

Résumé du cours 1986-87

Le cours de l'année 1986-1987 est le premier d'une série de deux cours consacrés à l'étude de « diverses formulations équivalentes de l'électrodynamique quantique ». Le but poursuivi est de préciser les motivations qui sont à l'origine de ces formulations, de comparer leurs avantages et inconvénients respectifs et d'analyser les éclairages physiques nouveaux qu'elles donnent sur les processus d'interaction entre matière et rayonnement.

Introduction générale

Le cours commence par des rappels généraux sur l'électrodynamique quantique. Les variables dynamiques décrivant l'état des deux systèmes en interaction, le champ électromagnétique d'une part, les particules chargées de l'autre, sont précisées. Une attention particulière est portée à l'identification des degrés de liberté réellement indépendants du champ. On montre en particulier que le champ électrique longitudinal n'est pas une variable indépendante dans la mesure où il peut être réexprimé en fonction des coordonnées des particules. L'approche lagrangienne et hamiltonienne est également présentée, ce qui permet d'introduire la notion de lagrangiens équivalents.

Le lagrangien standard

Le lagrangien le plus couramment utilisé en électrodynamique classique est le « lagrangien standard » dont l'expression est donnée ainsi que la décomposition en un lagrangien des particules, un lagrangien du rayonnement et un lagrangien d'interaction. Après avoir vérifié que les équations de Lagrange associées à un tel lagrangien coïncident bien avec les équations de Maxwell pour les champs et les équations de Newton-Lorentz pour les particules, on étudie les symétries de ce lagrangien, et notamment son invariance relativiste et son invariance de jauge.

Les difficultés du lagrangien standard tiennent au fait qu'il ne contient pas la dérivée temporelle du potentiel scalaire. Le moment conjugué du potentiel scalaire est donc nul, ce qui rend impossible l'application de la procédure de quantification canonique consistant à associer au couple formé par une variable dynamique et son moment conjugué deux opérateurs dont le commutateur vaut $i\hbar$. On expose alors deux solutions possibles à une telle difficulté.

Electrodynamique quantique en jauge de Coulomb

La première solution consiste à éliminer le potentiel scalaire U du lagrangien au moyen de l'équation de Lagrange relative à U , équation qui permet d'exprimer U en fonction des autres variables dynamiques du champ et des particules. On trouve alors que, dans le nouveau lagrangien ainsi obtenu, le potentiel vecteur longitudinal $\vec{A}_{\parallel}$ n'apparaît que dans une dérivée totale et peut donc être choisi arbitrairement sans que la dynamique du système global ne soit changée. Le choix le plus simple consiste à prendre $\vec{A}_{\parallel}$ nul, c'est-à-dire à choisir la jauge de Coulomb. Un autre avantage de ce choix est de faire apparaître l'interaction de Coulomb entre particules, qui est prépondérante à basse énergie, dans le lagrangien des particules.

A partir du lagrangien en jauge de Coulomb, il est facile d'obtenir les moments conjugués des diverses variables du champ et des particules, puis d'en déduire l'expression de l'hamiltonien du système global ainsi que celle des diverses grandeurs physiques importantes. La forme simple des équations de Hamilton-Jacobi satisfaites par les coordonnées du champ et leurs moments conjugués suggère également d'introduire des combinaisons linéaires de ces grandeurs qui possèdent la propriété importante d'évoluer indépendamment les unes des autres en l'absence de sources. Ce sont les variables normales du champ qui sont associées aux modes normaux de vibration du champ libre et qui deviennent, lors de la quantification canonique de la théorie, les opérateurs de création et d'annihilation de photons.

Formulation covariante

Une autre solution pour résoudre les difficultés liées au lagrangien standard consiste à choisir un nouveau lagrangien, dans lequel apparaissent toutes les dérivées temporelles des variables du champ, de sorte que toutes ces variables possèdent chacune un moment conjugué. Ce nouveau lagrangien n'est cependant pas équivalent au lagrangien standard et il faut donc imposer une condition supplémentaire pour sélectionner parmi toutes les solutions possibles des nouvelles équations du mouvement celles qui satisfont aussi aux équations de Maxwell. Une telle démarche, qui est utilisée dans les formulations covariantes de l'électro-dynamique quantique, est exposée tout d'abord dans le cas plus simple du champ libre ou du champ couplé à des sources extérieures.

On introduit pour cela le lagrangien de Fermi qui conduit bien aux équations de Maxwell lorsque la condition supplémentaire de Lorentz est imposée, et à partir duquel il est possible de calculer les moments conjugués des potentiels, l'hamiltonien et les variables normales. La quantification canonique de la théorie ainsi élaborée permet bien d'établir des relations de commutation covariantes pour les opérateurs associés aux potentiels. Des difficultés apparaissent cependant dans la construction de l'espace des états quantiques du champ. Les relations de commutation covariantes conduisent en effet à des états de photons scalaires de norme négative, ce qui est incompatible avec l'interprétation probabiliste de la mécanique quantique.

Une solution possible à la difficulté précédente est alors exposée. Elle consiste à introduire une deuxième métrique (indéfinie) dans l'espace des états quantiques et à renoncer à l'hermiticité (au sens habituel) du potentiel scalaire, ce qui n'est pas grave dans la mesure où ce sont les champs électrique et magnétique, et non les potentiels, qui sont des grandeurs mesurables. On montre alors que pour toutes les grandeurs véritablement physiques et pour tous les états physiques, sélectionnés au moyen de la condition supplémentaire de Lorentz, l'interprétation probabiliste habituelle de la mécanique quantique demeure valable.

