# La transformation de Pauli-Fierz



## ① Champ transverse "lié" à une particule classique

- Particule libre en mouvement uniforme
- Particule diffusée par un potentiel. Champ lié et champ rayonné.

## ② Détermination de la transformation de Pauli-Fierz pour une particule quantique localisée

- Hypothèses simplificatrices. Approximations.
- Definition approchée adoptée pour le champ lié.
- Conditions imposées sur la transformation unitaire T.
- Calcul de T

## ③ Transformation de quelques observables

- Transformation des champs transverses
- Transformation des variables dynamiques de la particule

---

Particule classique libre  Particule $\alpha$  $(q_\alpha, m_\alpha)$

- Vitesse $\vec{v}_\alpha$ constante : $\vec{r}_\alpha(t) = \vec{r}_\alpha + \vec{v}_\alpha t$  (1.1)
- Equation d'évolution de la variable normale $\alpha_\varepsilon(\vec{k})$ du champ associé à cette particule ( appendice A, (A.27) et (A.28) )

$$\dot{\alpha}_\varepsilon(\vec{k},t) + i\omega\,\alpha_\varepsilon(\vec{k},t) = \frac{i}{\sqrt{2\varepsilon_0\hbar\omega(2\pi)^3}}\, q_\alpha\, \vec{\varepsilon}.\vec{v}_\alpha\, e^{-i\vec{k}.\vec{r}_\alpha(t)} \qquad (1.2)$$

Solution générale de cette équation = solution générale de l'équation sans second membre ( varie en $e^{-i\omega t}$ et représente donc un champ libre ) + solution particulière de l'équation avec second membre.

- Solution particulière correspondant au régime forcé en $\exp(-i\vec{k}.\vec{v}_\alpha t)$ (on remplace, dans (1.2), $\vec{r}_\alpha(t)$ par (1.1) )

$$\beta_\varepsilon(\vec{k},t) = \frac{i\,q_\alpha}{\sqrt{2\varepsilon_0\hbar\omega(2\pi)^3}}\;\frac{\vec{\varepsilon}.\vec{v}_\alpha\, e^{-i\vec{k}.\vec{r}_\alpha(t)}}{i(\omega - \vec{k}.\vec{v}_\alpha)} \qquad (1.3)$$

Represente le champ obtenu quand, partant d'un champ nul à $t=-\infty$, on "branche" lentement le couplage entre la particule et le champ transverse.

$\beta_\varepsilon(\vec{k},t)$ donné en (1.3) représente donc la variable normale du champ transverse créé par la particule et qu'elle entraîne avec elle dans son mouvement uniforme → Champ transverse "lié"

## Introduction de quelques approximations

(i) Ordre 1 en $v_\alpha/c \to 0$. On peut négliger $\vec{k}\cdot\vec{v}_\alpha$ devant $\omega$ au dénominateur de (1.3)

↳
$$\beta_\varepsilon(\vec{k},t) = \frac{q_\alpha}{\omega\sqrt{2\varepsilon_0\hbar\omega(2\pi)^3}}\ \vec{\varepsilon}\cdot\vec{v}_\alpha\ e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}_\alpha(t)} \qquad (1.4)$$

(ii) Si la particule passe près de l'origine, on peut, tant qu'elle reste à une distance $l$ de O telle que $kl \ll 1$ ($l \ll \lambda$), remplacer dans (1.4) $\exp(-i\vec{k}\cdot\vec{r}_\alpha(t))$ par 1

(iii) Remplacement de $\vec{v}_\alpha$ par $[\vec{p}_\alpha - q_\alpha\vec{A}_\perp(\vec{r}_\alpha)]/m_\alpha$

Si on se limite à l'ordre 1 en $q_\alpha$, on peut remplacer $\vec{v}_\alpha$ par $\vec{p}_\alpha/m_\alpha$ dans (1.4)

Avec (ii) et (iii), (1.4) devient

$$\beta_\varepsilon(\vec{k},t) = \frac{q_\alpha}{m_\alpha\omega\sqrt{2\varepsilon_0\hbar\omega(2\pi)^3}}\ \vec{\varepsilon}\cdot\vec{p}_\alpha \qquad (1.5)$$

