Généralisations de la transformation de Pauli-Fierz (suite)

② Généralisation à des particules avec spin. Modèle simple de spins situés en des points fixes

- Modèle étudié - Hamiltonien
- Transformation unitaire éliminant les termes d'interaction linéaires en charge.
- Nouvel hamiltonien de spin et nouvel hamiltonien d'interaction. Interaction dipôle-dipôle et interaction de contact.
- Cas où les spins interagissent en plus avec un champ magnétique statique. Termes supplémentaires dans l'hamiltonien transformé.
- Nouvel hamiltonien d'interaction à un photon.
- Corrections radiatives à la précession de Larmor.

③ Généralisation à des particules avec spins non localisées. Principe du calcul et quelques résultats

- Hamiltonien.
- Transformation unitaire éliminant les termes d'interaction linéaires en charge.
- Nouvel hamiltonien des particules à l'ordre 2 en q_α.
- Cohérence des développements en $1/c$.

Hamiltonien

$$H = H_R + H_{IS} = H_R - \sum_\alpha \gamma_\alpha \vec{S}_\alpha \cdot \vec{B}(\vec{r}_\alpha) \tag{2.1}$$

1^er^ terme : hamiltonien du rayonnement (ordre 0 en q_α)

$$H_R = \int d^3k \sum_\varepsilon \hbar\omega \left[a_\varepsilon^+(\vec{k}) a_\varepsilon(\vec{k}) + \frac{1}{2} \right] \tag{2.2}$$

2^ème^ terme H_{IS} : interaction du moment magnétique de spin $\gamma_\alpha S_\alpha$ où

$$\gamma_a = g_\alpha \frac{q_\alpha}{2m_\alpha} \qquad (g_\alpha : \text{facteur } g) \tag{2.3}$$

avec le champ magnétique du rayonnement évalué en $\vec{r}_\alpha$ (ordre 1 en q_α)

$$B(\vec{r}_\alpha) = i\int d^3k \sum_\varepsilon \frac{1}{c}\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0(2\pi)^3}}\ \vec{\kappa}\times\vec{\varepsilon}\left[a_\varepsilon(\vec{k})e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}_\alpha} - a_\varepsilon^+(\vec{k})e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}_\alpha}\right] \tag{2.4}$$

Transformation unitaire

- $$T = e^{iF_S/\hbar} \tag{2.5}$$

  On verra plus loin que F_S peut être pris linéaire en q_α.
- Développement de $H' = THT^+$ en puissances de q_α

$$H' = H_R + \\ + H_{IS} + \left[\frac{iF_S}{\hbar}, H_R\right] + \\ + \left[\frac{iF_S}{\hbar}, H_{IS}\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{iF_S}{\hbar}, \left[\frac{iF_S}{\hbar}, H_R\right]\right] + \cdots \tag{2.6}$$

– Annulation des termes en q_α de H'

$$H_{IS} + \left[\frac{iF_S}{\hbar}, H_R\right] = 0 \tag{2.7}$$

Comme H_{IS} et H_R sont respectivement linéaire et quadratique en q_α, on peut choisir F_S comme combinaison linéaire de a et a^+

$$\frac{iF_S}{\hbar} = \sum_\alpha \int d^3k \sum_\varepsilon \left[\beta'^{+}_\varepsilon(\vec{k},\alpha)\, a_\varepsilon(k) - \beta'_\varepsilon(\vec{k},\alpha)\, a^+_\varepsilon(\vec{k})\right] \tag{2.8}$$

L'annulation du coefficient de $a^+_\varepsilon(\vec{k})$ dans (2.7) donne

$$i\gamma_\alpha \frac{1}{c}\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0(2\pi)^3}}\ \vec{S}_\alpha\cdot(\vec{\kappa}\times\vec{\varepsilon})\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}_\alpha} + \hbar\omega\,\beta'_\varepsilon(\vec{k},\alpha) = 0 \tag{2.9}$$

c'est à dire

$$\beta'_\varepsilon(\vec{k},\alpha) = \frac{1}{\hbar}\gamma_\alpha\sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0\omega^3(2\pi)^3}}\ \vec{S}_\alpha\cdot(-i\vec{k}\times\vec{\varepsilon})\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}_\alpha} \tag{2.10}$$

