

Introduction - Motivations (Transparent 1)

- ① Piège de capture et piège de mesure (2 à 3)
- ② Capture et refroidissement des positrons (4 à 7)
- ③ Détection des positrons et mesure des fréquences de résonance (8 à 10)

Références

- (1) P. SCHWINBERG, R. VAN DYCK, H. DEHMELT
Precision measurement and Fundamental constants II
B. Taylor and W. Phillips eds, NBS Special publication 617
(1984) p. 215
- (2) Mêmes auteurs, Phys. lett. 81 A, 119 (1981)
- (3) Mêmes auteurs, Phys. Rev. lett. 47, 1679 (1981)

Etude des corrections relativistes

Introduction - Motivations (11)

- ① Discussion qualitative : Conséquences de la variation relativiste de masse (12 à 15)
- ② Niveaux d'énergie d'un électron dans un champ magnétique uniforme
 - a) Équation de Dirac sans terme d'anomalie.
- Valeurs propres exactes (16 à 17)
 - b) Équation de Dirac avec terme d'anomalie.
- Valeurs propres exactes (18)
- Diagramme énergétique et spectre de raies cyclotron pour une énergie longitudinale nulle (19 à 21)
- Cas d'une énergie longitudinale non nulle (22)
- ③ Niveaux d'énergie d'un électron dans un piège de Penning
 - a) Équation de Dirac avec terme d'anomalie (23)
 - b) Transformation de Foldy - Wouthuysen et nouvel hamiltonien pair (24 à 25)
 - c) Interprétation physique des diverses corrections relativistes (26 à 27)
 - d) Effet des corrections relativistes sur les fréquences de Bohr (28 à 30)

Références : voir page VII-9

Détermination de l'anomalie g-2 du positron

Intérêt

La comparaison de $g-2$ pour e^+ et e^- est un test sévère de la symétrie matière - antimatière (CPT)

Principale difficulté

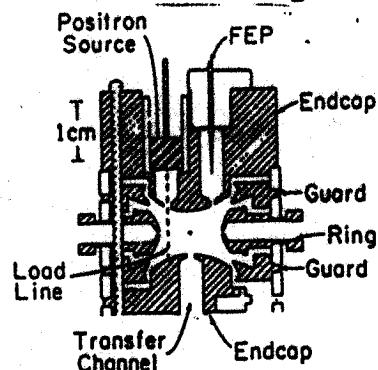
Faire entrer dans un piège de Penning un positron émis par une source radioactive et le maintenir dans ce piège

Méthode suivie

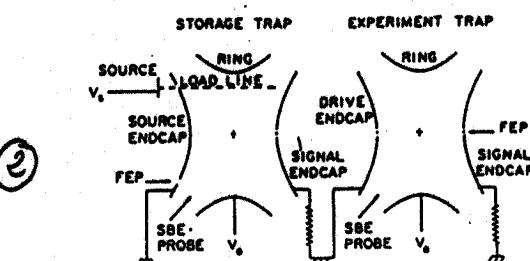
Utilisation de 2 pièges en série

- Le premier sert essentiellement à capturer le positron et à le refroidir
- Le positron est ensuite transféré dans un second piège, dont les défauts sont compensés avec soin et qui sert à faire des mesures précises

1 Pièges de capture et de mesure (Figures extraites de (1))



1 Piège de capture



2 Ensemble des 2 pièges

Figure 1

- La source de positrons est une source de Sodium 22 radioactif
- L'axe d'injection ("load line") est parallèle à Oz et décalé par rapport au centre du piège
- Il est possible également d'injecter des électrons par une pointe à effet de champ ("FEP")
- Quand on étudie des e^+ , le potentiel V_0 de l'anneau est négatif