## Potentiel vecteur transverse associé aux variables normales (1.4)

- Noté $\vec{A}_{\perp P}$, car représente le potentiel vecteur transverse lié à la particule (à l'ordre 1 en $v_\alpha/c$)
- Report de (1.4) dans la formule (A.30) de l'appendice A

$$\vec{A}_{P\perp}(\vec{r},t) = \frac{q_\alpha}{2\varepsilon_0 c^2}\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3k \sum_{\vec{\varepsilon}\perp\vec{k}} \vec{\varepsilon}\,(\vec{\varepsilon}\cdot\vec{v}_\alpha)\,\frac{e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}_\alpha(t))}}{k^2} + \text{c.c.} \qquad (1.6)$$

Représente la partie transverse du potentiel vecteur

$$\vec{A}_P(\vec{r},t) = \frac{q_\alpha\vec{v}_\alpha}{\varepsilon_0 c^2}\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3k\,\frac{e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}_\alpha(t))}}{k^2} = \frac{q_\alpha\,\vec{v}_\alpha}{4\pi\varepsilon_0 c^2|\vec{r}-\vec{r}_\alpha(t)|} \qquad (1.7)$$

On reconnait bien en (1.7) le potentiel vecteur utilisé en électrocinétique pour décrire (au 1er ordre en $v_\alpha/c$) le champ magnétique créé par la particule en mouvement et qu'elle entraîne avec elle.

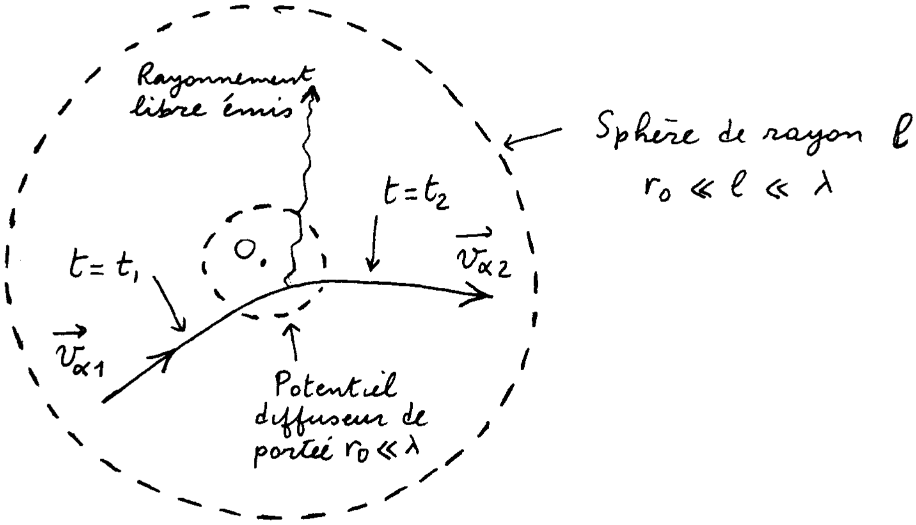
- Si on fait en plus les approximations (ii) et (iii), l'équation (1.6) devient

$$\vec{A}_{P\perp}(\vec{r},t) = \frac{q_\alpha}{\varepsilon_0 m_\alpha c^2}\frac{1}{(2\pi)^3}\int_< d^3k \sum_{\vec{\varepsilon}\perp\vec{k}} \vec{\varepsilon}\,(\vec{\varepsilon}\cdot\vec{p}_\alpha)\,\frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{k^2} \qquad (1.8)$$

On a limité la somme sur $k$ à $k \leq k_M$ avec $k_M l \ll 1$ (notation $\int_<$) de manière à pouvoir faire l'approximation (ii)

# Particule diffusée par un potentiel

## Hypothèses sur la diffusion




- Particule libre arrivant avec la vitesse initiale $\vec{v}_{\alpha 1}$, diffusée par le potentiel, émettant du rayonnement libre, et partant avec la vitesse finale $\vec{v}_{\alpha 2}$.
- On néglige la réaction du rayonnement libre émis par la particule sur son mouvement $\rightarrow$ $\vec{v}_\alpha(t)$ considérée comme une fonction donnée de $t$
- Portée $r_0$ du potentiel petite devant la longueur d'onde des modes considérés. La collision peut se dérouler entièrement dans une sphère de rayon $\ell \ll \lambda$, de sorte qu'on peut, avant ($t \leqslant t_1$) et après ($t \geqslant t_2$) la collision, remplacer $\exp(-i\vec{k}\cdot\vec{r}_\alpha(t))$ par 1.