On en déduit, compte tenu de (2.8)

$$F_S = \sum_\alpha \gamma_\alpha\, \vec{S}_\alpha\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{Z}(\vec{r}_\alpha)\right) \tag{2.11}$$

Termes d'ordre 2 en q_α dans le nouvel hamiltonien

$$H'_2 = \left[\frac{iF_S}{\hbar}, H_{IS}\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{iF_S}{\hbar}, \underbrace{\left[\frac{iF_S}{\hbar}, H_R\right]}_{=-H_{IS}}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{iF_S}{\hbar}, H_{IS}\right] \tag{2.12}$$

c'est à dire encore, d'après (2.1) et (2.11)

$$H'_2 = -\frac{i}{2\hbar}\sum_\alpha\sum_\beta \gamma_\alpha\gamma_\beta \sum_{i,j=x,y,z}\left[(\vec{S}_\alpha)_i\left(\vec{\nabla}\times\vec{Z}(\vec{r}_\alpha)\right)_i, (\vec{S}_\beta)_j\left(\vec{B}(\vec{r}_\beta)\right)_j\right] \tag{2.13}$$

Commutateur des opérateurs de rayonnement

$$\left[\left(\vec{\nabla}\times\vec{Z}(\vec{r}_\alpha)\right)_i, \left(\vec{Z}(\vec{r}_\beta)\right)_j\right] = \int d^3k\sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0\omega^3(2\pi)^3}}\int d^3k'\,\frac{1}{c}\sqrt{\frac{\hbar\omega'}{2\varepsilon_0(2\pi)^3}}\sum_{\vec{\varepsilon}}\sum_{\vec{\varepsilon}'}$$

$$(-1)\,(i\vec{k}\times\vec{\varepsilon})_i\,(\vec{\kappa}'\times\vec{\varepsilon}')_j\,\underbrace{\left[a_\varepsilon(\vec{k}), a^+_{\varepsilon'}(\vec{k}')\right]}_{\delta_{\varepsilon\varepsilon'}\,\delta(\vec{k}-\vec{k}')}\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}_\alpha}\, e^{-i\vec{k}'\cdot\vec{r}_\beta} + \text{c.c}$$

$$= -\frac{i\hbar}{c^2}\int d^3k\,\frac{1}{\varepsilon_0(2\pi)^3}\underbrace{\sum_{\vec{\varepsilon}}(\vec{\kappa}\times\vec{\varepsilon})_i\,(\vec{\kappa}\times\vec{\varepsilon})_j}_{\delta_{ij}-\frac{k_ik_j}{k^2}}\, e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}_\alpha-\vec{r}_\beta)}$$

$$= -\frac{i\hbar}{\varepsilon_0c^2}\underbrace{\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3k\left(\delta_{ij}-\frac{k_ik_j}{k^2}\right)e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}_\alpha-\vec{r}_\beta)}}_{\delta^\perp_{ij}(\vec{r}_\alpha-\vec{r}_\beta)} = -i\hbar\,\delta^\perp_{ij}(\vec{r}_\alpha-\vec{r}_\beta) \tag{2.14}$$

$\delta^\perp_{ij}(\vec{r}_\alpha-\vec{r}_\beta)$: "fonction delta-transverse" (voir Photons et Atomes – Complément A_I)

$$\delta^\perp_{ij}(\vec{\rho}) = \frac{2}{3}\delta_{ij}\,\delta(\vec{\rho}) + \frac{1}{4\pi\rho^3}\left(\frac{3\rho_i\rho_j}{\rho^2} - \delta_{ij}\right) \tag{2.15}$$

Commutateur des opérateurs de spin

$$[(\vec{S}_\alpha)_i , (\vec{S}_\beta)_j] = i\hbar\, \delta_{\alpha\beta} \sum_k \varepsilon_{ijk} (\vec{S}_\alpha)_k \qquad (2.16)$$

$$\hookrightarrow \quad H'_2 = -\frac{i}{2\hbar} \sum_\alpha \sum_\beta \sum_i \sum_j \gamma_\alpha \gamma_\beta \Big\{ S_{\alpha i} S_{\beta j} \big[(\vec{\nabla}\times\vec{Z}(\vec{r}_\alpha))_i , (\vec{B}(\vec{r}_\beta))_j \big] + (\vec{\nabla}\times\vec{Z}(\vec{r}_\alpha))_i (\vec{B}(\vec{r}_\beta))_j \, [S_{\alpha i}, S_{\beta j}] \Big\} \qquad (2.17)$$

