Equation cinétique quantique pour un atome dans une onde lumineuse

Buts de ce chapitre

- Déduire des équations de Bloch optiques généralisées (développées à l'ordre 2 inclus en $\varepsilon = kv/\Gamma \simeq \hbar k/\bar{p}$) l'équation d'évolution de $w(r,p,t)$, où $w(r,p,t)$ est la trace sur les degrés de liberté internes de l'opérateur densité atomique en représentation de Wigner
- Montrer que cette équation cinétique quantique est une équation de Fokker-Planck et établir l'expression des divers coefficients (de friction, de diffusion) apparaissant dans cette équation.

La méthode suivie est une méthode opératorielle due à Jean Dalibard[1]. Elle a l'avantage de faire apparaître les tenseurs de diffusion et de friction au même ordre de perturbation en ε (ordre 2), et de fournir des expressions explicites de ces 2 tenseurs en termes de ~~des~~ fonctions de corrélation des forces radiatives. Le lien entre fluctuations et dissipation apparait ainsi clairement. Enfin, la méthode est directement applicable à des systèmes plus complexes qu'un atome à 2 niveaux.

① Développement perturbatif des E.B.O. généralisées

Représentation d'interaction par rapport à l'énergie cinétique $P^2/2M$
Ecriture sous forme opératorielle du développement des E.B.O généralisées à l'ordre 2 en $\varepsilon = kv/\Gamma \simeq \hbar k/\bar{p} \simeq \sqrt{E_{recul}/\hbar\Gamma}$ (voir 8.48)

$$\frac{d\tilde{\sigma}_A(r,p,t)}{dt} = \mathcal{L}_0(r)\,\tilde{\sigma}_A(r,p,t) + \mathcal{L}_1(r,p,t)\,\tilde{\sigma}_A(r,p,t) + \mathcal{L}_2(r,p,t)\,\tilde{\sigma}_A(r,p,t) + \dots \quad (9\text{-}1)$$

$\tilde{\sigma}_A(r,p,t)$: Opérateur densité (dans l'espace de Hilbert $\mathcal{E}_H$ des états internes) en représentation de Wigner. Dans la base $\{e,g\}$ représenté par une matrice 2×2 dont les 4 éléments sont des fonctions de r et p

$\mathcal{L}_0(r)\,\tilde{\sigma}_A(r,p,t)$: Vitesse de variation à l'ordre 0 en ε (E.B.O. ordinaires)

$\mathcal{L}_0(r)$: Liouvillien non perturbé. Opérateur dans l'espace de Liouville $\mathcal{E}_L$ des états internes. Tout opérateur densité interne de $\mathcal{E}_H$ (plus généralement, tout opérateur de $\mathcal{E}_H$) peut être considéré comme un vecteur dans l'espace de Liouville $\mathcal{E}_L$ (de dimension $2^2=4$ pour un atome à 2 niveaux). $\mathcal{L}_0$ est un opérateur linéaire agissant dans $\mathcal{E}_L$. A tout vecteur de $\mathcal{E}_L$ (c-à-d à tout opérateur de $\mathcal{E}_H$), $\mathcal{L}_0$ fait correspondre linéairement un autre vecteur de $\mathcal{E}_L$ (c-à-d un autre opérateur de $\mathcal{E}_H$)

$\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$: Liouvilliens d'ordre 1 et 2 en ε

② Propriétés du Liouvillien non perturbé $\mathcal{L}_0$

$\mathcal{L}_0$ correspond à $\varepsilon = 0$. On peut donc, dans (8.41), négliger le terme de vol libre, négliger les corrections correspondantes en $P(t-t_0)/M$ dans (8.45), ce qui revient à confondre $\tilde{V}(t)$ et $V(t)$, négliger les termes en $\pm\hbar\vec{k}/2$ et $\hbar\omega_0\vec{k}/c$ au 2ème membre de (8.41). Les équations (8.41) s'écrivent alors sous forme opératorielle

$$\frac{d}{dt}\tilde{\sigma}_A(r,p,t) = \mathcal{L}_0(r)\,\tilde{\sigma}_A(r,p,t)$$
$$= \frac{1}{i\hbar}\left[-D^+\mathcal{E}^+(r) - D^-\mathcal{E}^-(r), \tilde{\sigma}_A(r,p,t)\right] + i\delta\left[S_z, \tilde{\sigma}_A(r,p,t)\right]$$
$$- \frac{\Gamma}{2}\left\{S_+S_-\ ;\ \tilde{\sigma}_A(r,p,t)\right\}_+ + \Gamma\, S_-\tilde{\sigma}_A(r,p,t)S_+ \qquad (9\text{-}2)$$

où $\{\ ,\ \}_+$ désigne un anticommutateur, et où

$$S_z = \frac{1}{2}\left(|e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|\right),\quad S_+ = |e\rangle\langle g|,\quad S_- = |g\rangle\langle e|,\quad D^\pm = d\,S_\pm,\quad d = \langle e|D|g\rangle \qquad (9\text{-}3)$$

De (9.2) il découle que

(i) $\mathcal{L}_0$ est indépendant de t et p et ne dépend que de r [via $\mathcal{E}^\pm(r)$]

(ii)
$$\forall\ \tilde{\sigma}_A\ ,\quad \mathrm{Tr}\left(\mathcal{L}_0\tilde{\sigma}_A\right) = 0 \qquad (9.4)$$

Pour le voir, il suffit de noter que les 2 termes de la 2ème ligne sont des commutateurs de trace nulle, et que, par suite de l'invariance d'une trace dans une permutation circulaire, les traces des 2 termes de la 3ème ligne se compensent

Une conséquence de (9.4) est que, si

$$\tilde{w}(r,p,t) = \mathrm{Tr}\ \tilde{\sigma}_A(r,p,t) \qquad (9.5)$$

alors

$$\frac{d}{dt}\tilde{w}(r,p,t) = 0 \quad \text{à l'ordre 0 en } \varepsilon \qquad (9.6)$$

l'évolution à l'ordre 0 en ε ne fait donc pas bouger r et p (rappelons que nous sommes en représentation d'interaction par rapport à $P^2/2M$, c.à.d dans le référentiel propre de l'atome où ce dernier est immobile). Comme on néglige les échanges d'impulsion entre l'atome et le rayonnement (ordre 0 en $\hbar k/\bar{p}$), il est normal aussi que p ne change pas

(iii) Dans (9.2), le nombre quantique externe p est "spectateur" et ne joue aucun rôle. Ces équations peuvent être considérées comme les E.B.O. ordinaires d'un atome immobile en r dans le champ $\mathcal{E}^\pm(r)$. Or les E.B.O. ordinaires ont toujours une solution stationnaire. Donc, pour tout r, il existe un opérateur densité interne stationnaire $\sigma_{st}(r)$, normé, satisfaisant,

$$\mathcal{L}_0(r)\,\sigma_{st}(r) = 0 \qquad \mathrm{Tr}\left(\sigma_{st}(r)\right) = 1 \qquad (9.7)$$