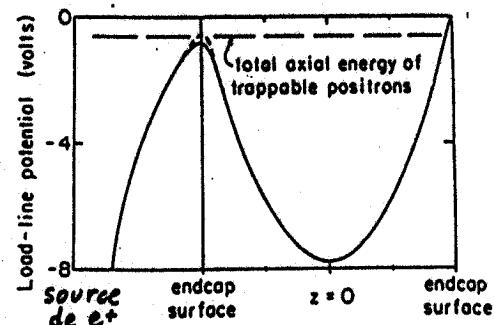
Figure

- Il y a trop de trous dans le piège de capture pour qu'on puisse compenser efficacement ses défauts

- Une fois que les positrons sont capturés et refroidis (par excitation à bande latérale "side band excitation"), ils sont transférés dans un piège de mesure hautement compensé par une impulsion entre les 2 coupelles adjacentes

3 Potentiel le long de l'axe d'injection (4) (Figure extraite de (1))

- La source de Na^{22} est à un potentiel -300 volts par rapport aux coupelles



Le potentiel, partant de -300 v, passe par un maximum légèrement négatif au niveau du trou d'entrée, puis par un minimum au niveau de l'anneau, et recroît ensuite pour s'annuler sur la coupelle inférieure

Trajectoire des positrons

(5)

- Les positrons émis ont une énergie (~ 100 keV) essentiellement cyclotron dans le champ B_0 de 51 kG
- Leur mouvement le long de Oz est guidé par B_0 et a une énergie beaucoup plus faible. Les positrons dont l'énergie est suffisante pour franchir le "col" de potentiel au niveau du trou d'entrée pénètrent dans le piège. Certains d'entre eux, dont l'énergie n'est pas trop élevée, rebroussent chemin sans heurter la coupelle inférieure
- Pendant cet aller et retour entre le trou d'entrée et la coupelle inférieure, la rotation magnétrons a dévié latéralement le centre de la trajectoire et, au retour, le positron est plus proche des bords du trou d'entrée, et voit donc un maximum de potentiel légèrement plus grand (ligne en pointillés de la figure)

Capture des positrons

(6)

- Les positrons capturés sont ceux dont l'énergie le long de Oz est suffisante pour franchir le col à l'entrée, mais insuffisante pour franchir la barrière un peu plus élevée qu'ils trouvent au retour
- Après une période magnétrons, les positrons reviennent exactement sur l'axe d'injection, au centre du trou d'entrée, mais ils ont fait alors plusieurs allers et retours, et le mouvement de vibration correspondant a été amorti par dissipation du courant induit dans la résistance extérieure
- Si cette dissipation est suffisante, ils n'ont plus assez d'énergie pour franchir le col et sortir

Rafraîchissement des positrons

(7)

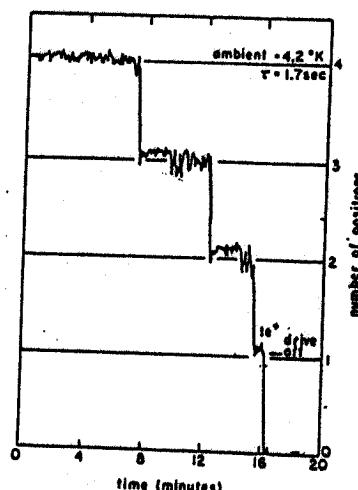
- L'énergie du mouvement cyclotron est amortie par émission spontanée (rayonnement synchrotron)
- Le mouvement de vibration axiale est amorti par dissipation du courant induit dans le circuit externe
- Le mouvement magnétrons (essentiel pour la phase initiale de la capture) est amorti par refroidissement radiatif par excitation RF à $\omega_z + \omega_m$; ce qui amène les positrons au centre du piège.