Le 1er terme est un nouvel hamiltonien de spin $H'_2(\text{spin})$
Le 2ème terme est un nouvel hamiltonien d'interaction $H'_2(\text{interaction})$

Nouvel hamiltonien de spin . D'après (2.14) et (2.17)

$$H'_2(\text{spin}) = -\frac{1}{2\varepsilon_0 c^2} \sum_\alpha \sum_\beta \sum_i \sum_j \gamma_\alpha \gamma_\beta S_{\alpha i} S_{\beta j} \, \delta^\perp_{ij}(\vec{r}_\alpha - \vec{r}_\beta)$$

$$= \sum_{\alpha\neq\beta} H'_2(\alpha,\beta) + \sum_\alpha H'_2(\alpha) \qquad (2.18)$$

$\boxed{\alpha \neq \beta}$

$$H'_2(\alpha,\beta) + H'_2(\beta,\alpha) = -\frac{2\gamma_\alpha\gamma_\beta}{3\varepsilon_0 c^2} \vec{S}_\alpha\cdot\vec{S}_\beta \; \delta(\vec{r}_\alpha - \vec{r}_\beta) + \frac{\gamma_\alpha\gamma_\beta}{4\pi\varepsilon_0 c^2} \left\{ \frac{\vec{S}_\alpha\cdot\vec{S}_\beta}{|\vec{r}_\alpha - \vec{r}_\beta|^3} - 3\,\frac{[\vec{S}_\alpha\cdot(\vec{r}_\alpha-\vec{r}_\beta)][\vec{S}_\beta\cdot(\vec{r}_\alpha-\vec{r}_\beta)]}{|\vec{r}_\alpha-\vec{r}_\beta|^5} \right\} \qquad (2.19)$$

1er terme : interaction de contact de Fermi entre les 2 spins
2ème terme : interaction dipôle - dipôle entre les 2 spins

$\boxed{\alpha = \beta}$

$$H'_2(\alpha) = -\frac{\gamma_\alpha^2}{2\varepsilon_0 c^2} \sum_i \sum_j S_{\alpha i} S_{\alpha j} \, \delta^\perp_{ij}(\vec{0}) \qquad (2.20)$$

$$\delta^\perp_{ij}(\vec{0}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{k_c} k^2 dk \int d\Omega \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}\right) = \frac{k_c^3}{9\pi^2}\delta_{ij} \qquad (2.21)$$

$$H'_2(\alpha) = -\frac{\gamma_\alpha^2 k_c^3}{18\varepsilon_0 \pi^2 c^2} \vec{S}_\alpha^{\,2} \qquad (2.22)$$

Terme d'energie propre des moments magnétiques
Couplage de chaque spin avec son champ magnétique propre

Nouvel hamiltonien d'interaction

$$H'_2(\text{interaction}) = -\frac{i}{2\hbar} \sum_\alpha\sum_\beta\sum_i\sum_j i\hbar\,\delta_{\alpha\beta} \sum_k \varepsilon_{ijk} (\vec{\nabla}\times\vec{Z}(\vec{r}_\alpha))_i (\vec{B}(\vec{r}_\beta))_j \, S_{\alpha k}\gamma_\alpha\gamma_\beta$$

$$= \sum_\alpha \frac{\gamma_\alpha^2}{2} [\vec{\nabla}\times\vec{Z}(\vec{r}_\alpha)]\cdot[\vec{B}(\vec{r}_\alpha)\times\vec{S}_\alpha]$$

$$= \sum_\alpha \frac{\gamma_\alpha^2}{2} \vec{S}_\alpha \cdot \left[(\vec{\nabla}\times\vec{Z}(\vec{r}_\alpha)) \times \vec{B}(\vec{r}_\alpha) \right] \qquad (2.23)$$

Terme à 2 photons, quadratique en a et a^+.

Couplage avec un champ magnétique statique $\vec{B}_0$

Il faut ajouter à l'hamiltonien H donné en (2.1)

$$H_S = -\sum_\alpha \gamma_\alpha \vec{S}_\alpha \cdot \vec{B}_0 \tag{2.24}$$

H_S est d'ordre 1 en γ_α et d'ordre 1 vis à vis des courants extérieurs créant $\vec{B}_0$.