## Equation du mouvement de la variable normale $\alpha_\varepsilon(\vec{k},t)$

$$\dot{\alpha}_\varepsilon(\vec{k},t) + i\omega\,\alpha_\varepsilon(\vec{k},t) = \frac{i}{\sqrt{2\varepsilon_0 \hbar\omega(2\pi)^3}}\, q_\alpha\, \vec{\varepsilon}\cdot\vec{v}_\alpha(t) \qquad (1.9)$$

- Avant collision ($t \leqslant t_1$) : $\vec{v}_\alpha(t) = \vec{v}_{\alpha 1}$, pas de rayonnement libre

$\hookrightarrow$
$$\alpha_\varepsilon(\vec{k}) = \frac{q_\alpha}{\omega\sqrt{2\varepsilon_0\hbar\omega(2\pi)^3}}\, \vec{\varepsilon}\cdot\vec{v}_{\alpha 1} \qquad (1.10)$$

Champ transverse lié à la particule incidente

- Après collision ($t \geqslant t_2$)

$$\alpha_\varepsilon(\vec{k},t) = \frac{q_\alpha}{\omega\sqrt{2\varepsilon_0\hbar\omega(2\pi)^3}}\, \vec{\varepsilon}\cdot\vec{v}_{\alpha 2} + K\, e^{-i\omega t} \qquad (1.11)$$

Solution particulière de l'équation avec 2ème membre. Représente le champ transverse lié à la particule s'éloignant de O

Solution de l'équation sans 2ème membre. Représente le champ de rayonnement libre émis par la particule au cours de la collision

K : constante d'intégration déterminée par le raccord entre (1.10) et (1.11)

– Intégration de l'équation (1.9) entre $t_1$ et $t_2$

$$\alpha_\varepsilon(\vec{k},t_2) = \alpha_\varepsilon(\vec{k},t_1)\, e^{-i\omega(t_2-t_1)} + \frac{i\,q_\alpha}{\sqrt{2\varepsilon_0\hbar\omega(2\pi)^3}}\int_{t_1}^{t_2} \vec{\varepsilon}\cdot\vec{v}_\alpha(t')\, e^{i\omega(t'-t_2)}\,dt' \qquad (1.12)$$

Intégration par parties du dernier terme de (1.12), puis comparaison avec (1.10) et (1.11)

↳
$$K = -\frac{q_\alpha}{\omega\sqrt{2\varepsilon_0\hbar\omega(2\pi)^3}}\int_{t_1}^{t_2} \vec{\varepsilon}\cdot\vec{\gamma}_\alpha(t')\, e^{i\omega t'}\,dt' \qquad (1.13)$$

où $\vec{\gamma}_\alpha(t') = d\vec{v}_\alpha(t')/dt'$ est l'accélération de la particule

Comme $\vec{\gamma}_\alpha(t') = \vec{0}$ pour $t \leq t_1$ et $t \geq t_2$, on peut dans (1.13) remplacer $\int_{t_1}^{t_2}$ par $\int_{-\infty}^{+\infty}$

↳ Le champ rayonné dans le mode $\vec{k}\vec{\varepsilon}$ est proportionnel à la composante de Fourier à la fréquence $\omega$ de la composante sur $\vec{\varepsilon}$ de l'accélération de la particule.

Récapitulation des résultats : Champ lié et champ rayonné

(i) Le champ rayonné dépend de l'accélération $\vec{\gamma}_\alpha$.

(ii) Le champ transverse lié dépend de $\vec{v}_\alpha$. Il n'est pas le même avant et après la collision.

(iii) Comme le champ lié change au cours de la collision, le champ rayonné n'est pas simplement égal à la variation du champ transverse (total) au cours de la collision

↳ Importance de soustraire le champ transverse lié pour déterminer le champ réellement émis.

---

## Particule quantique localisée

### Hypothèses simplificatrices. Approximations

- 1 seule particule $\alpha$ (généralisation à plusieurs particules plus loin)
- Potentiel extérieur $V_e(\vec{r})$, de portée $r_0 \ll \lambda$
- La particule reste localisée près de O, à une distance de l'ordre de $l \ll \lambda$
- On ne tient compte dans le développement en modes que des modes $k \ll k_M$ avec $k_M l \ll 1$ (approximation des grandes longueurs d'onde) ($\int_< = \int_{k\leq k_M}$)