Environ 25 positrons sont ainsi capturés par heure avec une source de 0,5 mCi

Détection des positrons

(8)

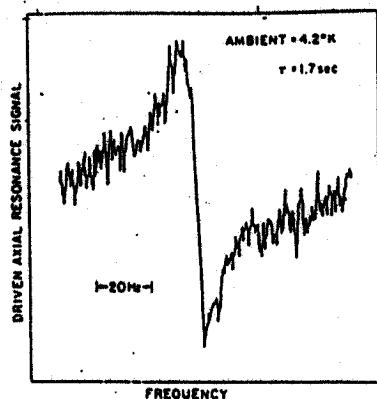
(Figure extraite de (1))



Méthode habituelle utilisant la vibration axiale et des impulsions RF pour les éjecter un à un et n'en garder qu'un seul

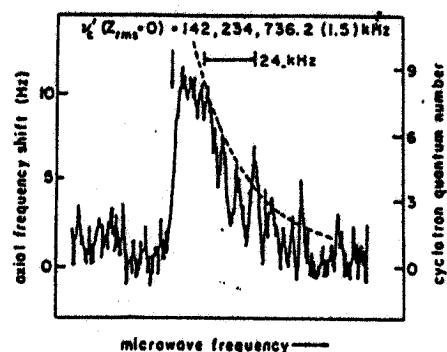
Exemple de résonance axiale

(Figure extraite de (1))

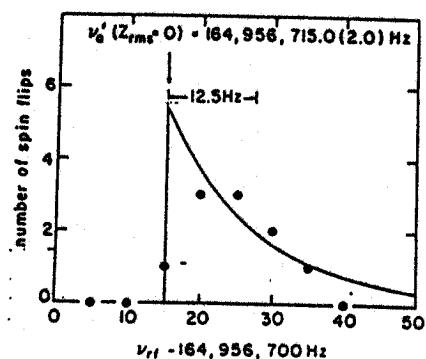


Réglage de la détection synchrone pour obtenir une courbe en forme de dispersion

Exemple de résonance cyclotron



Exemple de résonance d'anomalie



(Figures extraites de (1))

Corrections relativistes

Problème

Comment les niveaux d'énergie et les fréquences de Bohr d'un électron dans un piège de Penning sont-ils modifiés par les corrections relativistes?

Intérêt

① Évaluer à partir de quelle précision il faut tenir compte de ces corrections dans la détermination expérimentale de $g - 2$

② Possibilité d'utiliser ces effets pour détecter les résonances cyclotron et de spin sans bouteille magnétique et, par suite, sans les inhomogénéités de champ magnétique associées à cette bouteille.

Discussion qualitative

Effet sur le mouvement cyclotron

- Pour un mouvement d'énergie cinétique $E = \frac{1}{2} m_e v^2$ (avec $E \ll mc^2$), l'accroissement relativiste de masse δm_e vaut

$$\delta m_e = \frac{E}{c^2}$$

- Comme la fréquence cyclotron à la limite $E \rightarrow 0$, $\omega_{co} = -qB_0/m_e$, est proportionnelle à $1/m$, on a

$$\frac{\delta\omega_c}{\omega_{co}} = -\frac{\delta m_e}{m_e} = -\frac{E}{mc^2}$$

$$\omega_{co} \rightarrow \omega_{co} \left(1 - \frac{E}{mc^2}\right)$$

La fréquence cyclotron diminue quand l'énergie augmente.

Les niveaux cyclotron se rapprochent quand on monte en énergie.

L'oscillateur "d" qui décrit ces niveaux est anharmonique

Ordres de grandeur

$$\frac{\delta\omega_c}{\omega_{co}} = -\frac{E}{mc^2} = -\frac{E \text{ volt}}{5 \cdot 10^5}$$

$$= 2 \cdot 10^{-6} \text{ pour } E = 1 \text{ volt}$$

$$E \approx (n + \frac{1}{2}) \hbar \omega_{co} \approx n \hbar \omega_{co} \text{ (si } n \gg 1)$$

n : nombre quantique cyclotron

$$\hbar \omega_{co} = 0,68 \cdot 10^{-3} \text{ volt}$$

$$\text{pour } B = 60 \text{ kG} \quad (\frac{\omega_{co}}{2\pi} = 164 \text{ GHz})$$

$$\frac{\hbar \omega_{co}}{mc^2} = 1,3 \cdot 10^{-9}$$

$$\text{Si } n = 100, \quad \frac{\delta\omega_c}{\omega_{co}} = 1,3 \cdot 10^{-7}$$

$$\frac{\delta\omega_c}{2\pi} = 21 \text{ kHz}$$

Effet tout à fait détectable

Autres problèmes à résoudre (15)

Quelles sont les corrections relativistes sur les transitions de spin, sur les transitions d'anomalie?