(iv) La solution de (9.2) peut s'écrire formellement

$$\tilde{\sigma}_A(r,p,t_2) = e^{(t_2-t_1)\mathcal{L}_0(r)}\ \tilde{\sigma}_A(r,p,t_1) \qquad (9.8)$$

Comme, d'après (9.6), la trace de $\tilde{\sigma}_A$ ne dépend pas de t (à l'ordre 0 en ε) et peut s'écrire donc $\tilde{w}(r,p)$, et que au bout d'un temps de l'ordre de Γ^{-1}, l'état interne de l'atome au point r tend vers $\sigma_{st}(r)$, on a

$$\text{si } t_2 - t_1 > \Gamma^{-1}\ ,\qquad e^{(t_2-t_1)\mathcal{L}_0(r)}\,\tilde{\sigma}_A(r,p,t_1) \simeq \underbrace{\tilde{w}(r,p)}_{=\mathrm{Tr}\,\tilde{\sigma}_A(r,p,t_1)}\,\sigma_{st}(r) \qquad (9.9)$$

– Avant d'établir, à partir de (8.41) et (8.42), les expressions de $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ nous allons maintenant étudier la forme générale de l'équation d'évolution de $\tilde{w}(r,p,t)$ défini en (9.5), telle qu'elle résulte de (9.1) et des propriétés de $\mathcal{L}_0$.

③ Forme générale de l'équation cinétique pour la fonction de Wigner externe

– Cherchons une solution de (9.1) sous la forme

$$\tilde{\sigma}_A(r,p,t) = \tilde{w}(r,p,t)\,\sigma_{st}(r) + \delta\sigma(r,p,t) \qquad (9.10)$$

où $\tilde{w}$ et σ_{st} sont définis en (9.5) et (9.7) et où par suite

$$Tr\,\delta\sigma = 0 \qquad (9.11)$$

– Le choix de (9.10) est suggéré par l'idée physique suivante : à l'ordre 0 en ε, $\tilde{w}$ ne dépend pas de t et $\delta\sigma = 0$ si t est suffisamment loin de l'instant initial t_1, d'après (9.9). Sous l'effet des forces radiatives, l'état externe de l'atome, et donc $\tilde{w}$, vont évoluer, lentement (à l'échelle de Γ^{-1}).
Le 1er terme de (9.10), $\tilde{w}\,\sigma_{st}(r)$, représente une sorte de "solution adiabatique" où l'atome reste au cours de son mouvement dans l'état interne stationnaire correspondant au point où il se trouve à chaque instant. Le 2ème terme, $\delta\sigma$, est la correction à cette approximation.
– Reportons (9.10) dans (9.1). Il vient

$$\dot{\tilde{w}}\,\sigma_{st} + \dot{\delta\sigma} = \mathcal{L}_0\,\tilde{w}\,\sigma_{st} + \mathcal{L}_0\,\delta\sigma + \mathcal{L}_1\,\tilde{w}\,\sigma_{st} + \mathcal{L}_1\,\delta\sigma + \mathcal{L}_2\,\tilde{w}\,\sigma_{st} + \mathcal{L}_2\,\delta\sigma \qquad (9.12)$$

Le 1er terme du membre de droite peut aussi s'écrire $\tilde{w}\,\mathcal{L}_0\sigma_{st}$, qui est nul d'après (9.7). En prenant la trace des 2 membres, et en utilisant (9.11) et (9.4), on obtient, compte tenu de la 2ème équation (9.7)

$$\dot{\tilde{w}} = Tr\left(\mathcal{L}_1\,\tilde{w}\,\sigma_{st}\right) + Tr\left(\mathcal{L}_1\,\delta\sigma\right) + Tr\left(\mathcal{L}_2\,\tilde{w}\,\sigma_{st}\right) + Tr\left(\mathcal{L}_2\,\delta\sigma\right) \qquad (9.13)$$

Il apparait ainsi clairement que $\dot{\tilde{w}}$ est au moins d'ordre un en ε (voir aussi 9.6) et que, pour calculer $\dot{\tilde{w}}$ à l'ordre 2 inclus en ε, il faut calculer $\delta\sigma$ à l'ordre un inclus.

– Calcul de $\delta\sigma$ à l'ordre 0. A l'ordre 0 en ε, (9.12) donne (comme $\dot{\tilde{w}}$ est d'ordre 1)

$$\dot{\delta\sigma} = \mathcal{L}_0\,\delta\sigma \qquad (9.14)$$

dont la solution est de la forme (9.9) pour $t - t_1 \gg \Gamma^{-1}$ (t_1 : instant initial)
Comme $Tr\,\delta\sigma = 0$, d'après (9.11), on en conclut que $\delta\sigma$ à l'ordre 0 est négligeable pour des instants suffisamment éloignés de l'instant initial t_1

– Calcul de $\delta\sigma$ à l'ordre 1. En négligeant $\delta\sigma$ à l'ordre 0 dans (9.12), on obtient, pour déterminer $\delta\sigma$ à l'ordre 1, l'équation

$$\dot{\delta\sigma} = \mathcal{L}_0\,\delta\sigma + \mathcal{L}_1\,\tilde{w}\,\sigma_{st} - \dot{\tilde{w}}\,\sigma_{st} \qquad (9.15)$$

où $\dot{\tilde{w}}$ à l'ordre 1 se réduit au 1er terme du 2ème membre de (9.13) puisqu'on néglige $\delta\sigma$ à l'ordre 0. La solution de l'équation différentielle du 1er ordre (9.15) s'écrit alors

$$\delta\sigma(t) \simeq \int_{t_1}^{t} dt'\, e^{(t-t')\mathcal{L}_0} \left[\mathcal{L}_1(t')\,\tilde{w}(t')\,\sigma_{st} - \left(Tr\left(\mathcal{L}_1(t')\,\tilde{w}(t')\,\sigma_{st}\right)\right)\sigma_{st}\right] \qquad (9.16)$$

où nous avons réintroduit le temps dans les diverses quantités (mais non r, p, pour simplifier les notations)

$\tilde{w}(t')$ évolue à l'échelle de $T_{ext} \sim \hbar/E_{recul} \gg T_{int} \sim \Gamma^{-1}$. Par ailleurs les constantes de temps d'amortissement associées à l'opérateur $e^{(t-t')\mathcal{L}_0}$ (lorsqu'il agit sur un écart par rapport à un état stationnaire tel que celui qui apparait dans le crochet de 9.16) sont de l'ordre de Γ^{-1}. Il est donc légitime de remplacer $\tilde{w}(t')$ par $\tilde{w}(t)$ dans (9.16). Comme par ailleurs l'intégrant de (9.16) tend vers zéro pour $t-t'$ de l'ordre de quelques Γ^{-1} [voir 9.9], on peut remplacer t_1 par $-\infty$, si $t - t_1 \gg \Gamma^{-1}$, de sorte que finalement

$$\delta\sigma(t) = \int_{-\infty}^{t} dt'\, e^{(t-t')\mathcal{L}_0} \left[\mathcal{L}_1(t')\,\tilde{w}(t)\,\sigma_{st} - \left(Tr\left(\mathcal{L}_1(t')\,\tilde{w}(t)\,\sigma_{st}\right)\right)\sigma_{st}\right] \qquad (9.17)$$