Toute la démarche précédente est illustrée sur un exemple très simple, celui du champ quantique couplé à des charges fixes. Le déplacement de l'état fondamental du champ est calculé, tout d'abord perturbativement puis de manière exacte, ce qui permet de retrouver l'interaction de Coulomb entre les deux particules et de l'interpréter comme étant due à un échange de photons scalaires entre les deux particules.

Transformation unitaire associée à un changement de lagrangien

Tout le reste du cours de cette année est consacré à l'étude de formulations équivalentes de l'électrodynamique quantique construites à partir de lagrangiens qui diffèrent du lagrangien standard en jauge de Coulomb par la dérivée totale d'une fonction des coordonnées généralisées du système champ + particules. Le problème général de la correspondance entre deux descriptions quantiques construites à partir de deux lagrangiens différant par une dérivée totale est donc analysé en premier lieu sur le cas simple d'un système à un seul degré de liberté. On montre que les deux descriptions quantiques se déduisent l'une de l'autre par une transformation unitaire. L'accent est mis sur le fait que la même grandeur physique n'est pas représentée par le même opérateur mathématique dans les deux points de vue. Réciproquement, le même opérateur mathématique n'a pas le même sens physique dans un point de vue et dans l'autre. L'équivalence des prédictions physiques des deux formulations est démontrée de manière générale.

Transformation de Göppert-Mayer pour des particules dans un champ extérieur

Le premier exemple choisi pour illustrer les considérations précédentes concerne des systèmes globalement neutres de particules chargées localisées autour d'un point et interagissant avec des champs électromagnétiques extérieurs de grande longueur d'onde. Une telle situation est fréquemment rencontrée en physique atomique et moléculaire puisque les dimensions des atomes et des molécules sont en général petites devant les longueurs d'onde des rayonnements (optiques ou microondes) utilisés dans les expériences. Dans le lagrangien standard, il est donc légitime de négliger la variation spatiale des champs extérieurs sur l'étendue du système des particules (approximation des grandes longueurs d'onde). L'interaction entre les particules et le rayonnement ne fait plus alors intervenir que le moment dipolaire électrique $\vec{d}$ du système de charges, le lagrangien d'interaction s'écrivant $\vec{d} \cdot \vec{A}_e(\vec{O}, t)$, où $\vec{A}_e$ est le potentiel vecteur du champ extérieur évalué au centre $\vec{O}$ du système de charges.

La transformation de Göppert-Mayer consiste à ajouter au lagrangien standard la dérivée totale de la fonction $-\vec{d} \cdot \vec{A}_e(\vec{O}, t)$, ce qui conduit à un nouveau lagrangien d'interaction $\vec{d} \cdot \vec{E}_e(\vec{O}, t)$ décrivant le couplage du moment dipolaire $\vec{d}$ avec le champ électrique $\vec{E}_e$ du rayonnement. On étudie également comment la transformation de Göppert-Mayer change l'hamiltonien d'interaction et remplace l'hamiltonien habituel en « $\vec{A} \cdot \vec{p}$ » (couplage entre le potentiel vecteur $\vec{A}$ et l'impulsion $\vec{p}$ des particules) par un nouvel hamiltonien en « $\vec{E} \cdot \vec{r}$ » (couplage entre le champ électrique $\vec{E}$ et la position $\vec{r}$ des particules).

Equivalence des points de vue $\vec{A} \cdot \vec{p}$ et $\vec{E} \cdot \vec{r}$. Illustration sur des processus à un ou deux photons

Pour démontrer de manière concrète l'équivalence entre la formulation standard habituelle et celle associée à la transformation de Göppert-Mayer, les amplitudes de transition sont calculées dans un point de vue puis dans l'autre pour des processus d'absorption résonnante à un ou deux photons. L'égalité entre les deux amplitudes est vérifiée par un calcul direct des éléments de matrice de l'opérateur d'évolution.

Les avantages du nouveau point de vue sont illustrés sur l'exemple important de la transition à deux photons $1s \rightarrow 2s$ de l'atome d'hydrogène. L'amplitude de transition apparaît dans les deux points de vue comme une somme de contributions relatives à chaque état intermédiaire. Bien que les sommes des deux séries soient identiques, on montre que la série obtenue dans le point de vue $\vec{E} \cdot \vec{r}$ converge beaucoup plus vite et permet d'obtenir un résultat plus précis si on se limite à un petit nombre d'états intermédiaires.

La discussion précédente est enfin étendue à des processus non résonnants. On montre que les processus non résonnants à un photon se ramènent

souvent à des processus résonnants à deux photons, ce qui permet de résoudre plusieurs paradoxes et de corriger plusieurs erreurs rencontrées dans la littérature au sujet de l'équivalence des deux points de vue pour le calcul des formes de raie. La discussion est illustrée sur l'exemple de la transition $2s - 2p$ de l'atome d'hydrogène (transition de Lamb).

La transformation de Power-Zienau-Woolley

La transformation de Göppert-Mayer est limitée à l'ordre le plus bas en a_0/λ (où a_0 caractérise les dimensions atomiques et λ la longueur d'onde du rayonnement) et est relative à des rayonnements extérieurs dont la dépendance temporelle est donnée. Ces deux restrictions sont levées par la transformation de Power-Zienau-Woolley qui permet d'obtenir un lagrangien d'interaction contenant le développement multipolaire complet de l'interaction entre un atome (ou une molécule) et le rayonnement, considéré comme un système ayant sa dynamique propre.