Transformé de H_S par $T = \exp(iF_S/\hbar)$

$$T H_S T^+ = e^{iF_S/\hbar} H_S e^{-iF_S/\hbar}$$
$$= H_S + \left[\frac{iF_S}{\hbar}, H_S\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{iF_S}{\hbar}, \left[\frac{iF_S}{\hbar}, H_S\right]\right] + \cdots \tag{2.25}$$

Terme $\left[\frac{iF_S}{\hbar}, H_S\right]$ D'après (2.11) et (2.24)

$$\left[\frac{iF_S}{\hbar}, H_S\right] = \frac{i}{\hbar}\sum_\alpha\sum_\beta \left[\gamma_\alpha \vec{S}_\alpha \cdot (\vec{\nabla}\times\vec{Z}(\vec{r}_\alpha)), -\gamma_\beta \vec{S}_\beta\cdot\vec{B}_0\right]$$
$$= -\frac{i}{\hbar}\sum_\alpha\sum_\beta\sum_i\sum_j \gamma_\alpha\gamma_\beta \underbrace{\left[S_{\alpha i}, S_{\beta j}\right]}_{i\hbar\sum_k \varepsilon_{ijk}\delta_{\alpha\beta}S_{\alpha k}} (\vec{\nabla}\times\vec{Z}(\vec{r}_\alpha))_i B_{0j}$$
$$= \sum_\alpha \gamma_\alpha^2 (\vec{B}_0\times\vec{S}_\alpha)\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{Z}(\vec{r}_\alpha)) \tag{2.26}$$

Nouvel hamiltonien d'interaction à 1 photon (linéaire en a et a^+)

Manifestement lié à la précession du spin autour de $\vec{B}_0$.
Le spin ne peut rayonner et émettre de photons réels que parce qu'il tourne autour de $\vec{B}_0$ et est donc accéléré.

Terme $\frac{1}{2}\left[\frac{iF_S}{\hbar}, \left[\frac{iF_S}{\hbar}, H_S\right]\right]$. D'après (2.11) et (2.26),

$$\frac{1}{2}\left[\frac{iF_S}{\hbar}, \left[\frac{iF_S}{\hbar}, H_S\right]\right] = \frac{1}{2}\sum_\alpha\sum_\beta \frac{i\gamma_\alpha}{\hbar}\gamma_\beta^2 \left[\vec{S}_\alpha\cdot\vec{\nabla}\times\vec{Z}(\vec{r}_\alpha), (\vec{B}_0\times\vec{S}_\beta)\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{Z}(\vec{r}_\beta))\right] \tag{2.27}$$

- Comme $\vec{\nabla}\times\vec{Z}(\vec{r}_\alpha)$ commute avec $\vec{\nabla}\times\vec{Z}(\vec{r}_\beta)$, le commutateur (2.27) ne fait intervenir que les commutateurs entre $\vec{S}_\alpha$ et $\vec{S}_\beta$ qui sont nuls si $\alpha\neq\beta$
- Contribution du spin α à (2.27)

$$\frac{i\gamma_\alpha^3}{2\hbar}\left[\vec{S}_\alpha\cdot\vec{\nabla}\times\vec{Z}(\vec{r}_\alpha), (\vec{B}_0\times\vec{S}_\alpha)\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{Z}(\vec{r}_\alpha))\right] \tag{2.28}$$

$$\left[S_{\alpha i}, (\vec{B}_0\times\vec{S}_\alpha)_j\right] = \sum_{k\ell}\varepsilon_{jk\ell}B_{0k}\left[S_{\alpha i}, S_{\alpha\ell}\right] = i\hbar\sum_{k\ell n}\varepsilon_{jk\ell}\varepsilon_{i\ell n}B_{0k}S_{\alpha n}$$
$$= i\hbar\sum_{kn}\left[\delta_{jn}\delta_{ik} - \delta_{ij}\delta_{nk}\right]S_{\alpha n}B_{0k} = -i\hbar\left[\delta_{ij}\vec{S}_\alpha\cdot\vec{B}_0 - B_{0i}S_{\alpha j}\right] \tag{2.29}$$

- Contribution du spin α à (2.27)

$$\frac{\gamma_\alpha^3}{2}\sum_{ij}(\vec{\nabla}\times\vec{Z}(\vec{r}_\alpha))_i(\vec{\nabla}\times\vec{Z}(\vec{r}_\alpha))_j\left[\delta_{ij}\vec{S}_\alpha\cdot\vec{B}_0 - S_{\alpha j}B_{0i}\right] \tag{2.30}$$