– Calcul de $\dot{\tilde{w}}$ à l'ordre 2 inclus en ε. En reportant (9.17) dans (9.13) (et en négligeant toujours $\delta\sigma$ à l'ordre 0), on obtient finalement

$$\dot{\tilde{w}}(r,p,t) = \mathrm{Tr}\left(\mathcal{L}_1(r,p,t)\,\tilde{w}(r,p,t)\,\sigma_{st}(r)\right) + \mathrm{Tr}\left(\mathcal{L}_2(r,p,t)\,\tilde{w}(r,p,t)\,\sigma_{st}(r)\right)$$
$$+\mathrm{Tr}\left\{\int_{-\infty}^{t} dt'\,\mathcal{L}_1(r,p,t)\,e^{(t-t')\mathcal{L}_0(r)}\left[\mathcal{L}_1(r,p,t')\,\tilde{w}(r,p,t)\,\sigma_{st}(r) - \left(\mathrm{Tr}\left(\mathcal{L}_1(r,p,t')\,\tilde{w}(r,p,t)\,\sigma_{st}(r)\right)\sigma_{st}(r)\right]\right\} \quad (9.18)$$

où nous avons réintroduit toutes les dépendances en r, p, t

Ainsi, la vitesse de variation $\dot{\tilde{w}}(r,p,t)$ est reliée à $\tilde{w}(r,p,t)$, aux liouvilliens d'ordre 1 et 2, $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$, et à la solution stationnaire $\sigma_{st}(r)$ des E.B.O. ordinaires pour un atome immobile en r

(4) Retour sur la représentation d'interaction (par rapport à $P^2/2M$)

– Soit ρ_A l'opérateur densité atomique, opérateur vis a vis à la fois des variables internes et externes. En représentation de Wigner, ρ_A devient l'opérateur $\sigma_A(r,p)$ étudié dans ce chapitre et qui ne demeure opérateur que vis à vis des variables internes. En représentation d'interaction par rapport à l'énergie cinétique $P^2/2M$, ρ_A devient $\tilde{\rho}_A$

$$\tilde{\rho}_A(t) = e^{iP^2(t-t_0)/2M\hbar}\,\rho_A(t)\,e^{-iP^2(t-t_0)/2M\hbar} \quad (9.19)$$

On voit apparaître l'instant de référence t_0, que l'on peut choisir arbitrairement, et pour lequel les 2 représentations, habituelle et d'interaction coïncident

$$\tilde{\rho}_A(t_0) = \rho_A(t_0) \qquad \text{et par suite} \qquad \tilde{\sigma}_A(r,p,t_0) = \sigma_A(r,p,t_0) \quad (9.20)$$

– Nous calculerons toutes les vitesses de variation, en particulier celle de $w(r,p,t)$, en $t=t_0$. Ceci est possible puisque t_0 peut être choisi arbitrairement. De (9.19) et (9.20), on déduit que

$$\dot{\tilde{\rho}}_A\big|_{t=t_0} = \dot{\rho}_A\big|_{t=t_0} - \frac{1}{i\hbar}\left[\frac{P^2}{2M}, \rho_A(t_0)\right] \quad (9.21)$$

et par suite, après un calcul analogue à celui de la page VII-6

$$\dot{\tilde{\sigma}}_A(r,p,t)\big|_{t=t_0} = \dot{\sigma}_A(r,p,t)\big|_{t=t_0} + \frac{p}{M}\frac{\partial}{\partial r}\sigma_A(r,p,t_0) \quad (9.22)$$

ce qui donne, par trace sur les variables internes

$$\dot{\tilde{w}}(r,p,t)\big|_{t=t_0} = \dot{w}(r,p,t)\big|_{t=t_0} + \frac{p}{M}\frac{\partial}{\partial r} w(r,p,t_0) \quad (9.23)$$

– Il y a un autre avantage à calculer les vitesses de variation en $t=t_0$. On voit sur (9.18) que $\mathcal{L}_2$ n'apparaît que pris à l'instant t auquel on calcule la vitesse de variation (alors que $\mathcal{L}_1$ apparaît à la fois en t et en t' avec $t'<t$ – voir la 2ème ligne de 9.18). On pourra donc négliger toutes les corrections en ε^2 qui s'annulent en $t=t_0$.

(5) Expression des liouvilliens $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ d'ordre 1 et 2 en ε

Structure générale de $\mathcal{L}_1$ Il y a a priori 3 contributions à $\mathcal{L}_1$

(i) $\mathcal{L}_1^{\text{spontané}}$, provenant du terme d'ordre 1 dans le développement de $w_{ee}(\vec{r}, \vec{p}+\hbar\omega_0\vec{\kappa}/c)$ en puissances de $\hbar\omega_0\vec{\kappa}/c$ dans (8.41.b)

(ii) $\mathcal{L}_1^{\text{vitesse}}$, provenant du terme d'ordre 1 dans le développement de l'interaction atome laser $\tilde{V}(t)$ en représentation d'interaction (voir 8.45 et ci dessous) en puissance de P/M

(iii) $\mathcal{L}_1^{laser}$, provenant des termes d'ordre 1 dans le développement de $w_{ab}(r, p \pm \hbar k/2)$ en puissances de $\hbar k$ dans (8.41), ou, ce qui revient au même de $\mathcal{E}^{\pm}(r \pm u/2)$ en puissances de u dans (8.42). Pour calculer $\mathcal{L}_1^{laser}$, on fait bien sur $P=0$ dans 8.45

Calcul de $\mathcal{L}_1^{spontané}$

Ce terme est proportionnel à $\int d^2\kappa \ \vec{\kappa} \ \phi(\vec{\kappa})$ qui est nul par raison de symétrie. L'émission spontanée se faisant avec des probabilités égales dans 2 directions opposées, $\phi(\vec{\kappa})$ est une fonction paire de $\vec{\kappa}$. Donc

$$\mathcal{L}_1^{spontané} = 0 \tag{9.24}$$

Développement de l'interaction atome-laser en représentation d'interaction

— Repartons de l'expression (8.45) de $\tilde{V}(t)$:

$$\tilde{V}(t) = -\mathcal{E}^+(R + \frac{P}{M}(t-t_0))\, D^+ - \mathcal{E}^-(R + \frac{P}{M}(t-t_0))\, D^- \tag{9.25}$$

