dessus, $D(x)/M\gamma(x)$ a en effet la signification physique d'une énergie cinétique désordonnée, $k_B T(x)$, de l'ordre de $k_B T$, caractérisée par une "température effective" $T(x)$, qui dépend en général de x comme $D(x)$ et $\gamma(x)$.

En général, $D(x)$ et $\gamma(x)$ varient dans le même sens quand l'intensité lumineuse varie, c-à-d quand x varie. Ceci n'est pas surprenant car $\gamma(x)$ et $D(x)$ décrivent la dissipation et les fluctuations introduites par le faisceau lumineux au point x , et il est bien connu qu'il y a un lien étroit entre fluctuations et dissipation. $T(x)$ varie donc lentement avec x , beaucoup plus lentement en général que $D(x)$ et $\gamma(x)$, qui, par exemple, tendent tous deux vers zéro quand on sort du puits. Une approximation raisonnable, et que nous ferons souvent par la suite pour simplifier les calculs, consiste à supposer que $T(x)$ est indépendant de x . On peut également remplacer $T(x)$ par sa valeur maximale T_m , de manière à être sûr de ne pas sous-estimer la probabilité de sortie du puits, qui est bien sûr d'autant plus grande que T est plus élevée.

Kramers (référence 4) a utilisé une équation analogue à (6.14) pour étudier les réactions chimiques considérées comme un mouvement brownien dans un potentiel à 2 minima.

c) Distribution stationnaire (pour $T(x)$ indépendant de x)

- Si $T(x)$ est indépendant de x , on vérifie par substitution directe qu

$$\mathcal{P}_{st}(x, p) = N \exp \left\{ - \left[\frac{p^2}{2M} + U(x) \right] / kT \right\} \quad (6.16)$$

est une distribution stationnaire (indépendante de t) solution de (6.14). Dans (6.16), N est une constante de normalisation, et $U(x)$ le potentiel dont dérive $\phi(x)$ [voir 6.1]. $\mathcal{P}_{st}$ a bien la forme d'une distribution d'équilibre thermodynamique associée à la température effective T .

- Au voisinage du minimum d'un puits de potentiel profond, on peut assimiler le potentiel à un puits parabolique

$$U(x) \simeq -U_0 + \frac{1}{2} M \Omega^2 x^2 \quad (6.17)$$

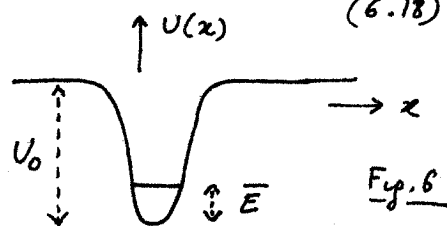
où Ω est la fréquence d'oscillation au fond du puits

Si $k_B T$ est petit devant U_0 , il est légitime de remplacer $U(x)$ par (6.17) dans (6.16) pour calculer $\langle x^2 \rangle$ et $\langle p^2 \rangle$. On trouve alors

$$\frac{1}{2M} \langle p^2 \rangle = \frac{1}{2} M \Omega^2 \langle x^2 \rangle = \frac{1}{2} k_B T \quad (6.18)$$

L'énergie résiduelle moyenne de la particule au fond du puits, $\bar{E}$, somme des énergies cinétique et potentielle moyennes (rapportée par rapport à $-U_0$), vaut alors

$$\bar{E} = k_B T = \frac{D}{M\gamma} \quad (6.19)$$



Nous reviendrons ultérieurement sur le calcul de la probabilité de sortie, mais on conçoit aisément que cette probabilité ne sera faible que si $\bar{E} = D/M\gamma \ll U_0$ (voir figure 6)

d) Existence de variables superlentes dans certains régimes

Idee générale

Parmi les variables lentes, comme x et p , il peut exister une variable superlente, beaucoup plus lente que les autres. On peut alors de nouveau considérer 2 échelles de temps très différentes, celle de la variable superlente, et celle des autres variables lentes. Pendant un intervalle de temps δt , intermédiaire entre ces 2 échelles de temps, la variable superlente apparaît comme une variable markovienne, et on peut alors espérer déduire de (6.14), une équation de Fokker-Planck à une seule variable, décrivant l'évolution de la variable superlente, et beaucoup plus facile à résoudre que (6.14) qui est à 2 variables. Un peu comme en physique moléculaire, où l'approximation de Born-Oppenheimer permet d'établir une équation pour le mouvement lent des noyaux, avec un potentiel effectif obtenu en étudiant le mouvement rapide des électrons pour une position fixée des noyaux.