Traitements quantitatifs

- Basé sur l'équation de Dirac, généralisée pour inclure un terme décrivant le moment magnétique anormal.

- Possibilité de trouver les valeurs propres exactes de cette équation dans quelques cas simples (champ magnétique uniforme seul).

- Dans les autres cas, étude de la limite non relativiste de cette équation et obtention d'un hamiltonien de Pauli (Transformation de Foldy-Wouthuysen).

(13)

Effet sur le mouvement de vibration

$$\text{Comme } \omega_3^2 = 4191 U_0 / m_e (r_0^2 + z_0^2) \quad (14)$$

$$\frac{\delta\omega_3}{\omega_3} = -\frac{1}{2} \frac{\delta m_e}{m_e} = -\frac{E}{2mc^2}$$

Si le mouvement cyclotron est excité vers $n = 100$

$$E = 100 \hbar \omega_{co} = 68 \cdot 10^{-3} \text{ volt}$$

$$\text{et } \frac{\delta\omega_3}{\omega_3} = -\frac{68 \cdot 10^{-3}}{10^6} = -6,8 \cdot 10^{-8}$$

$$\text{Si } \frac{\omega_3}{2\pi} = 60 \text{ MHz} \quad \delta\omega_3 / 2\pi = -4 \text{ Hz}$$

L'excitation du mouvement cyclotron peut être détectée par une variation de la fréquence de vibration axiale, comme dans la méthode utilisant une bouteille magnétique.

La sensibilité est cependant 25 fois plus faible que pour la bouteille magnétique ($\delta_0 = 1 \text{ Hz}$ pour $\Delta n = 1$)

Niveaux d'énergie dans un champ magnétique uniforme B_0 (16)Équation de Dirac (sans terme d'anomalie, $g = 2$)

$$i \hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = H_D \psi$$

$$H_D = c \vec{\alpha} \cdot \vec{\Pi} + \beta mc^2$$

$$\vec{\Pi} = \vec{p} - q\vec{A} \quad \vec{B}_0 = \vec{v} \times \vec{A}$$

$\vec{\alpha}, \beta$ Matrices de Dirac

Problème soluble

Expression des valeurs propres

$$E = [m_e^2 c^4 + 2m_e c^2 j \hbar \omega_{co} + c^2 \pi_3^2]^{1/2}$$

π_3 : valeur propre de π_3

$$j = n + m + \frac{1}{2}$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

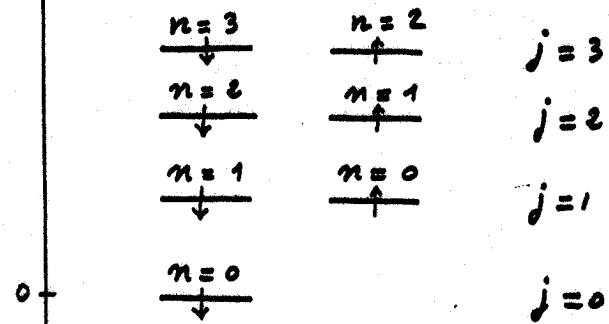
Landau

$$m = -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}$$

Spin

Diagramme énergétique (dans le sous espace $\pi_3 = 0$)

(17)