On montre tout d'abord qu'un système de charges localisées autour d'un point peut être décrit par des densités de polarisation et de magnétisation auxquelles sont associés des courants de polarisation et de magnétisation. On introduit également l'induction électrique qui est un champ transverse, coïncidant (à un facteur multiplicatif près) avec le champ électrique total en dehors du système de charges supposé globalement neutre.

La transformation de Power-Zienau-Woolley consiste à ajouter au lagrangien standard en jauge de Coulomb la dérivée totale de la fonction $-\int d^3r \vec{P}(\vec{r}) \cdot \vec{A}_\perp(\vec{r})$, où $\vec{P}(\vec{r})$ est la densité de polarisation et $\vec{A}_\perp(\vec{r})$ le potentiel vecteur transverse. Elle conduit à un nouveau lagrangien d'interaction faisant intervenir le couplage de la densité de polarisation $\vec{P}(\vec{r})$ au champ électrique $\vec{E}_\perp(\vec{r})$ et celui de la densité de magnétisation $\vec{M}(\vec{r})$ au champ magnétique $\vec{B}(\vec{r})$. Le développement multipolaire de l'interaction en découle immédiatement, de même que le calcul des nouveaux moments conjugués et du nouvel hamiltonien.

Les avantages du nouveau point de vue sont discutés en détail. Ils tiennent au fait que le nouveau moment conjugué du potentiel vecteur transverse est l'induction électrique. Le nouvel hamiltonien d'interaction ne fait donc plus intervenir que des champs transverses purement retardés en dehors des systèmes de charges, comme l'induction électrique ou le champ magnétique. Il en résulte des grandes simplifications pour le calcul des interactions électromagnétiques entre atomes neutres.

Equivalence de 2 points de vue se déduisant l'un de l'autre par une transformation unitaire I-4

① Considérations générales

- Transformation unitaire $T(t)T^\dagger(t) = T^\dagger(t)T(t) = \mathbb{1}$
- Correspondance entre kets décrivant un même état physique dans un point de vue et dans l'autre

$$|\psi^{(2)}(t)\rangle = T(t) |\psi^{(1)}(t)\rangle$$

- Correspondance entre observables décrivant une même grandeur physique

$$G^{(2)} = T(t) G^{(1)} T^\dagger(t)$$

- Evolution dans le temps

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi^{(2)}(t)\rangle = H^{(2)}(t) |\psi^{(2)}(t)\rangle$$

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi^{(1)}(t)\rangle = H^{(1)}(t) |\psi^{(1)}(t)\rangle$$

$$H^{(2)}(t) = T(t) H^{(1)}(t) T^\dagger(t) + i\hbar \left(\frac{dT(t)}{dt} \right) T^\dagger(t)$$

- Operateur d'évolution

$$|\psi^{(2)}(t)\rangle = U^{(2)}(t, t_0) |\psi^{(2)}(t_0)\rangle$$

$$|\psi^{(1)}(t)\rangle = U^{(1)}(t, t_0) |\psi^{(1)}(t_0)\rangle$$

$$U^{(2)}(t, t_0) = T(t) U^{(1)}(t, t_0) T^\dagger(t_0)$$

- Etat initial

$$|\varphi^{(1)}(t_i)\rangle$$

$$|\varphi^{(2)}(t_i)\rangle = T(t_i) |\varphi^{(1)}(t_i)\rangle$$

- Etat final

$$|\chi^{(1)}(t_f)\rangle$$

$$|\chi^{(2)}(t_f)\rangle = T(t_f) |\chi^{(1)}(t_f)\rangle$$

- Identité des amplitudes de transition

$$\langle \chi^{(1)}(t_f) | U^{(1)}(t_f, t_i) | \varphi^{(1)}(t_i) \rangle = \langle \chi^{(2)}(t_f) | U^{(2)}(t_f, t_i) | \varphi^{(2)}(t_i) \rangle$$

Attention à ne pas prendre le même ket pour décrire l'état initial (ou final) dans un point de vue et dans l'autre.

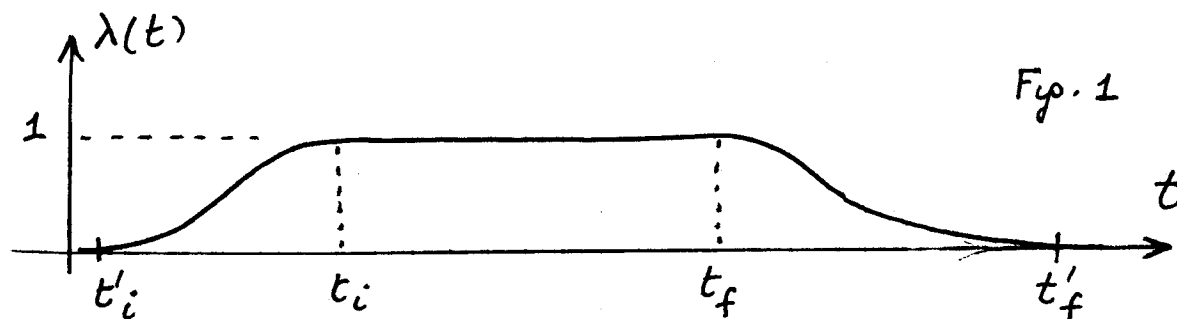
② Forme simplifiée de l'équivalence pour les matrices S |I-5

Si le problème physique peut être posé en termes de collisions, on peut dans certains cas ne pas transformer les vecteurs d'état représentant l'état initial et l'état final et obtenir cependant des amplitudes de transition identiques dans les 2 points de vue.