Limite des frictions élevées ($\gamma \gg \Omega$)

Plaçons nous au voisinage du fond du puits, où (6.17) est valable; négligeons la variation de $\gamma(x)$ et $D(x)$ avec x , et étudions les fonctions de corrélation de x et p à la limite $\gamma \gg \Omega$. Comme nous l'avons vu plus haut (remarque à la fin du § 4c), il est plus simple de partir des équations de Langevin. En éliminant p entre les 2 équations (6.4), on obtient, compte tenu de (6.17)

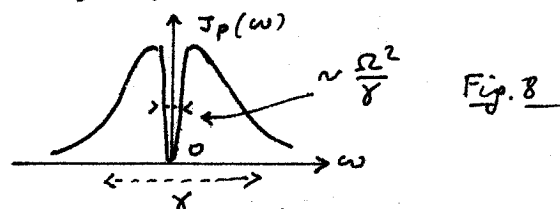
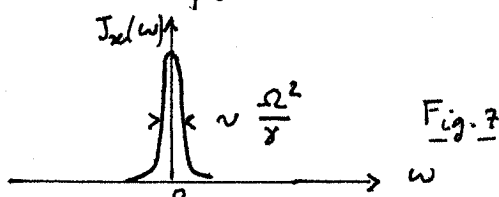
$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \Omega^2 x = F/M \quad (6.20)$$

(oscillateur amorti piloté par une force aléatoire). Le carré du module de la transformée de Fourier de x est la densité spectrale, $J_x(\omega)$ de x . Par transformée de Fourier de (6.20), on obtient

$$J_x(\omega) = \frac{1}{M^2} \frac{J_F(\omega)}{(\Omega^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \quad (6.21)$$

où J_F est la densité spectrale de F . Comme $p = M \dot{x}$

$$J_p(\omega) = M^2 \omega^2 J_x(\omega) = \frac{\omega^2 J_F(\omega)}{(\Omega^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \quad (6.22)$$



Comme $\tau_c \ll \gamma^{-1}, \Omega^{-1}$, on peut négliger la dépendance en ω de $J_F(\omega)$

$I_x(\omega)$ est une courbe très étroite (fig. 7), de largeur de l'ordre de VI-5

$$\Omega^2/\gamma = \gamma (\Omega^2/\gamma^2) \ll \gamma \quad (6.23)$$

[en effet, pour $\omega \ll \Omega$, le dénominateur de (6.21) est $\sim \Omega^4 + \gamma^2 \omega^2$ et I_x est à peu près une lorentzienne de largeur Ω^2/γ]. Par contre $I_p(\omega)$ est la superposition d'une courbe large, de largeur γ , et d'une courbe étroite, de largeur Ω^2/γ (fig. 8)

Les transformées de Fourier de (6.21) et (6.22) ne sont autres que les fonctions de corrélation de x et p . Le temps de corrélation de x , de l'ordre de $\gamma/\Omega^2 \gg \gamma^{-1}$, est beaucoup plus long que le temps de corrélation de p , de l'ordre de γ^{-1} [le poids du temps long, γ/Ω^2 , dans la fonction de corrélation de p , est très petit devant celui du temps court]

Conclusion : x est une variable superlente à la limite $\gamma \gg \Omega$

Limite des frictions faibles ($\gamma \ll \Omega$)

L'oscillation décrite par (6.20) est alors très peu amortie et les 2 variables x et p ont le même temps caractéristique, Ω^{-1} .

Par contre, à l'ordre 0 en γ et en F , l'énergie E de la particule est une constante du mouvement. E ne varie que par suite de la friction γ qui est très faible, et de la diffusion d'impulsion, qui est elle aussi très faible.