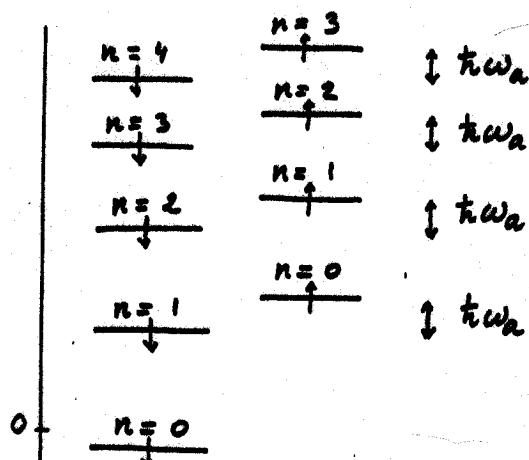
L'énergie ne dépend que de $j = m + n + \frac{1}{2}$
Dégénérescence 2 pour chaque valeur de j
Les niveaux vont en se rapprochant
Limite $v \ll c$

$$\begin{aligned} E &= m_e c^2 \left[1 + 2j \frac{\hbar \omega_{co}}{m_e c^2} \right]^{1/2} \\ &= m_e c^2 + j \hbar \omega_{co} - \frac{1}{2} \frac{j^2 \hbar^2 \omega_{co}^2}{m_e c^2} + \dots \\ &= m_e c^2 + (m+n+\frac{1}{2}) \hbar \omega_{co} \left[1 - \frac{(m+n+\frac{1}{2}) \hbar \omega_{co}}{2 m_e c^2} + \dots \right] \end{aligned}$$

Diagramme énergétique (dans le sous espace $\pi_3 = 0$)

(19)

$$E = m_e c^2 \left[1 + 2j \frac{\hbar \omega_{co}}{m_e c^2} \right]^{1/2} + m \hbar \omega_a$$



Dans chaque colonne $m=\downarrow$ ou $m=\uparrow$, les niveaux vont en se rapprochant, mais l'écart entre les 2 niveaux $n \downarrow$ et $n+1 \uparrow$ de même j reste constant et égal à $\hbar \omega_a$

Équation de Dirac avec terme supplémentaire pour décrire le moment magnétique anomal

Nouvel hamiltonien

$$\mathcal{H}_D = c \vec{\alpha} \cdot \vec{\pi} + \beta m c^2 + \beta a \frac{q \hbar}{4 m_e c} \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$$

$$a = \frac{g-2}{2}$$

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \quad \text{Tenseur de spin}$$

$$F_{\mu\nu} : \text{Tenseur champ électromagnétique}$$

$$\frac{1}{2} \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = i \vec{\alpha} \cdot \vec{E} - c \vec{\Sigma} \cdot \vec{B}_0$$

$$\vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix} \quad \vec{\sigma} : \text{Matrices de Pauli}$$

La encore, le problème est soluble exactement si $\vec{E} = \vec{0}$ et si \vec{B}_0 est uniforme. Les valeurs propres sont

$$E = \left\{ \left[(m_e c^4 + 2 m_e c^2 j \hbar \omega_{co})^{1/2} + m \hbar \omega_a \right]^2 + c^2 \pi_3^2 \right\}^{1/2}$$

$$\omega_a = a \omega_{co} = \frac{g-2}{2} \omega_{co}$$

Limite $v \ll c$ ($\pi_3 = 0$)

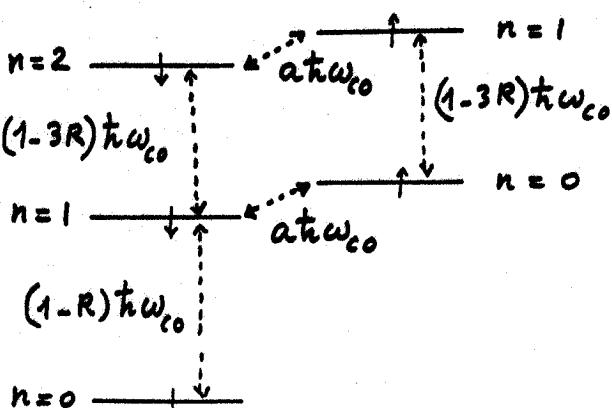
$$E_{n,m} = m_e c^2 + j \hbar \omega_{co} - \frac{j^2 \hbar^2 \omega_{co}^2}{2 m_e c^2} + m \hbar \omega_a$$