Comme R et P sont des opérateurs qui ne commutent pas, le développement de $\mathcal{E}^{\pm}(R+\frac{P}{M}(t-t_0))$ en puissances de P/M n'est pas immédiat. En prenant le développement de Fourier (8.21) de $\mathcal{E}^{\pm}$, on peut réécrire (9.25) sous la forme

$$\tilde{V}(t) = -\int dk\ \mathcal{E}^+(k)\, e^{ik[R + \frac{P}{M}(t-t_0)]}\, D^+ \ + h.c. \tag{9.26}$$

On peut alors utiliser l'identité de Glauber [voir formule (A-5) page VII-9] pour écrire

$$e^{ik[R+\frac{P}{M}(t-t_0)]} = e^{ikR}\, e^{ik\frac{P}{M}(t-t_0)}\, e^{i\frac{\hbar k^2(t-t_0)}{2M}} = e^{ik\frac{P}{M}(t-t_0)}\, e^{ikR}\, e^{-i\frac{\hbar k^2}{2M}(t-t_0)} \tag{9.27}$$

Comme
$$e^{\pm i\frac{\hbar k^2}{2M}(t-t_0)} = 1 \pm i\frac{\hbar k^2}{2M}(t-t_0) + \cdots \tag{9.28}$$

la non commutation de R et P se traduit donc par des corrections de l'ordre de $\hbar k^2 (t-t_0)/M$.

Quel est l'ordre de grandeur de $t-t_0$? Les 2 liouvilliens $\mathcal{L}_1(t)$ et $\mathcal{L}_1(t')$ (avec $t'<t$) apparaissant dans (9.18) font intervenir $\tilde{V}(t)$ et $\tilde{V}(t')$. Comme on calcule la vitesse de variation en $t=t_0$, le terme correctif de (9.28), proportionnel à $t-t_0$, n'intervient pas dans $\mathcal{L}_1(t)|_{t=t_0}$. Dans $\mathcal{L}_1(t')$, ce terme correctif est proportionnel à $t'-t_0$ donc à $t'-t$ en $t=t_0$. Comme la présence de $e^{(t-t')\mathcal{L}_0}$ restreint les valeurs de $t-t'$ à des valeurs de l'ordre de Γ^{-1}, $t'-t_0$ est au plus de l'ordre de Γ^{-1} dans $\mathcal{L}_1(t')$, et le terme correctif de (9.28) est de l'ordre de $\hbar k^2/2M\Gamma = E_{recul}/\hbar\Gamma = \varepsilon^2$. La non commutation de R et P introduit donc dans $\tilde{V}(t)$ une correction en ε^2, qui s'annule en $t=t_0$ et qui peut donc être négligée (voir fin du § 4 précédent).

— Compte tenu du résultat précédent, on peut donc développer (9.25) sans se préoccuper de l'ordre entre R et P, ce qui donne à l'ordre 1 inclus en P/M

$$\tilde{V}(t) = -D^+\mathcal{E}^+(R) - D^-\mathcal{E}^-(R) - (t-t_0)\frac{\vec{P}}{M}\cdot\vec{\mathcal{F}}(R) \tag{9.29}$$

où nous avons posé

$$\vec{\mathcal{F}}(R) = D^+\left(\vec{\nabla}\mathcal{E}^+(R)\right) + D^-\left(\vec{\nabla}\mathcal{E}^-(R)\right) \tag{9.30}$$

Si l'on remplace dans (9.30) l'opérateur R par r, les opérateurs $D^{\pm}$ par $\mathcal{D}^{\pm}$ où $\mathcal{D}^{\pm}$ est la valeur moyenne de $D^{\pm}$ pour un atome immobile en r, calculée à partir des équations de Bloch ordinaires, on reconnait en (9.30) l'expression de la force radiative moyenne donnée par l'approche semi-classique (voir cours I de cette année et le cours 1982-83). Nous appellerons donc $\mathcal{F}(R)$ l'opérateur force radiative pour bien rappeler que R et $D^{\pm}$ sont des opérateurs

Calcul de $\mathcal{L}_1^{laser}$

$\mathcal{L}_1^{laser}$ correspond au terme d'ordre 1 en $\hbar k/\bar{p}$, et 0 en kv/Γ. On peut donc négligir le dernier terme de (9.29) pour le calcul de $\mathcal{L}_1^{laser}$. Le calcul est en fait plus simple en représentation (r,u). Dans cette représentation, la contribution du commutateur des 2 premiers termes de (9.29) avec $\tilde{\rho}_A$ s'écrit

$$\frac{1}{i\hbar}\Big[-D^+\mathcal{E}^+(r+\tfrac{u}{2})\,\tilde{\sigma}_A(r,u) - D^-\mathcal{E}^-(r+\tfrac{u}{2})\,\tilde{\sigma}_A(r,u) + \tilde{\sigma}_A(r,u)\,D^+\mathcal{E}^+(r-\tfrac{u}{2}) + \tilde{\sigma}_A(r,u)\,D^-\mathcal{E}^-(r-\tfrac{u}{2})\Big] \qquad (9.31)$$

Développons $\mathcal{E}^\pm(r\pm\frac{u}{2})$ en puissances de u, et prenons la T.F. par rapport à u. A l'ordre 0, on obtient le 1er commutateur de la 2ème ligne de l'expression (9.2) de $\mathcal{L}_0$. A l'ordre 1 en u, on voit apparaitre un anticommutateur

$$\frac{1}{i\hbar}\,\frac{1}{2}\,\vec{u}\cdot\Big\{-D^+\big(\vec{\nabla}\mathcal{E}^+(r)\big)-D^-\big(\vec{\nabla}\mathcal{E}^-(r)\big)\,,\,\tilde{\sigma}_A(r,u)\Big\}_+ \qquad (9.32)$$

entre l'operateur force radiative au point r, $\vec{\mathcal{F}}(r)$ [expression (9.30) prise pour $R=r$ et qui ne reste un opérateur que vis a vis des variables internes] et $\tilde{\sigma}_A(r,u)$. En prenant la T.F. de (9.32) par rapport à u, et en utilisant le fait que la multiplication par $\vec{u}$ se transforme en $i\hbar\,\partial/\partial\vec{p}$, on obtient finalement pour expression de $\mathcal{L}_1^{laser}$

$$\mathcal{L}_1^{laser}(r,p)\,\tilde{\sigma}_A(r,p,t) = -\frac{1}{2}\sum_{i=x,y,z}\frac{\partial}{\partial p_i}\Big\{\mathcal{F}_i(r),\tilde{\sigma}_A(r,p,t)\Big\}_+ \qquad (9.33)$$