– Valeur moyenne dans le vide de l'opérateur à 2 photons de (2.30)

$$<0|(\vec{\nabla}\times\vec{Z}(\vec{r}_\alpha))_i\,(\vec{\nabla}\times\vec{Z}(\vec{r}_\alpha))_j\,|0> =$$

$$= \int d^3k\,d^3k'\,\frac{1}{c^2}\,\frac{\hbar}{2\varepsilon_0(2\pi)^3\sqrt{\omega\omega'}}\sum_{\vec{\varepsilon}}\sum_{\vec{\varepsilon}'}(\vec{k}'\times\vec{\varepsilon}')_i\,(\vec{k}\times\vec{\varepsilon})_j\,\delta_{\varepsilon\varepsilon'}\,\delta(\vec{k}-\vec{k}')\,e^{i(\vec{k}'-\vec{k})\cdot\vec{r}_\alpha}$$

$$= \int d^3k\,\frac{\hbar}{2\varepsilon_0(2\pi)^3c^2\omega}\underbrace{\sum_{\vec{\varepsilon}}(\vec{k}\times\vec{\varepsilon})_i\,(\vec{k}\times\vec{\varepsilon})_j}_{=\delta_{ij}-\frac{k_ik_j}{k^2}} = \frac{\hbar k_M^3}{12\varepsilon_0\pi^2c^3}\,\delta_{ij} \qquad (2.31)$$

– Valeur moyenne dans le vide de (2.30)

$$\frac{1}{2}\gamma_\alpha^3\,\frac{\hbar k_M^2}{12\varepsilon_0\pi^2c^3}\sum_{ij}\delta_{ij}\left[\delta_{ij}\,\vec{S}_\alpha\cdot\vec{B}_0 - S_{\alpha j}B_{0i}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\gamma_\alpha^3\,\frac{\hbar k_M^2}{12\varepsilon_0\pi^2c^3}\left[3\,\vec{S}_\alpha\cdot\vec{B}_0 - S_{\alpha z}B_0\right] = \frac{\gamma_\alpha^3\hbar k_M^2}{12\varepsilon_0\pi^2c^3}\,S_{\alpha z}B_0 \qquad (2.32)$$

On a supposé $\vec{B}_0$ parallèle à Oz.

– Combiné avec $H_S = -\gamma_\alpha S_{\alpha z}B_0$, (2.32) donne

$$-\gamma_\alpha\left[1-\frac{\gamma_\alpha^2\hbar k_M^2}{12\varepsilon_0\pi^2c^3}\right]S_{\alpha z}B_0 \qquad (2.33)$$

<u>Discussion physique</u> : le terme correctif dans le crochet de (2.33) représente une correction radiative à la fréquence de Larmor du spin $\omega_L = -\gamma_\alpha B_0 = -g_\alpha\frac{q_\alpha}{2m_\alpha}B_0$

$$\omega_L \to \omega_L + \delta\omega_L \qquad (2.34)$$

$$\frac{\delta\omega_L}{\omega_L} = -\frac{\gamma_\alpha^2\hbar k_M^2}{12\varepsilon_0\pi^2c^3} = -\frac{g_\alpha^2}{4}\,\frac{q_\alpha^2\hbar k_M^2}{12\varepsilon_0m_\alpha^2c^3\pi^2} = -\frac{g_\alpha^2}{4}\,\frac{\alpha}{3\pi}\left(\frac{\hbar\omega_M}{m_\alpha c^2}\right)^2 \qquad (2.35)$$

Modification du moment magnétique de spin. Réduction de ce moment magnétique causée par la vibration angulaire du spin dans les fluctuations du vide

<u>Remarque</u> : Effet en $(\hbar\omega_M/m_\alpha c^2)^2$, donc plus petit que $\delta m_{1\alpha}/m_\alpha$ (qui est en $\hbar\omega_M/m_\alpha c^2$), donc plus petit que la variation de la fréquence cyclotron $\omega_c = -q_\alpha B_0/m_\alpha$ d'une particule de charge q_α et de masse m_α tournant dans un champ magnétique