Conclusion : E est une variable superlente à la limite $\gamma \ll \Omega$

⑥ Limite des frictions élevées - Élimination adiabatique de la vitesse et équation de Fokker-Planck pour la position (références 2-4)

Idee générale. Le fait que v (ou $p = mv$) évolue beaucoup plus vite que x à la limite $\gamma \gg \Omega$ suggère que v a le temps d'atteindre un équilibre local avant que x n'ait eu le temps de beaucoup changer. En d'autres termes, si, à partir de $P(x, p, t)$, on introduit la fonction de distribution réduite

$$P(x, t) = \int dp P(x, p, t) \quad (6.24)$$

on s'attend à ce que l'on puisse écrire

$$P(x, p, t) = \rho(x, t) e^{-p^2/2Mk_B T(x)} + SP(x, p, t) \quad (6.25)$$

où SP est une petite correction par rapport au 1^{er} terme de (6.25) qui représente une distribution où p est en équilibre local.

Élimination de p

- Intégrons les 2 membres de (6.14) par rapport à p

$$\int dp \frac{\partial}{\partial t} P(x, p, t) = \frac{\partial}{\partial t} P(x, t) \quad (6.26)$$

$$\int dp \frac{p}{m} \frac{\partial}{\partial x} P(x, p, t) = \frac{\partial}{\partial x} J(x, t) \quad (6.27)$$

$$\text{ou} \quad J(x, t) = \int dp \frac{p}{m} P(x, p, t) \quad (6.28)$$

Tous les autres termes de (6.14) contiennent $\frac{\partial}{\partial p}$ ou $\frac{\partial^2}{\partial p^2}$. L'intégration sur p donne la différence des valeurs en $p = +\infty$ et $p = -\infty$ de 2 expressions contenant P ou $\partial P/\partial p$ et sont donc nulles (v est bornée). On en déduit l'équation de continuité

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} J(x, t) = 0 \quad (6.29)$$

entre la densité ρ et le courant J défini en (6.28). Aucune approximation n'a été faite pour établir (6.29). On s'attend à ce que ρ varie lentement avec t (par suite du caractère superlent

de x) et que, par suite, J varie lentement avec x

- p étant couplé à J par (6.29), calculons maintenant $\partial J / \partial t$ en multipliant les 2 membres de (6.14) par p/M et en intégrant sur p . On obtient

$$\int dp \, p \frac{\partial \mathcal{P}(x, p, t)}{\partial t} = M \frac{\partial J(x, t)}{\partial t} \quad (6.30)$$

$$\int dp \, \frac{p^2}{M} \frac{\partial \mathcal{P}(x, p, t)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} K(x, t) \quad (6.31)$$

où l'on a posé

$$K(x, t) = \int dp \, \frac{p^2}{M} \mathcal{P}(x, p, t) \quad (6.32)$$

Par intégration par parties, le 3^{ème} terme de (6.14) donne

$$\phi(x) \int dp \, p \frac{\partial \mathcal{P}(x, p, t)}{\partial p} = -\phi(x) \int dp \, \mathcal{P}(x, p, t) = -\phi(x) \rho(x, t) \quad (6.33)$$

le 4^{ème}

$$\gamma(x) \int dp \, p \frac{\partial}{\partial p} p \mathcal{P}(x, p, t) = -\gamma(x) M J(x, t) \quad (6.34)$$

et le 5^{ème} zéro. On obtient finalement

$$M \frac{\partial}{\partial t} J(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} K(x, t) - \phi(x) \rho(x, t) = -\gamma(x) M J(x, t) \quad (6.35)$$

Aucune approximation n'a été faite pour établir (6.35), mais une nouvelle quantité, $K(x, t)$, est apparue. Utilisons maintenant le fait que $J(x, t)$ varie lentement avec t , avec des constantes de temps de l'ordre des temps de corrélation de x , beaucoup plus longues que γ^{-1} . Il est donc légitime de négliger le 1^{er} terme de (6.35), $M \frac{\partial J}{\partial t}$, devant le dernier, $-\gamma M J$. Dans le même ordre d'approximation, on peut, pour calculer $K(x)$ donné par (6.32), négliger le dernier terme $\mathcal{P}$ de (6.25), et remplacer $\mathcal{P}$ par la distribution $\rho(x)$ multipliée par la distribution d'équilibre local en p . L'intégrale de (6.32) est alors élémentaire et donne

$$K(x, t) = \rho(x, t) k_B T(x) \quad (6.36)$$

Finalement, au moyen de ces 2 approximations, l'équation (6.35) donne une expression approchée de $J(x, t)$

$$J(x, t) = \frac{1}{M \gamma(x)} \left[\rho(x, t) \phi(x) - \frac{\partial}{\partial x} \rho(x, t) k_B T(x) \right] \quad (6.37)$$