Physiquement, une telle simplification est due au fait qu'on peut négliger l'hamiltonien d'interaction dans le passé lointain et dans le futur lointain.

Matrice S dans le point de vue (1)

- Hamiltonien $H^{(1)} = H_0 + H_I$
 H_I : interaction entre systèmes physiques d'énergie H_0 .
- Introduction formelle d'un nouvel hamiltonien
 $H^{(1)}(\lambda) = H_0 + \lambda H_I$ λ réel, $0 < \lambda < 1$
- Description d'un processus de collision



Manière commode de "simuler" l'approche de 2 paquets d'ondes quasimonochromatiques, puis la séparation des 2 systèmes, tout en prenant comme états asymptotiques des états propres de H_0 , comme $|\varphi_a\rangle$ ou $|\varphi_b\rangle$, d'énergies E_a et E_b .

Élément de matrice de l'opérateur d'évolution $U^{(1)}(t'_f, t'_i)$ associé à $H_0 + \lambda(t) H_I$ (en représentation d'interaction par rapport à H_0), pris entre $\langle \varphi_b |$ et $|\varphi_a \rangle$

Matrice S : limite de cet élément de matrice quand $t'_i \rightarrow -\infty$, $t'_f \rightarrow +\infty$

- Résultat du calcul pour la matrice S

$$S_{ba}^{(1)} = \delta_{ba} - 2\pi i \delta(E_b - E_a) \mathcal{C}_{ba}^{(1)}$$

$$\mathcal{C}_{ba}^{(1)} = \langle \varphi_b | H_I | \varphi_a \rangle + \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \sum_c \frac{\langle \varphi_b | H_I | \varphi_c \rangle \langle \varphi_c | H_I | \varphi_a \rangle}{E_a - E_c + i\epsilon} + \dots$$

Matrice S dans le point de vue (2)

I-6

- Passage de (1) à (2) par $T = \exp(iF/\hbar)$ où $F = F^+$ indépendant de t

$$\hookrightarrow H^{(2)} = T H^{(1)} T^+$$

- Introduction formelle de

$$T(\lambda) = \exp\left(\frac{i}{\hbar} \lambda F\right)$$

où λ est la même constante que dans $H^{(1)}(\lambda) = H_0 + \lambda H_I$

$$H^{(2)}(\lambda) = T(\lambda) H^{(1)}(\lambda) T^+(\lambda) = T(\lambda) [H_0 + \lambda H_I] T^+(\lambda)$$

• Pour $\lambda = 0$, $T(0) = \mathbb{1}$ $H^{(2)}(0) = H_0 = H^{(1)}(0)$

• Pour $\lambda = 1$, $T(1) = T$ $H^{(1)}(1) = H^{(1)}$

$$H^{(2)}(1) = H^{(2)} = T H^{(1)} T^+$$

On peut donc écrire :

$$H^{(2)}(\lambda) = H_0 + \lambda H'_I(\lambda) \quad \text{avec} \quad H'_I(1) = H'_I$$

Attention, $H'_I \neq T H_I T^+$ car $T H_0 T^+ \neq H_0$

- Description de la collision dans le point de vue 2.
Variations de λ avec t toujours données par la figure 1

• Etat initial à t'_i $\lambda(t'_i) = 0 \rightarrow T(\lambda(t'_i)) = \mathbb{1}$

$$\hookrightarrow |\varphi_a^{(2)}\rangle = |\varphi_a^{(1)}\rangle = |\varphi_a\rangle$$

• Etat final à t'_f $\lambda(t'_f) = 0 \rightarrow T(\lambda(t'_f)) = \mathbb{1}$

$$\hookrightarrow |\varphi_b^{(2)}\rangle = |\varphi_b^{(1)}\rangle = |\varphi_b\rangle$$

• Comme λ dépend de t dans $T(\lambda(t))$, l'évolution dans le point de vue (2) est décrite par l'hamiltonien

$$T(\lambda) H^{(1)}(\lambda) T^+(\lambda) + i\hbar \left[\frac{d}{dt} T(\lambda(t)) \right] T^+(\lambda(t)) = H_0 + \lambda(t) H'_I(\lambda(t)) - \dot{\lambda}(t) F$$

$$\hookrightarrow U_{ba}^{(1)}(t'_f, t'_i) = U_{ba}^{(2)}(t'_f, t'_i)$$

↑
Opérateur d'évolution
associé à
 $H_0 + \lambda(t) H_I$

↑
Opérateur d'évolution
associé à
 $H_0 + \lambda(t) H'_I(\lambda(t)) - \dot{\lambda}(t) F$

- Comme $\lambda(t)$ varie très lentement, $\dot{\lambda}(t)$ est très petit. Dans de nombreux cas, il est possible de négliger le terme $-\dot{\lambda}(t)F$ devant $H_0 + \lambda(t)H'_I(\lambda(t))$

quel est l'opérateur d'évolution associé à $H_0 + \lambda(t)H'_I(\lambda(t))$?