Calcul de $\mathcal{L}_1^{vitesse}$

La contribution du commutateur du dernier terme de (9.29) avec $\tilde{\rho}_A$ s'écrit en représentation (r,u)

$$-\frac{t-t_0}{i\hbar M}\Big[\vec{\mathcal{F}}(r+\tfrac{u}{2})\cdot\langle r+\tfrac{u}{2}|\vec{P}\,\tilde{\rho}_A|r-\tfrac{u}{2}\rangle - \langle r+\tfrac{u}{2}|\tilde{\rho}_A\vec{P}|r-\tfrac{u}{2}\rangle\cdot\vec{\mathcal{F}}(r-\tfrac{u}{2})\Big] \qquad (9.34)$$

[on a utilisé le fait que l'ordre entre R et P est sans importance dans le dernier terme de (9.29) pour placer $\vec{\mathcal{F}}(R)$ près du bra $\langle r+\frac{u}{2}|$ dans le 1er terme de (9.34), près du ket $|r-\frac{u}{2}\rangle$ dans le 2ème]. Comme (9.34) est déjà d'ordre 1 en kv/Γ, on peut alors remplacer $\vec{\mathcal{F}}(r\pm\frac{u}{2})$ par $\vec{\mathcal{F}}(r)$ car les termes d'ordre 1 dans le développement de $\vec{\mathcal{F}}(r\pm\frac{u}{2})$ en puissances de u donneraient des corrections en $(kv/\Gamma)(\hbar k/\bar{p})$, c-à-d des termes du second ordre en ε, s'annulant en $t=t_0$ et donc négligeables. Il ne reste donc qu'à calculer les éléments de matrice de $\vec{P}\tilde{\rho}_A$ et $\tilde{\rho}_A\vec{P}$, plus précisément les TF de ces éléments de matrice par rapport à u. Il est plus simple de partir de la représentation $(p\,v)$ et de prendre la T.F. par rapport à v

$$\langle p+\tfrac{v}{2}|\vec{P}\,\tilde{\rho}_A|p-\tfrac{v}{2}\rangle = (\vec{p}+\tfrac{\vec{v}}{2})\,\tilde{\sigma}_A(p,v) \qquad (9.35)$$

Par T.F. par rapport à v, (9.35) donne $(\vec{p}-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\vec{r}})\,\tilde{\sigma}_A(r,p)$. On peut montrer que le terme en $\partial/\partial\vec{r}$ introduit des corrections d'ordre supérieur à ε (qui s'annulent en $t=t_0$ et sont donc negligeables), si la largeur en r de la fonction de Wigner $w(r,p,t)$ est supérieure à $\varepsilon\lambda$ (λ: longueur d'onde lumineuse), ce que nous supposerons réalisé. On obtient ainsi finalement

$$\mathcal{L}_1^{vitesse}(r,p,t)\,\tilde{\sigma}_A(r,p,t) = -\frac{t-t_0}{i\hbar M}\Big[\vec{p}\cdot\vec{\mathcal{F}}(r),\tilde{\sigma}_A(r,p,t)\Big] \qquad (9.36)$$

Structure générale et expression de $\mathcal{L}_2$

Tous les termes d'ordre 2 en kv/Γ (termes suivants du développement 9.20), et tous les termes "croisés" en $(kv/\Gamma)\times(\hbar k/\bar{p})$, faisant intervenir le dernier terme de (9.29) [ou des termes négligés dans l'établissement de 9.29 et 9.36] sont des termes en ε^2, s'annulant en $t=t_0$, et donc négligeables. Il n'y a donc que 2 termes dans $\mathcal{L}_2$ qui peuvent donner des contributions non négligeables

(i) $\mathcal{L}_2^{\text{spontané}}$, provenant des d'ordre 2 dans le developpement de $W_{ee}(\vec{r}, \vec{p} + \hbar\omega_0\vec{\kappa}/c)$ en puissances de $\hbar\omega_0\vec{\kappa}/c$ dans (8.41.b). On obtient

$$\mathcal{L}_2^{\text{spontané}}(r,p)\ \tilde{\sigma}_A(r,p,t) = \frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j\\=x,y,z}} \Gamma\ \frac{\hbar^2\omega_0^2}{c^2}\left(\int d^2\kappa\ \kappa_i\kappa_j\ \phi(\vec{\kappa})\right)\frac{\partial^2}{\partial p_i \partial p_j}\ \tilde{\sigma}_{ee}(r,p,t) \tag{9.37}$$

(ii) $\mathcal{L}_2^{\text{laser}}$, provenant des termes d'ordre 2 dans le developpement de $\mathcal{E}^{\pm}(r \pm \frac{u}{2})$ en puissances de u dans (9.31). Au lieu d'obtenir un anticommutateur comme c'était le cas à l'ordre 1 (voir 9.32), on obtient maintenant un commutateur

$$\mathcal{L}_2^{\text{laser}}(r,p)\ \tilde{\sigma}_A(r,p,t) = \frac{\hbar}{8i}\sum_{\substack{i,j\\=x,y,z}} \frac{\partial^2}{\partial p_i \partial p_j}\left[D^+\left(\frac{\partial^2\mathcal{E}^+}{\partial r_i \partial r_j}\right) + D^-\left(\frac{\partial^2\mathcal{E}^-}{\partial r_i \partial r_j}\right), \tilde{\sigma}_A(r,p,t)\right] \tag{9.38}$$

⑥ Vitesse de variation de la fonction de Wigner à l'ordre 1 en $\mathcal{E}$. Force radiative moyenne

- A l'ordre 1 en $\mathcal{E}$, seul le 1er terme de (9.18) intervient. Comme on calcule la vitesse de variation en $t = t_0$ (voir § 4) et que, d'après (9.36), $\mathcal{L}_1^{\text{vitesse}}$ s'annule en $t = t_0$, seul $\mathcal{L}_1^{\text{laser}}$ intervient [rappelons que $\mathcal{L}_1^{\text{spontané}}$ est nul]
- Reportons donc (9.33) dans le 1er terme de (9.18). Il vient

$$\mathrm{Tr}\left(\mathcal{L}_1(r,p,t)\,\tilde{w}(r,p,t)\,\sigma_{st}(r)\right)\Big|_{t=t_0} = -\frac{1}{2}\sum_{i=x,y,z}\frac{\partial}{\partial p_i}\mathrm{Tr}\left\{\mathcal{F}_i(r), \tilde{w}(r,p,t_0)\,\sigma_{st}(r)\right\} \tag{9.39}$$

c-à-d, par suite de l'invariance d'une trace dans une permutation circulaire,

$$-\sum_i \phi_i(r)\frac{\partial}{\partial p_i}\ \tilde{w}(r,p,t) \tag{9.40}$$

où

$$\phi_i(r) = \mathrm{Tr}\left(\sigma_{st}(r)\,\mathcal{F}_i(r)\right) = \mathcal{D}^+(\nabla_i\mathcal{E}^+) + \mathcal{D}^-(\nabla_i\mathcal{E}^-) \tag{9.41}$$

avec

$$\mathcal{D}^{\pm} = \mathrm{Tr}\left(\sigma_{st}(r)\,D^{\pm}\right) \tag{9.42}$$