---

<u>Hamiltonien</u> pour des particules non localisées avec spins (sans champ magnétique statique)

$$H = \sum_\alpha\frac{1}{2m_\alpha}\left[\vec{P}_\alpha - q_\alpha\vec{A}_\perp(\vec{r}_\alpha)\right]^2 + \sum_\alpha\varepsilon^\alpha_{Coul} + \sum_\alpha V_e(\vec{r}_\alpha) + H_R$$
$$- \sum_\alpha g_\alpha\frac{q_\alpha}{2m_\alpha}\,\vec{S}_\alpha\cdot\vec{\nabla}\times\vec{A}_\perp(\vec{r}_\alpha) \qquad (3.1)$$

- Éléments nouveaux par rapport à l'hamiltonien du § 1

$\sum_\alpha$ dans la 1ère ligne (plusieurs particules) – Terme d'interaction lié au spin dans la 2ème ligne. Sera noté H_1^{sp}

$$H_1^{sp} = -\sum_\alpha g_\alpha \frac{q_\alpha}{2m_\alpha} \vec{S}_\alpha \cdot \vec{\nabla} \times \vec{A}_\perp(\vec{r}_\alpha) \qquad (3.2)$$

-
$$H = H_0 + H_1 + H_2 \qquad (3.3)$$

$$H_0 = \sum_\alpha \frac{\vec{p}_\alpha^{\,2}}{2m_\alpha} + H_R \qquad (3.4)$$

$$H_1 = H_1^{orb} + H_1^{sp} \qquad (3.5)$$

$$H_1^{orb} = -\sum_\alpha q_\alpha \frac{\vec{p}_\alpha}{m_\alpha} \cdot \vec{A}_\perp(\vec{r}_\alpha) \qquad (3.6)$$

$$H_2 = \sum_\alpha \frac{q_\alpha^2}{2m_\alpha} \vec{A}_\perp^{\,2}(\vec{r}_\alpha) + \sum_\alpha V_e(\vec{r}_\alpha) + \sum_\alpha \varepsilon^\alpha_{Coul} \qquad (3.7)$$

<u>Transformation unitaire</u> $\quad T = e^{iF/\hbar}$

- Comme dans les paragraphes précédents, F doit satisfaire à

$$\left[\frac{iF}{\hbar}, H_0\right] + H_1 = 0 \qquad (3.8)$$

pour que le nouvel hamiltonien THT^+ ne contienne plus de terme d'interaction linéaire en q_α

- Comme $H_1 = H_1^{orb} + H_1^{sp}$, on peut choisir

$$F = F^{orb} + F^{sp} \qquad (3.9)$$

et satisfaire (3.8) au moyen des 2 conditions

$$\left[\frac{iF^{orb}}{\hbar}, H_0\right] + H_1^{orb} = 0 \qquad (3.10)$$

$$\left[\frac{iF^{sp}}{\hbar}, H_0\right] + H_1^{sp} = 0 \qquad (3.11)$$

Nous connaissons déjà la solution de (3.10) qui s'écrit, à l'ordre le plus bas en $p_\alpha/m_\alpha c$ (voir (1.24)) :

$$F^{orb} = \sum_\alpha \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \vec{p}_\alpha \times \vec{Z}(\vec{r}_\alpha) \qquad (3.12)$$

De même, (2.11) représente la solution de (3.11) à l'ordre le plus bas en $p_\alpha/m_\alpha c$

$$F^{sp} = \sum_\alpha g_\alpha \frac{q_\alpha}{2m_\alpha} \vec{S}_\alpha \cdot \vec{\nabla} \times \vec{Z}(\vec{r}_\alpha) \qquad (3.13)$$

<u>Nouvel hamiltonien des particules</u>

- le nouvel hamiltonien à l'ordre 2 en q_α est la somme de H_2 et de

$$\frac{1}{2}\left[\frac{iF}{\hbar}, H_1\right] = \frac{i}{2\hbar}\left[F^{orb} + F^{sp}, H_1^{orb} + H_1^{sp}\right] \qquad (3.14)$$

- Comme F^{orb} et F^{sp} sont, de même que H_1^{orb} et H_1^{sp}, des combinaisons linéaires de a et a^+, les commutateurs $[a, a^+] = 1$ vont faire apparaître dans (3.14) un nouvel hamiltonien de particules