Position des raies cyclotron

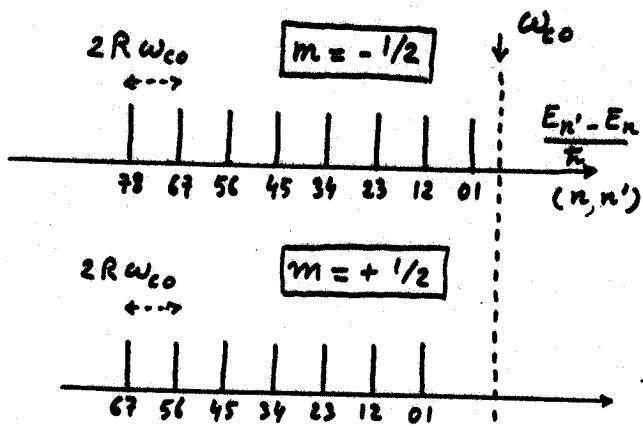
$$\begin{aligned} E_{n+1,m} - E_{n,m} &= \hbar \omega_{co} - (2j+1) \frac{\hbar^2 \omega_{co}^2}{2 m_e c^2} \\ &= \hbar \omega_{co} \left[1 - 2(n+m+1)R \right] \end{aligned}$$

$$R = \frac{\hbar^2 \omega_{co}^2}{2 m_e c^2} = 6,5 \cdot 10^{-10} \text{ pour } \frac{\omega_3}{2\pi} = 164 \text{ GHz}$$

Position des 5 premiers niveaux



Allure du spectre de raies (21)



Spectre de raies équidistantes avec un écart entre raies $2Rw_{co} = 210 \text{ Hz}$

Point important

Le spectre cyclotron n'est pas le même suivant que $m = -\frac{1}{2}$ ou $m = +\frac{1}{2}$

Possibilité d'utiliser cet effet relativiste pour identifier l'état de spin de l'électron

Limite $v \ll c$ avec $\pi_3 \neq 0$ (22)

Le développement de la formule exacte avec $\pi_3 \neq 0$ donne

$$\begin{aligned} E_{n,m,j,\pi_3} - mc^2 &= \\ j\hbar w_{co} + m\hbar w_a + \frac{\pi_3^2}{2m_e} & \\ - j\frac{\hbar^2 w_{co}^2}{2m_e c^2} - \frac{\pi_3^4}{8m_e^3 c^2} - j\hbar w_{co} \frac{\pi_3^2}{2m_e c^2} & \\ - m\hbar w_a \frac{\pi_3^2}{2m_e c^2} & \end{aligned}$$

1^{ère} ligne : Termes d'ordre 0 en v/c

2^{ème} ligne : Corrections masse-vitesse des mouvements transverses et longitudinaux (sur eux mêmes et entre eux)

3^{ème} ligne : Correction de la fréquence d'anomalie due au mouvement longitudinal. Pas de correction due au mouvement transverse

Niveaux d'énergie dans un piège de Penning (23)

Équation de Dirac (avec terme d'anomalie)

$$i\hbar \frac{d\Psi}{dt} = \mathcal{H}_D \Psi$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_D &= c \vec{\alpha} \cdot \vec{\pi} + q\phi + \beta mc^2 \\ &+ a \frac{q\hbar}{2m_e c} i\beta \vec{\alpha} \cdot \vec{E} - a \frac{q\hbar}{2m_e} \beta \sum \vec{B}_o \end{aligned}$$

Termes nouveaux

ϕ : Potentiel électrostatique quadrupolaire du piège

Terme en $\vec{E} = -\vec{P}\phi$ dans la correction d'anomalie en a

Pas de solution exacte connue pour une telle équation

Transformation de Foldy-Wouthuysen

$$\mathcal{H}_D = \beta mc^2 + \mathcal{U} + \mathcal{W} \quad (24)$$

\mathcal{U} : opérateur impair

\mathcal{W} : opérateur pair

(c.-à.-d reliant ou ne reliant pas les 2 premières et 2 dernières composantes des spinors de Dirac)