Comme $\lambda(t)H'_I(\lambda(t))$ varie très lentement de 0 à $H'_I(1) = H'_I$ entre t'_i et t_i , puis de H'_I à 0 entre t_f et t'_f , l'opérateur d'évolution associé à $H_0 + \lambda(t)H'_I(\lambda(t))$ tend (à la limite $t'_i \rightarrow -\infty$, $t'_f \rightarrow +\infty$) vers la matrice S associée à H'_I

- Donc, si le terme $-\dot{\lambda}(t)F$ peut être négligé, l'égalité du bas de la page I-6 entraîne

$$\mathcal{P}_{ba}^{(1)} = \mathcal{P}_{ba}^{(2)}$$

ou
$$\mathcal{P}_{ba}^{(2)} = \delta_{ba} - 2\pi i \delta(E_b - E_a) \mathcal{P}_{ba}^{(2)}$$

avec
$$\mathcal{P}_{ba}^{(2)} = \langle \varphi_b | H'_I | \varphi_a \rangle + \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \sum_c \frac{\langle \varphi_b | H'_I | \varphi_c \rangle \langle \varphi_c | H'_I | \varphi_a \rangle}{E_a - E_c + i\epsilon} + \dots$$

On a donc

$$\mathcal{P}_{ba}^{(2)} = \mathcal{P}_{ba}^{(1)} \quad \text{si} \quad E_b = E_a$$

Résultat qui permet de simplifier considérablement les calculs, puisqu'on peut prendre dans les 2 points de vue, le même état propre de H_0 pour décrire l'état initial (ou final)

Quelques écueils à éviter

- Résultat valable seulement si le problème peut être posé en termes de collisions.
- Il faut prendre pour $|\varphi_a\rangle$ et $|\varphi_b\rangle$ des états stables, on alors s'assurer que leur instabilité peut être négligée dans le problème étudié.
Sinon, il faut prendre les états finals stables résultant de la désintégration de $|\varphi_a\rangle$ ou $|\varphi_b\rangle$
- Les matrices $\mathcal{P}$ ne sont égales que sur la couche d'énergie ($E_a = E_b$). Si $E_b \neq E_a$ $\mathcal{P}_{ba}^{(2)} \neq \mathcal{P}_{ba}^{(1)}$

Références "Photons et Atomes - Introduction à l'Électrodynamique Quantique" - Chapitre IV, § D
C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, G. Grynberg
InterEditions - Éditions du CNRS Paris 1987

Poursuivre l'étude de diverses formulations équivalentes de l'Electrodynamique Quantique :

Le cours portera plus particulièrement sur l'étude de transformations unitaires visant à soustraire du champ total le champ "lié" aux particules. L'objectif poursuivi est de faire apparaître ainsi, dans l'hamiltonien transformé, des termes d'interaction effective entre particules.

- Tentative d'élimination du champ transverse lié aux particules. Transformation de Pauli - Fierz - Kramers.
- Application à une charge localisée. Correction de masse et déplacement de Lamb dans le point de vue de Pauli - Fierz.
- Généralisation à plusieurs systèmes de charges localisées. Etablissement d'hamiltoniens d'interaction magnétiques.
- Transformation de Henneberger. Diffusion par un potentiel en présence d'un rayonnement laser.
- Elimination des potentiels longitudinaux et scalaires en électrodynamique quantique relativiste. Passage de la jauge de Lorentz à la jauge de Coulomb.

Appendice A : Formulaire sur l'électrodynamique en jauge de Coulomb

App.1

Variables dynamiques

Coordonnées et vitesses généralisées (formalisme lagrangien)

Particules α (de charges q_α et masses m_α) : $\{\vec{r}_\alpha, \dot{\vec{r}}_\alpha\}$

$$\rho(\vec{r}) = \sum_\alpha q_\alpha \delta(\vec{r} - \vec{r}_\alpha) \quad \vec{J}(\vec{r}) = \sum_\alpha q_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha \delta(\vec{r} - \vec{r}_\alpha) \quad (A.1)$$

Champs (transverses) : $\{\vec{A}_\perp(\vec{r}), \dot{\vec{A}}_\perp(\vec{r})\}$ ou $\{\vec{\mathcal{A}}_\perp(\vec{k}), \dot{\vec{\mathcal{A}}}_\perp(\vec{k})\}$

- Transformée de Fourier spatiale $\vec{V}(\vec{k})$ de $V(\vec{r})$ (lettres cursives)

$$\vec{V}(\vec{k}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int d^3r e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \vec{V}(\vec{r}) \quad (A.2)$$

Champ transverse : $\vec{V}_\perp(\vec{k}) \perp \vec{k}$: $\vec{k} \cdot \vec{V}_\perp = 0$ ou $\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0$

Champ longitudinal : $\vec{V}_\parallel(\vec{k}) \parallel \vec{k}$: $\vec{k} \times \vec{V}_\parallel = \vec{0}$ ou $\vec{\nabla} \times \vec{V} = \vec{0}$

- Que valent $\vec{E}_\parallel$ et $\vec{B}_\parallel$? Fixés par 2 équations de Maxwell

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \rightarrow i\vec{k} \cdot \vec{B} = 0 \rightarrow \vec{B}_\parallel = \vec{0} \quad (A.3)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \rightarrow i\vec{k} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \rightarrow \vec{E}_\parallel(\vec{k}) = -i\frac{\vec{k}}{\epsilon_0 k^2} \rho(\vec{k}) \rightarrow \quad (A.4)$$

$$\rightarrow \vec{E}_\parallel(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \rho(\vec{r}', t) \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \text{champ de Coulomb de la distribution de charges figée à l'instant } t$$

- Que valent $\vec{A}_\parallel$ et U ?