Avant de reporter cette expression dans (6.29), et d'en déduire une équation de Fokker Planck pour $\rho(x, t)$, étudions la signification physique des 2 termes de (6.37)

Mobilité - Coefficient de diffusion spatiale.

- Le 1^{er} terme de (6.37) est un courant de conduction qui s'écrit

$$\mu(x) \phi(x) \rho(x, t) \quad (6.38)$$

où

$$\mu(x) = 1 / M \gamma(x) \quad (6.39)$$

a la signification d'une mobilité. En effet, pendant le temps γ^{-1} où p/M s'amortit, l'atome parcourt une distance petite devant les dimensions caractéristiques de variation de la force $\phi(x)$ qui apparaît alors comme uniforme. $\mu(x) \phi(x)$ est alors la vitesse moyenne limite, résultant de la compétition entre l'accélération produite par $\phi(x)$, et le freinage $\gamma(x)$ (solution stationnaire

de l'équation $\ddot{v} = -\gamma \dot{v} + \phi/M$. La mobilité est le V1-7 coefficient de proportionnalité entre cette vitesse limite et la force qui lui donne naissance.

- Si $T(x)$ est indépendant de x , le 2^{ème} terme de (6.37) est un courant de diffusion, qui s'écrit

$$- D(x) \frac{\partial}{\partial x} p(x, t) \quad (6.40)$$

où

$$D(x) = k_B T / M \gamma(x) = D(x) / M^2 \gamma^2(x) \quad (6.41)$$

est un coefficient de diffusion spatiale, à ne pas confondre avec le coefficient $D(x)$ de diffusion de p au point x . L'équation (6.40) exprime qu'un gradient de densité produit un courant opposé à ce gradient avec un coefficient de proportionnalité D .

Remarque : Si $T(x)$ dépend de x , le 2^{ème} terme de (6.37) contient un terme proportionnel à $p(x)$ et à $-\partial k_B T(x) / \partial x$ qui peut être regroupé avec le 1^{er}, ce qui revient à ajouter $k_B T(x)$ au potentiel $U(x)$ dont dérive $\phi(x)$.

Equation de Fokker-Planck pour $p(x, t)$

En reportant (6.37) dans (6.29), on obtient, compte tenu de (6.38) et (6.40) [$T(x)$ est supposé indépendant de x]

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} p(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} [\mu(x) \phi(x) p(x, t) - D(x) \frac{\partial}{\partial x} p(x, t)] = 0} \quad (6.42)$$

⑦ Limite des frictions faibles - Equation de Fokker-Planck pour l'énergie ou l'action (références 2-4)

Idee générale

En l'absence de friction et de diffusion ($\gamma = D = 0$), le point représentatif du système dans l'état d'énergie

$$E = \frac{P^2}{M} + U(x) \quad (6.43)$$

décrit, dans l'espace des phases (x, p) , une courbe fermée $\mathcal{C}(E)$, de manière périodique (fig. 9), ce qui correspond au mouvement de va et vient entre les 2 puits du puits de la fig. 6.