↳ Hamiltonien en jauge de Coulomb

$$H = \frac{1}{2m_\alpha}\left[\vec{p}_\alpha - q_\alpha\vec{A}_\perp(\vec{0})\right]^2 + \varepsilon^\alpha_{Coul} + q_\alpha V_e(\vec{r}_\alpha) + \int_< d^3k \sum_{\vec{\varepsilon}} \hbar\omega\left[a^+_\varepsilon(\vec{k})a_\varepsilon(\vec{k}) + \tfrac{1}{2}\right] \qquad (2.1)$$

$$A_\perp(\vec{0}) = \int_< d^3k \sum_\varepsilon \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0\omega(2\pi)^3}} \left[\vec{\varepsilon}\, a_\varepsilon(\vec{k}) + \vec{\varepsilon}\, a_\varepsilon^+(\vec{k})\right] \qquad (2.2)$$

<u>Définition approchée adoptée pour le champ lié</u>

- A chaque instant $t$, l'état dynamique d'une particule classique évoluant dans $V_e(\vec{r})$ est caractérisé par $\{\vec{r_\alpha}, \vec{P_\alpha}\}$
A cause de $V_e(\vec{r})$, $\vec{P_\alpha}$ change au cours du temps
- Variable normale du champ transverse lié à une particule en mouvement uniforme et d'état dynamique $\vec{r_\alpha}, \vec{P_\alpha}$ à $t$ (mouvement uniforme "tangent" à $t$ au mouvement réel étudié ici) : $\beta_\varepsilon(\vec{k})$ donné en (1.5)
Potentiel vecteur correspondant donné en (1.8)
- Dans le § 1b précédent, on n'a considéré le champ lié que dans les états asymptotiques ($t \leq t_1$ et $t \geq t_2$) où la particule est libre.
Ici, même lorsque la particule n'est pas libre ($r \leq r_0$), nous prenons (1.5) et (1.8) pour définir le champ lié à la particule d'état dynamique $\vec{r_\alpha}, \vec{P_\alpha}$ (champ lié au mouvement uniforme tangent à chaque instant $t$)
- En théorie quantique, $\vec{r_\alpha}$ et $\vec{P_\alpha}$ deviennent des opérateurs. $\beta_\varepsilon(\vec{k})$ et $\vec{A}_{P\perp}(\vec{r})$ deviennent des opérateurs de particule (ne dépendant que de $\vec{P_\alpha}$).

<u>Conditions imposées sur la transformation unitaire $T$.</u>

$$\begin{array}{ccc} \text{Point de vue (1)} & \text{Transfo unitaire} & \text{Point de vue (2)} \\ \text{Coulomb} & \xrightarrow[TT^+ = T^+T = \mathbb{1}]{} & \text{Pauli - Fierz} \end{array}$$

- Dans le point de vue (1), $a_\varepsilon(\vec{k})$ est un opérateur d'annihilation associé au champ transverse <u>total</u>
- Dans le point de vue (2), au <u>même</u> champ total est associé l'opérateur $T a_\varepsilon(\vec{k}) T^+$.
- Supposons que $T$ soit tel que

$$\begin{cases} T a_\varepsilon(\vec{k}) T^+ = a_\varepsilon(\vec{k}) + \beta_\varepsilon(\vec{k}) = a_\varepsilon(\vec{k}) + \dfrac{q_\alpha\ \vec{\varepsilon}\cdot\vec{P_\alpha}}{m_\alpha\omega\sqrt{2\varepsilon_0\hbar\omega(2\pi)^3}} \\ T a_\varepsilon^+(\vec{k}) T^+ = a_\varepsilon^+(\vec{k}) + \beta_\varepsilon(\vec{k}) = a_\varepsilon(\vec{k}) + \dfrac{q_\alpha\ \vec{\varepsilon}\cdot\vec{P_\alpha}}{m_\alpha\omega\sqrt{2\varepsilon_0\hbar\omega(2\pi)^3}} \end{cases} \qquad (2.3)$$

Au champ total est (alors) associé dans le point de vue (2) l'opérateur $a_\varepsilon(\vec{k}) + \beta_\varepsilon(\vec{k})$. Comme, avec la définition prise plus haut, $\beta_\varepsilon(\vec{k})$ représente le champ lié (on verra plus loin que cette propriété reste valable dans le point de vue (2)), on en déduit que, dans le point de vue (2), $a_\varepsilon(\vec{k})$ est associé au champ libre (champ total - champ lié)