• Dans un changement de jauge défini par F

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} F \quad \vec{\mathcal{A}} \rightarrow \vec{\mathcal{A}}' = \vec{\mathcal{A}} + i\vec{k} F \quad (A.5)$$

$$\hookrightarrow \vec{\mathcal{A}}'_\perp = \vec{\mathcal{A}}_\perp \quad \vec{\mathcal{A}}'_\parallel = \vec{\mathcal{A}}_\parallel + i\vec{k} F \quad (A.6)$$

$\vec{\mathcal{A}}_\perp$ est invariant de jauge. $\vec{\mathcal{A}}_\parallel$ peut être changé à volonté.
En jauge de Coulomb $\vec{\mathcal{A}}_\parallel = \vec{0}$ (A.7)

• Lien entre champs et potentiels

$$\begin{cases} \vec{E} = -\dot{\vec{A}} - \vec{\nabla} U \\ \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \vec{\mathcal{E}} = -\dot{\vec{\mathcal{A}}} - i\vec{k} U \\ \vec{\mathcal{B}} = i\vec{k} \times \vec{\mathcal{A}} \end{cases} \quad (A.8)$$

$$\hookrightarrow \vec{\mathcal{E}}_\parallel = -\dot{\vec{\mathcal{A}}}_\parallel - i\vec{k} U = -i\vec{k} U \quad (\text{en jauge de Coulomb}) \quad (A.9)$$

$$\hookrightarrow U = \frac{i\vec{k} \cdot \vec{\mathcal{E}}_\parallel}{k^2} = \frac{1}{\epsilon_0 k^2} \rho \rightarrow U(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (A.10)$$

U : Potentiel de Coulomb de la distribution de charge

- Que valent $\vec{E}_\perp$ et $\vec{B}$? (en fonction de $\vec{A}_\perp$ et $\dot{\vec{A}}_\perp$)

$$\begin{cases} \vec{E}_\perp = -\dot{\vec{A}}_\perp \\ \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}_\perp \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \vec{\mathcal{E}}_\perp = -\dot{\vec{\mathcal{A}}}_\perp \\ \vec{\mathcal{B}} = i\vec{k} \times \vec{\mathcal{A}}_\perp \end{cases} \quad (A.11)$$

(App. 2)

- Energie du champ : $\frac{\epsilon_0}{2} \int d^3r (\vec{E}^2 + c^2 \vec{B}^2) = \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3k (|\vec{E}|^2 + c^2 |\vec{B}|^2) = H_{\text{long}} + H_{\text{trans}}$ (A.12)

$$H_{\text{long}} = \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3k |\vec{E}_{||}|^2 = \frac{1}{2\epsilon_0} \int d^3k \frac{\rho^* \rho}{k^2} = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \int d^3r d^3r' \frac{\rho(\vec{r}) \rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = V_{\text{Coul}}$$

$$= \sum_{\alpha} E_{\text{Coul}}^{\alpha} + \sum_{\alpha \neq \beta} \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{q_{\alpha} q_{\beta}}{|\vec{r}_{\alpha} - \vec{r}_{\beta}|} \quad (A.13)$$

$$E_{\text{Coul}}^{\alpha} = \frac{1}{2\epsilon_0} \int d^3k \frac{\rho_{\alpha}^* \rho_{\alpha}}{k^2} = \frac{q_{\alpha}^2}{2\epsilon_0 (2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{k^2} = \frac{q_{\alpha}^2 k_c}{4\pi^2 \epsilon_0} \quad (\text{Compare à } k_c) \quad (A.14)$$

$$H_{\text{trans}} = \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3k (|\vec{E}_{\perp}|^2 + c^2 |\vec{B}|^2) = \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3k (|\vec{\mathcal{E}}_{\perp}|^2 + c^2 k^2 |\vec{\mathcal{A}}_{\perp}|^2) \quad (A.15)$$

Coordonnées et moments conjugués (formalisme hamiltonien)

Particules α $\{ \vec{r}_{\alpha}, \vec{p}_{\alpha} \}$

$$\vec{r}_{\alpha} = \frac{1}{m_{\alpha}} [\vec{p}_{\alpha} - q_{\alpha} \vec{A}_{\perp}(\vec{r}_{\alpha})] \quad (A.16)$$

Champs transverses $\{ \vec{A}_{\perp}(\vec{r}), \vec{\Pi}(\vec{r}) \}$ ou $\{ \vec{\mathcal{A}}_{\perp}(\vec{k}), \vec{\mathcal{H}}(\vec{k}) \}$

$$\vec{A}_{\perp} = \frac{1}{\epsilon_0} \vec{\Pi} \quad \rightarrow \quad \vec{\Pi}(\vec{r}) = -\epsilon_0 \vec{E}_{\perp}(\vec{r}) \quad (A.17)$$

- Energie du champ transverse

$$H_{\text{trans}} = \frac{1}{2} \int d^3k \left(\frac{|\vec{\Pi}|^2}{\epsilon_0} + \epsilon_0 \omega^2 |\vec{\mathcal{A}}_{\perp}|^2 \right) \quad \omega = ck \quad (A.18)$$