$\phi_i(r)$ n'est autre que la <u>force radiative moyenne stationnaire</u>, calculée à partir de la solution stationnaire $\sigma_{st}(r)$ des E.B.O. ordinaires pour un atome immobile en r. En regroupant (9.40) avec (9.23), et en écrivant t au lieu de t_0 (ce qui est possible puisque t_0 peut être choisi arbitrairement), on obtient à l'ordre 1 inclus en $\mathcal{E}$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=x,y,z}\left(\frac{p_i}{M}\frac{\partial}{\partial r_i} + \phi_i(\vec{r})\frac{\partial}{\partial p_i}\right)\right] w(\vec{r},\vec{p},t) = 0 \tag{9.43}$$

qui rappelle tout à fait l'équation d'évolution d'une distribution classique de particules soumises à la force $\vec{\Phi}(\vec{r})$. La théorie semi-classique des forces radiatives, présentée dans le cours 1982-83, est ainsi justifiée rigoureusement à partir d'une théorie entièrement quantique.

⑦ Vitesse de variation de la fonction de Wigner à l'ordre 2 en $\mathcal{E}$: Tenseurs de diffusion et de friction.

a) Contribution de $\mathcal{L}_2$: Tenseur de diffusion D_{ij}^{vide}

- Il s'agit du dernier terme de la 1ère ligne de (9.18), $\mathrm{Tr}(\mathcal{L}_2\ \tilde{w}\ \sigma_{st})$.
- Comme $\mathcal{L}_2^{\text{laser}}$ est un commutateur [voir 9.38], et que la trace d'un commutateur est nulle, la contribution de $\mathcal{L}_2^{\text{laser}}$ est nulle.
- De l'expression (9.37) de $\mathcal{L}_2^{\text{spontané}}$ on déduit

$$Tr\left(\mathcal{L}_2^{spontané}(r,p)\ \tilde{w}(r,p,t)\ \sigma_{st}(r)\right)_{t=t_0} = \sum_{i,j=x,y,z} D_{ij}^{vide} \frac{\partial^2}{\partial p_i \partial p_j} \tilde{w}(r,p,t_0) \qquad (9.44)$$

où

$$\boxed{D_{ij}^{vide} = \frac{1}{2}\Gamma\langle e|\sigma_{st}(r)|e\rangle \frac{\hbar^2\omega_0^2}{c^2}\int d^2\kappa\ \kappa_i\kappa_j\ \phi(\vec{\kappa})} \qquad (9.45)$$

L'interprétation de D_{ij}^{vide} est très simple : $\Gamma\langle e|\sigma_{st}(r)|e\rangle$ est le nombre de photons spontanés émis par unité de temps en régime stationnaire par un atome immobile en r. $\frac{\hbar^2\omega_0^2}{c^2}\int d^2\kappa\ \kappa_i\kappa_j\ \phi(\vec{\kappa})$ est la valeur moyenne du produit des composantes i et j de l'impulsion d'un tel photon spontané, valeur moyenne déterminée par le diagramme de rayonnement $\phi(\vec{\kappa})$. On retrouve le résultat du cours IV (voir 4.24).

b) Structure de la contribution de $\mathcal{L}_1$ à l'ordre 2 en ε

- Il s'agit de la 2ème ligne de (9.18).
- Comme on calcule $\tilde{w}$ en $t=t_0$, il faut faire $t=t_0$. Comme $\mathcal{L}_1^{vitesse}(t)$ s'annule en $t=t_0$ (voir 9.36), $\mathcal{L}_1^{vitesse}$ ne peut apparaître que dans $\mathcal{L}_1(t')$. D'autre part, comme $\mathcal{L}_1^{vitesse}$ est un commutateur, il ne contribue pas à $Tr(\mathcal{L}_1(t')\ \tilde{w}(t)\ \sigma_{st})$, c-à-d au dernier terme de (9.18).
- La 2ème ligne de (9.18) se réduit donc à 2 contributions, qu'on peut écrire, en posant $\tau = t-t'$ ($= t_0 - t'$ pour $t=t_0$)

$$\int_0^\infty d\tau \left[\left(Tr\,\mathcal{L}_1^{laser} e^{\mathcal{L}_0\tau}\mathcal{L}_1^{laser}\,\tilde{w}\ \sigma_{st}\right) - \left(Tr\,\mathcal{L}_1^{laser} e^{\mathcal{L}_0\tau}\sigma_{st}\right)\left(Tr\,\mathcal{L}_1^{laser}\,\tilde{w}\ \sigma_{st}\right)\right]$$
$$+ \int_0^\infty d\tau\ Tr\left(\mathcal{L}_1^{laser} e^{\mathcal{L}_0\tau}\mathcal{L}_1^{vitesse}(\tau)\ \tilde{w}\ \sigma_{st}\right) \qquad (9.46)$$

La 1ère ligne fait intervenir 2 fois $\mathcal{L}_1^{laser}$ (qui ne dépend pas du temps) alors que la 2ème fait intervenir 1 fois $\mathcal{L}_1^{laser}$ et 1 fois $\mathcal{L}_1^{vitesse}$ (qui dépend de τ)

c) Brefs rappels sur l'espace de Liouville (voir référence 2)

- Notations de Dirac pour les vecteurs de $\mathcal{E}_L$ (opérateurs de $\mathcal{E}_H$)
$|\sigma\rangle\rangle \qquad \langle\langle\sigma|$
- Produit scalaire dans $\mathcal{E}_L$ (qui donne à $\mathcal{E}_L$ la structure d'un espace de Hilbert)
$$\langle\langle A|B\rangle\rangle = Tr\,A^+B \qquad (9.47)$$
- Adjoint $\mathcal{L}^+$ d'un opérateur $\mathcal{L}$ de $\mathcal{E}_L$
$$\langle\langle A|\mathcal{L}|B\rangle\rangle = \langle\langle B|\mathcal{L}^+|A\rangle\rangle^* \qquad (9.48)$$
- Valeur moyenne d'une observable $A=A^+$ dans le point de vue de Schrödinger
Si σ évolue conformément à $\frac{d\sigma}{dt} = \mathcal{L}\sigma$, on a
$$|\sigma(t)\rangle\rangle = e^{\mathcal{L}t}|\sigma\rangle\rangle \qquad (9.49)$$
$$\langle A\rangle(t) = Tr(A\,\sigma(t)) = \langle\langle A|\sigma(t)\rangle\rangle = \langle\langle A|e^{\mathcal{L}t}|\sigma\rangle\rangle \qquad (9.50)$$

Attention : $\mathcal{L}$ ne correspond pas forcément à une évolution "hamiltonienne". Par exemple, $\mathcal{L}_0$ étudié au § 2, contient des termes de relaxation.