Si l'on a une distribution $\mathcal{P}(x, p)$ de points dans l'espace des phases, les points de cette distribution compris entre les courbes $\mathcal{C}(E)$ et $\mathcal{C}(E+dE)$ vont tourner rapidement (devant γ^{-1}) dans le ruban de surface dS entre $\mathcal{C}(E)$ et $\mathcal{C}(E+dE)$. Si l'on moyenne sur plusieurs périodes, la distribution va être "homogénéisée" dans le ruban dS , et $\mathcal{P}(x, p, t)$ ne va plus dépendre que de E . Plus précisément, $\mathcal{P}$ ne dépend de x et p que par l'intermédiaire de $E(x, p)$

$$\mathcal{P}(x, p, t) = \mathcal{P}(E(x, p), t) \quad (6.44)$$

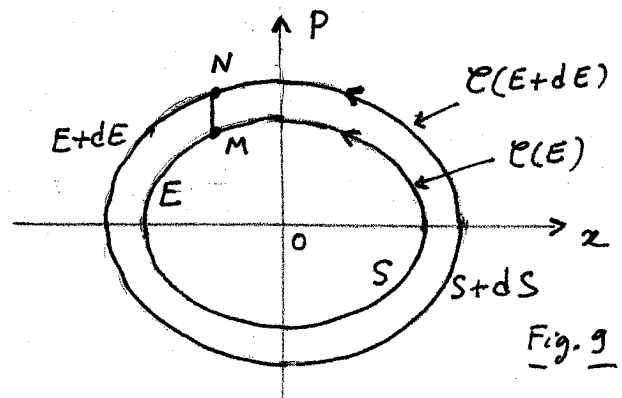


Fig. 9

où $E(x, p)$ est donné en (6.43)

(VI-8)

On peut donc définir une fonction de distribution de l'énergie $f(E, t)$ par

$$f(E, t) dE = \mathcal{P}(E(x, p), t) dS \quad (6.45)$$

$f(E, t) dE$ est la probabilité d'avoir le point représentatif du système dans le ruban de surface dS entre $\mathcal{E}(E)$ et $\mathcal{E}(E+dE)$

En l'absence de friction et de diffusion (termes du 2^{ème} membre de 6.14), E est une constante du mouvement, et $f(E, t)$ n'évolue pas. On peut effectivement vérifier que la somme des 2^{ème} et 3^{ème} termes du 1^{er} membre de (6.14) sont nuls lorsque $\mathcal{P}$ ne dépend que de $E(x, p)$. Lorsqu'on introduit une friction et une diffusion faibles, le point représentatif du système va quitter le ruban dS après plusieurs tours (car $\Omega \gg \gamma$), et $f(E, t)$ va évoluer lentement conformément à l'équation

$$\frac{\partial}{\partial t} f(E, t) = \gamma(x) \left[\frac{\partial}{\partial p} p f(E, t) + M k_B T(x) \frac{\partial^2}{\partial p^2} f(E, t) \right] \quad (6.46)$$

où le 2^{ème} membre de (6.46) représente la moyenne sur un tour du 2^{ème} membre de (6.14), et où $\mathcal{P}(x, p, t)$ a été réexprimé en fonction de $f(E, t)$ grâce à (6.45).

Avant de calculer cette moyenne, calculons dE/dS

Calcul de dE/dS

- Soit
$$S(E) = \oint_{\mathcal{P}(E)} p dx \quad (6.47)$$

la surface enfermée par la courbe $\mathcal{E}(E)$, et qui n'est autre que l'intégrale d'action sur un cycle du mouvement d'énergie E . On a

$$S + dS = \oint_{\mathcal{E}(E)} (p + dp) dx \quad (6.48)$$

où dp est la variation de p quand on passe de $\mathcal{E}(E)$ à $\mathcal{E}(E+dE)$ à x constant ($dx=0$: segment MN de la fig. 9). Or, si $dx=0$, $dU=0$ et $dE = p dp / M = v dp$, de sorte que $dp = dE/v$ pour $dx=0$ et

$$dS = dE \oint_{\mathcal{E}(E)} \frac{dx}{v} = dE \oint_{\mathcal{E}(E)} dt = \Theta(E) dE \quad (6.49)$$

où
$$\Theta(E) = 2\pi / \Omega(E) \quad (6.50)$$

est la période du mouvement d'énergie E , la pulsation étant $\Omega(E)$

- Au lieu de paramétrer les courbes de la figure 9 par E , on peut les paramétrer par l'action S et introduire ainsi une fonction de distribution $g(S, t)$ de S définie par

$$g(S, t) dS = f(E, t) dE \quad (6.51)$$

Equation de Fokker-Planck pour $f(E, t)$ ou $g(S, t)$

- Pour simplifier le calcul de la moyenne figurant dans (6.42), nous supposons que, non seulement T , mais aussi γ , ne dépendent pas de x au moins dans la région où $U(x) \neq 0$