Somme d'hamiltoniens d'oscillateurs harmoniques

Hamiltonien

- Système global champ + particules

$$H = \sum_{\alpha} \frac{1}{2m_{\alpha}} [\vec{p}_{\alpha} - q_{\alpha} \vec{A}_{\perp}(\vec{r}_{\alpha})]^2 + V_{\text{Coul}} + H_{\text{trans}}$$

= Energie cinétique des particules + Energie du champ
 $V_{\text{Coul}} + H_{\text{trans}}$

- Décomposition de H en $H = H_P + H_R + H_I$ (A.20)

$$H_P = \sum_{\alpha} \frac{\vec{p}_{\alpha}^2}{2m_{\alpha}} + V_{\text{Coul}} = \sum_{\alpha} \frac{\vec{p}_{\alpha}^2}{2m_{\alpha}} + \sum_{\alpha} E_{\text{Coul}}^{\alpha} + \sum_{\alpha \neq \beta} \frac{q_{\alpha} q_{\beta}}{8\pi\epsilon_0 |\vec{r}_{\alpha} - \vec{r}_{\beta}|} \quad (A.21)$$

$$H_R = H_{\text{trans}} \quad (A.22)$$

$$H_I = H_{I1} + H_{I2} = \text{Terme linéaire} + \text{Terme quadratique (en champs)} \quad (A.23)$$

$$H_{I1} = - \sum_{\alpha} \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} \vec{p}_{\alpha} \cdot \vec{A}_{\perp}(\vec{r}_{\alpha}) \quad H_{I2} = \sum_{\alpha} \frac{q_{\alpha}^2}{2m_{\alpha}} \vec{A}_{\perp}^2(\vec{r}_{\alpha}) \quad (A.24)$$

Hamiltonien d'interaction supplémentaire lié aux spins $\vec{S}_{\alpha}$

$$H_{I1}^S = - \sum_{\alpha} g_{\alpha} \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} \vec{S}_{\alpha} \cdot \vec{B}(\vec{r}_{\alpha}) \quad g_{\alpha} : \text{Facteur } g \text{ de } \alpha \quad (A.25)$$

En l'absence de particules, $H = H_{\text{trans}}$ a la structure d'une somme d'hamiltoniens d'oscillateurs harmoniques $\rightarrow$ Possibilité d'introduire, pour chaque $\vec{k}$, des combinaisons linéaires de $\vec{\pi}_\perp$ et $\vec{\pi}$ qui évoluent indépendamment les uns des autres.
Variables normales décrivant les modes normaux de vibration du champ libre

Mode $(\vec{k}, \vec{E})$

Défini par un vecteur d'onde $\vec{k}$ et un vecteur polarisation $\vec{E}$, unitaire, $\perp$ à $\vec{k}$ (2 vecteurs $\vec{E}$ et $\vec{E}'$ pour chaque $\vec{k}$, $\vec{E} \cdot \vec{E}' = 0$)

Définition des variables normales $\alpha_E(\vec{k})$

$$\alpha_E(\vec{k}) = N(k) \left[\omega \mathcal{R}_E(\vec{k}) + \frac{i}{\varepsilon_0} \pi_E(\vec{k}) \right] \quad \begin{cases} \mathcal{R}_E(\vec{k}) = \vec{E} \cdot \vec{\mathcal{R}}(\vec{k}) \\ \pi_E(\vec{k}) = \vec{E} \cdot \vec{\pi}(\vec{k}) \end{cases} \quad (\text{A.26})$$

$N(k)$ constante de normalisation, qu'il est commode pour la suite de choisir égale à $\sqrt{\varepsilon_0 / 2\hbar\omega}$

Equation d'évolution des variables normales

$$\dot{\alpha}_E(\vec{k}, t) + i\omega \alpha_E(\vec{k}, t) = \frac{i}{\sqrt{2\varepsilon_0\hbar\omega}} j_E(\vec{k}, t) \quad (\text{A.27})$$

$$j_E(\vec{k}, t) = \vec{E} \cdot \vec{j}(\vec{k}, t) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int d^3r \vec{E} \cdot \vec{j}(\vec{r}, t) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \sum_{\alpha} q_{\alpha} \vec{E} \cdot \dot{\vec{r}}_{\alpha} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}_{\alpha}} \quad (\text{A.28})$$

En l'absence de particules, $j_E = 0 \rightarrow \alpha_E(\vec{k}, t) = \alpha_E(\vec{k}) e^{-i\omega t} \quad (\text{A.29})$

Expression des grandeurs physiques en fonction des variables normales

$$\vec{A}_{\perp}(\vec{r}) = \int d^3k \sum_{\vec{E} \perp \vec{k}} \mathcal{R}_{\omega} [\vec{E} \alpha_E(\vec{k}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} + \vec{E} \alpha_E^*(\vec{k}) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}}] \quad (\text{A.30})$$

$$\vec{E}_{\perp}(\vec{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0} \vec{\Pi}(\vec{r}) = i \int d^3k \sum_{\vec{E} \perp \vec{k}} \mathcal{E}_{\omega} [\vec{E} \alpha_E(\vec{k}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} - \vec{E} \alpha_E^*(\vec{k}) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}}] \quad (\text{A.31})$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = i \int d^3k \sum_{\vec{E} \perp \vec{k}} \beta_{\omega} [(\vec{k} \times \vec{E}) \alpha_E(\vec{k}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} - (\vec{k} \times \vec{E}) \alpha_E^*(\vec{k}) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}}] \quad (\text{A.32})$$