Possibilité de rendre \mathcal{H}_D pair par une transformation unitaire

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_D \rightarrow \mathcal{H}'_D &= \beta mc^2 + \mathcal{W} + \frac{\beta}{2m_e c^2} \mathcal{U}^2 \\ &- \frac{1}{8m_e^2 c^4} [\mathcal{U}, [\mathcal{U}, \mathcal{W}]] - \frac{1}{8m_e^3 c^6} \beta \mathcal{U}^4 + \dots \end{aligned}$$

Développement en puissances de $1/c$
Pour le problème étudié ici,

$$\mathcal{U} = \underbrace{c \vec{\alpha} \cdot \vec{\pi}}_{\mathcal{U}_1} + \underbrace{a \frac{q\hbar}{2m_e} i\beta \vec{\alpha} \cdot \vec{E}}_{\mathcal{U}_2}$$

$$\mathcal{W} = \underbrace{q\phi}_{\mathcal{W}_1} - \underbrace{a \frac{q\hbar}{2m_e} \sum \vec{B}_o}_{\mathcal{W}_2}$$

Résultats du calcul(à l'ordre 2 inclus en $1/c$)

$$\mathcal{H}'_D - \beta m_e c^2 =$$

$$\frac{\vec{\pi}^2}{2m_e} + q\phi - \frac{q\hbar}{2m_e}(1+a) \vec{\sigma} \cdot \vec{B}_0$$

$\uparrow u_1^2 \quad \uparrow w_1 \quad \uparrow u_1^2 \quad \uparrow w_2$

$$-\frac{1}{2m_e c^2} \left[\frac{\vec{\pi}^2}{2m_e} - \frac{q\hbar}{2m_e} \vec{\sigma} \cdot \vec{B}_0 \right]^2 \sim u_1^4$$

$$+ \frac{q\hbar^2}{8m_e^2 c^2} \Delta\phi \sim [u_1, [u_1, w_1]]$$

$$+ \frac{q\hbar}{8m_e^2 c^2} (1+2a) \vec{\sigma} \cdot [\vec{\pi} \times \vec{E} - \vec{E} \times \vec{\pi}]$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow u_1 u_2 + u_2 u_1$

$$[u_1, [u_1, w_1]]$$

$$+ a \frac{q\hbar}{4m_e^3 c^2} (\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})(\vec{B}_0 \cdot \vec{\pi})$$

$\sim [u_1, [u_1, w_2]]$

(25)

Discussion physique

(26)

1^{ère} ligne

Hamiltonien non relativiste
Énergie cinétique + énergie potentielle + énergie de couplage du moment magnétique de spin incluant l'anomalie.

2^{ème} ligne

Corrections masse-vitesse faisant intervenir l'énergie cinétique transverse ($\vec{\pi}_\perp^2/2m_e$) et longitudinale ($\vec{\pi}_z^2/2m_e$), ainsi que l'énergie de couplage du spin sans l'anomalie

Termes carrés pour chacun de ces 3 termes + Termes rectangles

3^{ème} ligne

Correction de Darwin

Nulle ici car $\Delta\phi = 0$ 4^{ème} ligne

(27)

Couplage spin-orbite

$$1+2a = 1+2 \frac{g-2}{2} = g-1$$

Terme g : Couplage du moment magnétique de spin (incluant l'anomalie) avec le champ magnétique motionnel $-\frac{1}{c^2} \vec{v} \times \vec{E}$

Terme -1 Précession de Thomas correction cinématique qui n'a aucune raison de dépendre de a

5^{ème} ligne

Correction relativiste à la fréquence de la transition d'anomalie, dite à l'énergie cinétique longitudinale

Effet des corrections relativistes sur les fréquences de Bohr

Calcul perturbatif à l'ordre 1 en $1/c^2$

Comme dans le calcul de l'effet de la bouteille magnétique, il ne faut retenir que les termes diagonaux en N_d, N_g, S_3 des diverses corrections relativistes en $1/c^2$

On obtient ainsi

- des termes "anharmoniques" en N_d^2, N_g^2
- des termes de couplage "croisés" en $N_d N_g, N_d S_3, N_g S_3$