## Calcul de $T$

- Les opérateurs $\beta_\varepsilon(\vec{k})$, $\beta_{\varepsilon'}(\vec{k}')$ ... commutent entre eux (puisqu'ils ne dépendent que de l'opérateur atomique $\vec{p}_\alpha$) et commutent avec les opérateurs de rayonnement $a_\varepsilon$ et $a_\varepsilon^+$.
- La transformation $a_\varepsilon \to a_\varepsilon + \beta_\varepsilon$, $a_\varepsilon^+ \to a_\varepsilon^+ + \beta_\varepsilon$ conserve donc les relations de commutation entre les $a$ et $a^+$. C'est donc bien une transformation unitaire $T$ qui est une translation des $a$ et $a^+$, donnée par

$$T = \exp\left\{\int_< d^3k \sum_{\vec{\varepsilon}} \beta_\varepsilon(\vec{k})\left[a_\varepsilon(\vec{k}) - a_\varepsilon^+(\vec{k})\right]\right\} \tag{2.4}$$

Pour démontrer que (2.4) redonne bien (2.3), il suffit d'utiliser l'identité de Glauber

$$e^{A+B} = e^A e^B e^{-\frac{1}{2}[A,B]} \tag{2.5}$$

valable si $A$ et $B$ commutent avec $[A,B]$, et l'identité

$$[a, f(a^+)] = \frac{\partial f(a^+)}{\partial a^+} \tag{2.6}$$

## Autre expression de $T$

- Comme $\beta_\varepsilon(\vec{k})$ est proportionnel à $\vec{p}_\alpha$, on peut mettre $\vec{p}_\alpha$ en facteur dans l'argument de l'exponentielle de (2.4)

↳
$$T = \exp\left[\frac{i}{\hbar}\frac{q_\alpha}{m_\alpha}\vec{p}_\alpha \cdot \vec{Z}(\vec{0})\right] \tag{2.7}$$

où
$$\vec{Z}(\vec{r}) = \int_< d^3k \sum_{\vec{\varepsilon}} \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 \omega (2\pi)^3}}\left[\vec{\varepsilon}\,\frac{a_\varepsilon(\vec{k})}{i\omega} e^{i\vec{k}.\vec{r}} - \vec{\varepsilon}\,\frac{a_\varepsilon^+(\vec{k})}{i\omega} e^{-i\vec{k}.\vec{r}}\right] \tag{2.8}$$

est un opérateur champ, appelé parfois "vecteur de Hertz"

- Pour le champ libre, $\dot{a} = -i\omega a$, $\dot{a}^+ = i\omega a^+$, de sorte que

$$\begin{aligned}\dot{\vec{Z}}(\vec{r}) &= -\int_< d^3k \sum_{\vec{\varepsilon}} \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0\omega(2\pi)^3}}\left[\vec{\varepsilon}\,a_\varepsilon(\vec{k})e^{i\vec{k}.\vec{r}} + \vec{\varepsilon}\,a_\varepsilon^+(\vec{k})\,e^{-i\vec{k}.\vec{r}}\right] \\ &= -\vec{A}_\perp(\vec{r})\end{aligned} \tag{2.9}$$

Pour le champ libre, $\vec{Z}$ est donc pour $\vec{A}_\perp$ ce que $\vec{A}_\perp$ est pour $\vec{E}_\perp$ ($\dot{\vec{A}}_\perp = -\vec{E}_\perp$).

---

## Transformation du potentiel vecteur transverse

- L'opérateur mathématique

$$\vec{A}_\perp(\vec{r}) = \int_< d^3k \sum_{\vec{\varepsilon}} \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0\omega(2\pi)^3}}\left[\vec{\varepsilon}\,a_\varepsilon(\vec{k})e^{i\vec{k}.\vec{r}} + \vec{\varepsilon}\,a_\varepsilon^+(\vec{k})e^{-i\vec{k}.\vec{r}}\right] \tag{2.10}$$

représente dans le point de vue (1) le potentiel vecteur transverse

$$\vec{A}_\perp(\vec{r}) = \vec{A}_\perp^{(1)}(\vec{r}) \tag{2.11}$$

– Dans le point de vue (2), l'opérateur représentant le potentiel vecteur transverse, noté $\vec{A}_\perp^{(2)}$ est le transformé de $\vec{A}^{(1)}$ par $T$

$$\vec{A}_\perp^{(2)}(\vec{r}) = T\,\vec{A}_\perp^{(1)}(\vec{r})\,T^+ \tag{2.12}$$

D'après (2.3) (2.10 et (2.11)

$$\vec{A}_\perp^{(2)}(\vec{r}) = \vec{A}_\perp(\vec{r}) + \vec{A}_{\perp P}(\vec{r}) \tag{2.13}$$

où $\vec{A}_{\perp P}(\vec{r})$ est l'opérateur obtenu en remplaçant dans (2.10) $a_\varepsilon$ par $\beta_\varepsilon$ et $a_\varepsilon^+$ par $\beta_\varepsilon^+$, c'est à dire encore (1.8).