3 types de contributions apparaissent

<u>1ère contribution</u> $$\frac{i}{2\hbar}\left[F^{orb}, H_1^{orb}\right] = \frac{i}{2\hbar}\sum_\alpha\sum_\beta\left[F_\alpha^{orb}, H_{1\beta}^{orb}\right] \qquad (3.15)$$

$\boxed{\alpha=\beta}$ → Correction d'énergie cinétique de la particule α due à la correction de masse $\delta m_{1\alpha}$ (voir § 1 précédent)

$$-\sum_\alpha \frac{\delta m_{1\alpha}}{m_\alpha}\frac{\vec{p}_\alpha^{\,2}}{2m_\alpha} \qquad (3.16)$$

$\boxed{\alpha\neq\beta}$ → Interaction courant-courant étudiée dans le cours

$$-\sum_{\alpha<\beta}\frac{q_\alpha q_\beta}{8\pi\varepsilon_0 m_\alpha m_\beta c^2}\left\{\frac{\vec{p}_\alpha\cdot\vec{p}_\beta}{|\vec{r}_\alpha-\vec{r}_\beta|}+\frac{[\vec{p}_\alpha\cdot(\vec{r}_\alpha-\vec{r}_\beta)][\vec{p}_\beta\cdot(\vec{r}_\alpha-\vec{r}_\beta)]}{|\vec{r}_\alpha-\vec{r}_\beta|^3}\right\} \qquad (3.17)$$

<u>2ème contribution</u> $$\frac{i}{2\hbar}\left[F^{orb}, H_1^{sp}\right]+\frac{i}{2\hbar}\left[F^{sp}, H_1^{orb}\right] \qquad (3.18)$$

Termes croisés spin-orbite

On trouve que les termes $\alpha=\beta$ sont nuls. Les termes $\alpha\neq\beta$ représentent <u>l'interaction spin-autre orbite</u>

Interaction spin β - orbite α

$$-\frac{g_\alpha g_\beta}{2m_\beta c^2}\,\vec{S}_\beta\cdot\vec{\nabla}_\beta\times\left\{\frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\vec{p}_\alpha}{m_\alpha}\frac{q_\alpha}{|\vec{r}_\alpha-\vec{r}_\beta|}+\frac{q_\alpha}{|\vec{r}_\alpha-\vec{r}_\beta|}\frac{\vec{p}_\alpha}{m_\alpha}\right]\right\} \qquad (3.19)$$

<u>3ème contribution</u> $$\frac{i}{2\hbar}\left[F^{sp}, H_1^{sp}\right] = \frac{i}{2\hbar}\sum_\alpha\sum_\beta\left[F_\alpha^{sp}, H_{1\beta}^{sp}\right] \qquad (3.20)$$

$\boxed{\alpha=\beta}$ → Energie propre de spin calculée plus haut (voir (2.22))

$\boxed{\alpha\neq\beta}$ → Interaction dipôle-dipôle + interaction de contact de Fermi calculées plus haut (voir (2.19))

<u>Cohérence du calcul en 1/C</u>

- Les termes obtenus en (3.16), (3.17), (3.19), (2.22), (2.19) sont en $1/c^2$. Comme les expressions de F^{orb} et F^{sp} utilisées pour obtenir ces résultats sont celles d'ordre le plus bas en $1/c$, de tels résultats ne sont pas modifiés par les corrections relativistes en $1/c^2$ à H_0 et H_1

  Les expressions (3.16), (3.17), (3.19), (2.22), (2.19) sont donc correctes

- Par contre, au même ordre en $1/c^2$, il faut ajouter à ces termes les corrections relativistes en $1/c^2$ aux hamiltoniens des particules qui figurent dans H_0 et H_2. Ce sont :

(i) La correction masse-vitesse $$-\sum_\alpha\frac{\vec{p}_\alpha^{\,4}}{8m_\alpha^3c^2} \qquad (3.21)$$

(ii) Le terme de Darwin $$\sum_\alpha\frac{\hbar^2}{8m_\alpha^2c^2}\,\Delta V_e(\vec{r}_\alpha) \qquad (3.22)$$

(iii) Le couplage spin orbite de chaque particule

$$\sum_\alpha\frac{g_\alpha-1}{2m_\alpha c^2}\,\vec{S}_\alpha\cdot\left[\left(\vec{\nabla}_\alpha V_e(\vec{r}_\alpha)\right)\times\frac{\vec{p}_\alpha}{m_\alpha}\right] \qquad (3.23)$$