Confirmation des résultats de la discussion qualitative faite plus haut

1^{er} exemple

Terme en $\frac{\vec{\pi}_\perp^4}{8m_e^3c^2}$ provenant de la 2^e ligne du transparent VII-25

(29)

En utilisant les expressions de π_x et π_y en fonction de a_d, a_f, \dots (transparent II-20), on obtient

$$\left(-\frac{\vec{\pi}_\perp^4}{8m_e^3c^2}\right)_{\text{diag}} = \frac{1}{2m_ec^2} \underbrace{\frac{\hbar^2 w_c'^4}{\omega_c^2}}_{\sim \hbar^2 w_c'^2} (N_d + \frac{1}{2})^2 + \dots$$

Termes en $N_d N_g, N_g^2$

En regroupant ce terme avec le terme $\hbar w_c'(N_d + \frac{1}{2})$, on obtient

$$(N_d + \frac{1}{2}) \hbar w_c' \left[1 - \frac{1}{2m_ec^2} \hbar w_c'(N_d + \frac{1}{2}) \right]$$

↳ Fréquence cyclotron dépendant du nombre quantique cyclotron

$$\frac{E_{n+1} - E_n}{\hbar} = w_c' \left[1 - \frac{\hbar w_c'}{2m_ec^2} (2n+1) \right]$$

2^e exemple

Terme croisé (30)

$$- 2 \frac{\pi_3^2}{2m_e} \frac{\vec{\pi}_\perp^2}{2m_e} \frac{1}{2m_ec^2} \quad (2^e ligne de VII-25)$$

Partie diagonale égale à

$$- (N_3 + \frac{1}{2}) \hbar w_3 (N_d + \frac{1}{2}) \hbar w_c' \frac{1}{2m_ec^2}$$

Regroupé avec $(N_3 + \frac{1}{2}) \hbar w_c'$, donne

$$(N_3 + \frac{1}{2}) \hbar w_3 \left[1 - (N_d + \frac{1}{2}) \frac{\hbar w_c'}{2m_ec^2} \right]$$

↳ Fréquence de vibration axiale dépendant de l'excitation cyclotron

$$\frac{E_{k+1} - E_k}{\hbar} = w_3 \left[1 - (n + \frac{1}{2}) \frac{\hbar w_c'}{2m_ec^2} \right]$$

3^e exemple Partie diagonale de la 5^e ligne de VII-25

$$- \hbar w_a S_3 \frac{1}{2} (N_3 + \frac{1}{2}) \hbar w_3 \frac{1}{2m_ec^2}$$

Regroupé avec $\hbar w_a S_3$ donne une fréquence d'anomalie dépendant de k (vibrations axiale)

$$w_a \rightarrow w_a \left[1 - (k + \frac{1}{2}) \frac{\hbar w_3}{2m_ec^2} \right]$$

Références- Équations de Dirac

- (4) A. MESSIAH, Mécanique quantique Dunod (Paris 1969), chapitre XX
 (5) J.D. BJORKEN, S. DRELL, Relativistic quantum mechanics McGraw Hill (New York 1964) chapitres 1 et 4

- Solutions dans un champ magnétique uniforme

- (6) W. TSAI, Phys. Rev. 7D, 1945 (1973)
 (7) H. MENDLOWITZ, K. CASE, Phys. Rev. 97, 33 (1955)
 (8) R. VAN DYCK, P. SCHWINBERG, H. DEHMELT "Electron magnetic moment from Geonium spectra I" Preprint soumis à Phys. Rev. D (1984)

- Transformation de Foldy Wouthuysen : références (4), (5) et

- (9) C. COHEN-TANNoudji, Cours au Collège de France 1980-81 Cours VI, VII, VIII
 (10) C. LHUVILLIER Thèse Paris 1976
 (11) R. HEGSTROM, C. LHUVILLIER Phys. Rev. A 15, 1797 (1977)

- Application au piège de Penning

- (12) G. GRAFF, E. KLEMPT, G. WERTH, Z. Physik 222, 201 (1969)