- Comme f ne dépend que de E et que, d'après (6.43), $\partial E / \partial p = p/M$

$$\frac{\partial}{\partial p} p f = f + p \frac{\partial f}{\partial p} = f + p \frac{\partial f}{\partial E} \frac{\partial E}{\partial p} = f + \frac{p^2}{M} \frac{\partial f}{\partial E} \quad (6.52)$$

- le 2^{ème} terme de (6.46) fait intervenir

$$\frac{\partial^2 f}{\partial p^2} = \frac{\partial}{\partial p} \frac{p}{M} \frac{\partial f}{\partial E} = \frac{1}{M} \frac{\partial f}{\partial E} + \frac{p^2}{M^2} \frac{\partial^2 f}{\partial E^2} \quad (6.53) \quad \text{VI-9}$$

- Finalement, l'équation (6.46) devient

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \gamma \left[f + \frac{\overline{p^2}}{M} \frac{\partial f}{\partial E} + k_B T \left(\frac{\partial f}{\partial E} + \frac{\overline{p^2}}{M} \frac{\partial^2 f}{\partial E^2} \right) \right] \quad (6.54)$$

En effet, comme f , $\partial f / \partial E$, $\partial^2 f / \partial E^2$ ne dépendent que de E et restent donc constants sur un tour, la moyenne sur un tour ne porte que sur p^2/M . Calculons cette moyenne

$$\frac{\overline{p^2}}{M} = \frac{1}{\Theta} \oint_{\mathcal{C}(E)} \frac{p^2}{M} dt = \frac{1}{\Theta} \oint_{\mathcal{C}(E)} p v dt = \frac{1}{\Theta} \oint_{\mathcal{C}(E)} p dx = \frac{S}{\Theta} \quad (6.55)$$

- Il s'ensuit que, compte tenu de (6.49)

$$f + \frac{\overline{p^2}}{M} \frac{\partial f}{\partial E} = f + S \frac{\partial E}{\partial S} \frac{\partial f}{\partial E} = f + S \frac{\partial f}{\partial S} = \frac{\partial}{\partial S} (S f) \quad (6.56)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial E} + \frac{\overline{p^2}}{2M} \frac{\partial^2 f}{\partial E^2} &= \frac{\partial f}{\partial E} + S \frac{\partial E}{\partial S} \frac{\partial^2 f}{\partial E^2} = \frac{\partial f}{\partial E} + S \frac{\partial}{\partial S} \frac{\partial f}{\partial E} = \frac{\partial}{\partial S} \left(S \frac{\partial f}{\partial E} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial S} \left(S \frac{\partial S}{\partial E} \frac{\partial f}{\partial S} \right) = \frac{\partial}{\partial S} \left(S \Theta \frac{\partial f}{\partial S} \right) \end{aligned} \quad (6.57)$$

- Finalement, en reportant (6.56) et (6.57) dans (6.54), on obtient, en passant de $f(E, t)$ à $g(S, t)$

$$\frac{\partial g(S, t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial S} J(S, t) = 0 \quad (6.58)$$

où le courant

$$J(S, t) = -\gamma S g(S, t) - \gamma k_B T S \Theta(S) \frac{\partial}{\partial S} g(S, t) \quad (6.59)$$

est la somme d'un terme de dérive (1^{re} terme) et d'un terme de diffusion (2^e terme), avec un coefficient de diffusion

$$\Delta(S) = \gamma k_B T S \Theta(S) \quad (6.60)$$

l'équation de Fokker-Planck pour $g(S, t)$ s'écrit donc

$$\boxed{\frac{\partial g(S, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial S} \gamma S g(S, t) + \frac{\partial}{\partial S} \Delta(S) \frac{\partial}{\partial S} g(S, t)} \quad (6.61)$$

et permet d'étudier le mouvement brownien de l'énergie de la particule oscillant avec une friction faible dans le puits de potentiel

Références (à ajouter à la liste de la page N-9)

4 - H.A. Kramers, Physica VII, 284 (1940)