$$\mathcal{R}_{\omega} = \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0\omega(2\pi)^3}} \quad \mathcal{E}_{\omega} = \omega \mathcal{R}_{\omega} \quad \beta_{\omega} = \frac{\mathcal{E}_{\omega}}{c} \quad \omega = ck \quad \vec{\kappa} = \frac{\vec{k}}{k} \quad (\text{A.33})$$

$$H_{\text{trans}} = H_R = \int d^3k \sum_{\vec{E} \perp \vec{k}} \hbar\omega \alpha_E^*(\vec{k}) \alpha_E(\vec{k}) \quad (\text{A.34})$$

$$\vec{P}_{\text{trans}} = \varepsilon_0 \int d^3r \vec{E}_{\perp} \times \vec{B} = \int d^3k \sum_{\vec{E} \perp \vec{k}} \hbar \vec{k} \alpha_E^*(\vec{k}) \alpha_E(\vec{k}) \quad (\text{A.35})$$

$$\vec{P}_{\text{total}} = \vec{P}_{\text{trans}} + \sum_{\alpha} \vec{P}_{\alpha} \quad (\text{A.36})$$

Quantification canonique

- Les $\mathcal{R}_E$ et π_E deviennent des opérateurs satisfaisant à

$$[\mathcal{R}_E(\vec{k}), \pi_{E'}^+(\vec{k}')] = i\hbar \delta_{EE'} \delta(\vec{k} - \vec{k}') \quad (\text{A.37})$$

- Opérateurs de création et d'annihilation $a_{\vec{E}}(\vec{k}), a_{\vec{E}}^+(\vec{k})$ (définis à partir des opérateurs $\mathcal{A}_{\vec{E}}(\vec{k})$ et $\mathcal{B}_{\vec{E}}(\vec{k})$ par les mêmes formules que $\alpha_{\vec{E}}(\vec{k})$ et $\alpha_{\vec{E}}^*(\vec{k})$).

$$[a_{\vec{E}}(\vec{k}), a_{\vec{E}'}^+(\vec{k}')] = \delta_{\vec{E}\vec{E}'} \delta(\vec{k}-\vec{k}') \quad (A.38)$$

Discretisation des modes

- Conditions aux limites périodiques dans un cube de côté L .
 $\vec{k} \rightarrow \vec{k}_i$ avec $k_{ix} = \frac{2\pi}{L} n_{ix}$ n_i entier ≥ 0
- Mode $\vec{k} \vec{E} \rightarrow$ Mode $\vec{k}_i \vec{E}_i$ également noté mode i
- $a_{\vec{E}}(\vec{k}) \rightarrow a_{\vec{k}_i \vec{E}_i}$ noté aussi a_i

$$[a_i, a_j^+] = \delta_{ij} \quad (A.39)$$

- Développement des grandeurs physiques en a_i, a_i^+

$$\vec{A}(\vec{r}) = \sum_i \mathcal{A}_{\omega_i} [\vec{E}_i a_i e^{i\vec{k}_i \cdot \vec{r}} + \vec{E}_i a_i^+ e^{-i\vec{k}_i \cdot \vec{r}}] \quad (A.40)$$

$$\vec{E}_{\perp}(\vec{r}) = i \sum_i \mathcal{E}_{\omega_i} [\vec{E}_i a_i e^{i\vec{k}_i \cdot \vec{r}} - \vec{E}_i a_i^+ e^{-i\vec{k}_i \cdot \vec{r}}] \quad (A.41)$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = i \sum_i \mathcal{B}_{\omega_i} [\vec{k}_i \times \vec{E}_i a_i e^{i\vec{k}_i \cdot \vec{r}} - \vec{k}_i \times \vec{E}_i a_i^+ e^{-i\vec{k}_i \cdot \vec{r}}] \quad (A.42)$$

$$\mathcal{A}_{\omega_i} = \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 \omega_i L^3}} \quad \mathcal{E}_{\omega_i} = \omega_i \mathcal{A}_{\omega_i} \quad \mathcal{B}_{\omega_i} = \frac{\mathcal{E}_{\omega_i}}{c} \quad \vec{k}_i = \vec{k}_i / k_i \quad (A.43)$$

$$H_R = \sum_i \frac{\hbar \omega_i}{2} (a_i^+ a_i + a_i a_i^+) = \sum_i \hbar \omega_i (a_i^+ a_i + \frac{1}{2}) \quad (A.44)$$

$$\vec{P}_{trans} = \vec{P}_R = \sum_i \frac{\hbar \vec{k}_i}{2} (a_i^+ a_i + a_i a_i^+) = \sum_i \hbar \vec{k}_i a_i^+ a_i \quad (A.45)$$

Espace des états $\mathcal{E}$

- $\mathcal{E} = \mathcal{E}_P \otimes \mathcal{E}_R$ $\mathcal{E}_P$ espace des états des particules $\mathcal{E}_R$ " " " du rayonnement (A.46)

$$\mathcal{E}_R = \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2 \otimes \dots \otimes \mathcal{E}_i \otimes \dots \quad (A.47)$$

$\mathcal{E}_i$: espace des états du mode i
(oscillateur harmonique de fréquence ω_i)

- Base de $\mathcal{E}$

$$\{ |s; n_1, \dots, n_i, \dots\rangle \} \quad (A.48)$$

Particules dans l'état $|s\rangle$ en présence de n_1 photons $\vec{k}_1 \vec{E}_1$, ... n_i photons $\vec{k}_i \vec{E}_i$, ...