- Evolution des observable dans le point de vue de Heisenberg
$$\langle A\rangle(t) = \underbrace{Tr(A\,\sigma(t))}_{Schrödinger} = \underbrace{Tr(A^H(t)\,\sigma)}_{Heisenberg}, \text{ réel si } A=A^+ \qquad (9.51)$$
$$\hookrightarrow \langle A\rangle(t) = \langle\langle A|e^{\mathcal{L}t}|\sigma\rangle\rangle = \langle\langle\sigma|e^{\mathcal{L}^+t}|A\rangle\rangle = \langle\langle\sigma|A^H(t)\rangle\rangle \qquad (9.52)$$
avec
$$|A^H(t)\rangle\rangle = e^{\mathcal{L}^+t}|A\rangle\rangle \qquad (9.53)$$

Attention : si $\mathcal{L}$ ne correspond pas à une évolution hamiltonienne, les $A^H(t)$, avec $t\neq 0$, ne satisfont pas aux relations de commutation fondamentales des A.

– Fonctions de corrélation

$$\langle A^H(0)B^H(t)\rangle = \mathrm{Tr}(\sigma A^H(0)B^H(t)) = \langle\!\langle A\sigma | e^{\mathcal{L}^+ t} | B \rangle\!\rangle = \langle\!\langle B | e^{\mathcal{L}t} | A\sigma\rangle\!\rangle^* \quad (9.54)$$

Remarque : Quand $\mathcal{L}$ contient des termes de relaxation, l'expression (9.54) n'est en toute rigueur pas correcte. Il faut, en principe, travailler dans l'espace des états du système global, atome + réservoir responsable de la relaxation, espace où l'évolution redevient hamiltonienne. Les observables $A^H(0)$ et $B^H(t)$ de (9.54) doivent être alors considérées comme des observables de Heisenberg dans l'espace des états du système global, et la moyenne, sur l'état du réservoir, du produit de ces 2 observables doit être ensuite évaluée. Le "théorème de régression quantique" permet cependant de montrer qu'on commet une erreur négligeable (de l'ordre de τ_c/T_R en valeur relative), en travaillant dans l'espace des états du seul atome avec un Liouvillien $\mathcal{L}$ qui ne correspond plus à une évolution hamiltonienne. Il faut alors prendre $t>0$ dans (9.54), développer B sur les états propres $|V_i\rangle\!\rangle$ de $\mathcal{L}^+$, de valeurs propres λ_i, ce qui permet d'exprimer $|B^H(t)\rangle\!\rangle = e^{\mathcal{L}^+t}|B\rangle\!\rangle$ comme une somme de $|V_i\rangle\!\rangle e^{\lambda_i t}$. Il ne reste plus enfin qu'à calculer la valeur moyenne dans l'état atomique σ de produits d'opérateurs A et V_i pris tous deux en $t=0$. Une transformation de Laplace permet souvent de simplifier considérablement un tel calcul.

d) Tenseur de diffusion D_{ij}^{laser}

Calcul de $\mathrm{Tr}(\mathcal{L}_1^{laser} e^{\mathcal{L}_0\tau} \mathcal{L}_1^{laser} \tilde{w}\, \sigma_{st})$ (1er terme de 9.46)

– D'après (9.33), et comme, seul, $\tilde{w}$ dépend de p dans $\tilde{w}\,\sigma_{st}$, on a

$$\mathcal{L}_1^{laser}\tilde{w}\,\sigma_{st} = -\frac{1}{2}\sum_i \frac{\partial \tilde{w}}{\partial p_i}\{\mathcal{F}_i, \sigma_{st}\}_+ \quad (9.55)$$

– On en déduit, en utilisant l'invariance d'une trace par permutation

$$\mathrm{Tr}(\mathcal{L}_1^{laser} e^{\mathcal{L}_0\tau}\mathcal{L}_1^{laser}\tilde{w}\,\sigma_{st}) = \frac{1}{2}\sum_{i,j}\frac{\partial^2\tilde{w}}{\partial p_i \partial p_j}\mathrm{Tr}\left[\mathcal{F}_j(e^{\mathcal{L}_0\tau}\mathcal{F}_i\sigma_{st}) + \mathcal{F}_j(e^{\mathcal{L}_0\tau}\sigma_{st}\mathcal{F}_i)\right] \quad (9.56)$$

r est sous entendu dans $\mathcal{L}_0$, σ_{st} et les composantes i et j de la force $\vec{\mathcal{F}}$

– $$\mathrm{Tr}\left(\mathcal{F}_j(e^{\mathcal{L}_0\tau}\mathcal{F}_i\sigma_{st})\right) = \langle\!\langle \mathcal{F}_j | e^{\mathcal{L}_0\tau} | \mathcal{F}_i\sigma_{st}\rangle\!\rangle = \langle\!\langle \mathcal{F}_i\sigma_{st} | e^{\mathcal{L}_0^+\tau} | \mathcal{F}_j\rangle\!\rangle^* =$$

$$= \mathrm{Tr}\left(\sigma_{st}\mathcal{F}_i^H(0)\,\mathcal{F}_j^H(\tau)\right)^* = \langle \mathcal{F}_i^H(0)\,\mathcal{F}_j^H(\tau)\rangle_{st}^* \quad (9.57)$$

où l'indice st signifie que la fonction de corrélation est évaluée dans l'état σ_{st}

– De même

$$\mathrm{Tr}\left(\mathcal{F}_j(e^{\mathcal{L}_0\tau}\sigma_{st}\mathcal{F}_i)\right) = \langle\!\langle \mathcal{F}_j | e^{\mathcal{L}_0\tau} | \sigma_{st}\mathcal{F}_i\rangle\!\rangle = \langle\!\langle \sigma_{st}\mathcal{F}_i | e^{\mathcal{L}_0^+\tau} | \mathcal{F}_j\rangle\!\rangle^* =$$

$$\mathrm{Tr}\left(\mathcal{F}_i^H(0)\sigma_{st}\mathcal{F}_j^H(\tau)\right)^* = \mathrm{Tr}\left(\sigma_{st}\,\mathcal{F}_j^H(\tau)\,\mathcal{F}_i^H(0)\right)^* = \langle \mathcal{F}_j^H(\tau)\,\mathcal{F}_i^H(0)\rangle_{st}^* \quad (9.58)$$

– Finalement, en regroupant tout

$$\mathrm{Tr}(\mathcal{L}_1^{laser} e^{\mathcal{L}_0\tau}\mathcal{L}_1^{laser}\tilde{w}\,\sigma_{st}) = \sum_{i,j}\frac{1}{2}\langle \mathcal{F}_i^H(0)\,\mathcal{F}_j^H(\tau) + \mathcal{F}_j^H(\tau)\,\mathcal{F}_i^H(0)\rangle_{st}\frac{\partial^2\tilde{w}}{\partial p_i\partial p_j} \quad (9.59)$$

Comme la fonction de corrélation est symétrique, et donc réelle, on a enlevé le signe *

Calcul de $(\mathrm{Tr}\,\mathcal{L}_1^{laser} e^{\mathcal{L}_0\tau}\sigma_{st})(\mathrm{Tr}\,\mathcal{L}_1^{laser}\tilde{w}\,\sigma_{st})$ (2ème terme de 9.46)

– $$(\mathrm{Tr}\,\mathcal{L}_1^{laser}\tilde{w}\,\sigma_{st}) = -\frac{1}{2}\sum_i\frac{\partial\tilde{w}}{\partial p_i}\mathrm{Tr}\{\mathcal{F}_i,\sigma_{st}\}_+ = -\sum_i\frac{\partial\tilde{w}}{\partial p_i}\langle\mathcal{F}_i\rangle_{st} \quad (9.60)$$

– $$(\mathrm{Tr}\,\mathcal{L}_1^{laser}e^{\mathcal{L}_0\tau}\sigma_{st})(\mathrm{Tr}\,\mathcal{L}_1^{laser}\tilde{w}\,\sigma_{st}) = \frac{1}{2}\sum_{ij}\frac{\partial^2\tilde{w}}{\partial p_i\partial p_j}\langle\mathcal{F}_i\rangle_{st}\,\mathrm{Tr}\{\mathcal{F}_j, e^{\mathcal{L}_0\tau}\sigma_{st}\}_+ \quad (9.61)$$

Or, $$\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\{\mathcal{F}_j, e^{\mathcal{L}_0\tau}\sigma_{st}\}_+ = \langle\!\langle\mathcal{F}_j|e^{\mathcal{L}_0\tau}|\sigma_{st}\rangle\!\rangle = \langle\!\langle\mathcal{F}_j|\sigma_{st}\rangle\!\rangle = \langle\mathcal{F}_j\rangle_{st} \quad (9.62)$$

On a utilisé le fait que $\mathcal{L}_0|\sigma_{st}\rangle\!\rangle = 0$ (voir 9.7) pour remplacer $e^{\mathcal{L}_0\tau}$ par 1

– Finalement, le produit des 2 traces vaut

$$\left(\mathrm{Tr}\,\mathcal{L}_1^{laser}\, e^{\mathcal{L}_0\tau}\, \sigma_{st}\right)\left(\mathrm{Tr}\,\mathcal{L}_1^{laser}\, \tilde{w}\, \sigma_{st}\right) = \sum_{ij} \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial p_i \partial p_j} \langle \mathcal{F}_i \rangle_{st} \langle \mathcal{F}_j \rangle_{st} \qquad (9.63)$$

– En regroupant (9,59) et (9.63), on obtient pour la 1ère ligne de (9.46) :

$$\sum_{ij} D_{ij}^{laser} \frac{\partial^2}{\partial p_i \partial p_j} \tilde{w} \qquad (9.64)$$

où

$$\boxed{D_{ij}^{laser} = \int_0^\infty d\tau \left[\frac{1}{2} \langle \mathcal{F}_i^H(0) \mathcal{F}_j^H(\tau) + \mathcal{F}_j^H(\tau) \mathcal{F}_i^H(0) \rangle_{st} - \langle \mathcal{F}_i \rangle_{st} \langle \mathcal{F}_j \rangle_{st} \right]} \qquad (9.65)$$

est l'intégrale de 0 à ∞ de la fonction de corrélation symétrique des parties fluctuantes de $\mathcal{F}_i$ et $\mathcal{F}_j$

Comparaison avec l'équation de Langevin classique [cours V § 4C]

A partir de $\overline{F(0)\,F(\tau)} = 2D\,\delta(\tau)$ et du caractère pair de $D(\tau)$, on peut écrire

$$D = \int_0^\infty d\tau\ \overline{F(0)\,F(\tau)} \qquad (9.66)$$

L'équation (9.65) est la généralisation quantique de (9.66) [voir aussi (3)]

e) Tenseur de friction γ_{ij}

Le calcul de la 2ème ligne de (9.46) se fait de manière tout à fait identique à celui du 1er terme de la 1ère ligne. La seule différence est qu'on a $\mathcal{L}_1^{laser}$ et $\mathcal{L}_1^{vitesse}$ au lieu de 2 fois $\mathcal{L}_1^{laser}$. Compte tenu de (9.33), on aura une seule dérivée partielle par rapport à p portant sur une fonction linéaire de p. Nous ne donnerons pas les détails de calculs, mais seulement le résultat

$$\sum_{ij} \frac{\partial}{\partial p_i}\left[\gamma_{ij}\, p_j\, \tilde{w}\right] \qquad (9.67)$$

où

$$\boxed{\gamma_{ij} = -\frac{i}{\hbar M} \int_0^\infty d\tau \langle [\mathcal{F}_i^H(0), \mathcal{F}_j^H(\tau)] \rangle_{st}\ \tau} \qquad (9.68)$$

Interprétation : terme de friction lié à la force linéaire en v
le point important est que le tenseur de friction a une expression explicite en termes de fonctions de corrélation de $\mathcal{F}$.

(8) Récapitulation : Equation de Fokker-Planck pour w

En ajoutant à (9.43) les termes obtenus à l'ordre 2 en ε, à savoir (9.44), (9.64) et et (9.67), on obtient finalement (comme $w = \tilde{w}$ pour $t = t_0$)

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \sum_i \left(\frac{p_i}{M}\frac{\partial}{\partial r_i} + \phi_i(\vec{r})\frac{\partial}{\partial p_i}\right)\right] w(\vec{r},\vec{p},t) = \sum_{ij} \gamma_{ij}(\vec{r}) \frac{\partial}{\partial p_i}\left[p_j\, w(\vec{r},\vec{p},t)\right] + \sum_{ij} D_{ij}(\vec{r}) \frac{\partial^2}{\partial p_i \partial p_j} w(\vec{r},\vec{p},t) \qquad (9.69)$$

avec

$$D_{ij} = D_{ij}^{vide} + D_{ij}^{laser} \qquad (9.70)$$

D_{ij}^{vide}, D_{ij}^{laser} et γ_{ij} étant donnés en (9.45), (9.65) et (9.68)

On peut enfin faire passer le terme de friction au 1er membre et le regrouper avec le terme en ϕ_i pour faire apparaître la force totale de composante

$$\phi_i(\vec{r}) - \sum_j \gamma_{ij}(\vec{r})\, p_j \qquad (9.71)$$

Références

(1) J. DALIBARD, à paraître.
(2) C. COHEN-TANNOUDJI, Cours au Collège de France 1975-76 – cours VIII
(3) J.P GORDON, A. ASHKIN Phys. Rev A 21, 1606 (1980)