– L'opérateur (1.8) représente dans le point de vue (1) le potentiel vecteur transverse lié

$$\vec{A}_{\perp P}(\vec{r}) = \vec{A}_{\perp P}^{(1)}(\vec{r}) \tag{2.14}$$

Comme $T$ commute avec $\vec{p}_\alpha$, et donc avec $\vec{A}_{\perp P}$

$$\vec{A}_{\perp P}^{(2)}(\vec{r}) = T\,\vec{A}_{\perp P}^{(1)}(\vec{r})\,T^+ = \vec{A}_{\perp P}^{(1)}(\vec{r}) = \vec{A}_{\perp P}(\vec{r}) \tag{2.15}$$

– On peut donc écrire (2.13) sous la forme

$$\vec{A}_\perp(\vec{r}) = \vec{A}_\perp^{(2)}(\vec{r}) - \vec{A}_{\perp P}(\vec{r}) = \vec{A}_\perp^{(2)}(\vec{r}) - \vec{A}_{\perp P}^{(2)}(\vec{r}) \tag{2.16}$$

Dans le point de vue (2), l'opérateur $\vec{A}_\perp(\vec{r})$ écrit en (2.10) représente donc le potentiel vecteur total moins le potentiel vecteur lié, c'est à dire le potentiel vecteur libre.

## Transformation du champ electrique transverse

$$\vec{E}_\perp(\vec{r}) = i\int_< d^3k \sum_{\vec{\varepsilon}} \left[\vec{\varepsilon}\, a_\varepsilon(\vec{k})\, e^{i\vec{k}.\vec{r}} - \vec{\varepsilon}\, a_\varepsilon^+(\vec{k})\, e^{-i\vec{k}.\vec{r}}\right] = \vec{E}_\perp^{(1)}(\vec{r}) \tag{2.17}$$

$$\hookrightarrow \quad \vec{E}_\perp^{(2)}(\vec{r}) = T\,\vec{E}_\perp^{(1)}(\vec{r})\,T^+ = \vec{E}_\perp(\vec{r}) + \vec{E}_{\perp P}(\vec{r}) \tag{2.18}$$

où

$$\vec{E}_{\perp P}(\vec{r}) = i\int_< d^3k \left[\vec{\varepsilon}\,\beta_\varepsilon(\vec{k})\, e^{i\vec{k}.\vec{r}} - \vec{\varepsilon}\,\beta_\varepsilon(\vec{k})\, e^{-i\vec{k}.\vec{r}}\right] = \vec{0} \tag{2.19}$$

Interprétation : le champ electrique transverse lié est d'ordre 2 en $v_\alpha/c$, et n'apparait donc pas dans le calcul d'ordre 1 fait ici.

---

## Transformation de la position de la particule

– Dans le point de vue (1), la position de la particule $\alpha$, notée $\vec{r}_\alpha^{(1)}$, est représentée par l'opérateur $\vec{r}_\alpha$ (multiplication par $\vec{r}_\alpha$)

$$\vec{r}_\alpha^{(1)} = \vec{r}_\alpha \tag{2.20}$$

– Dans le point de vue (2), la position de la particule $\alpha$, notée $\vec{r}_\alpha^{(2)}$, est représentée par

$$\vec{r}_\alpha^{(2)} = T\,\vec{r}_\alpha^{(1)}\,T^+ = T\,\vec{r}_\alpha\,T^+ \tag{2.21}$$

- Comme $\vec{p}_\alpha$ commute avec $\vec{Z}(\vec{0})$ dans (2.7), $T$ est aussi un opérateur de translation pour $\vec{r}_\alpha$

$$T\,\vec{r}_\alpha\,T^+ = \vec{r}_\alpha + \frac{q_\alpha}{m_\alpha}\,\vec{Z}(\vec{0}) \tag{2.22}$$

$$\hookrightarrow \qquad \vec{r}_\alpha^{\,(2)} = \vec{r}_\alpha + \frac{q_\alpha}{m_\alpha}\,\vec{Z}(\vec{0}) \tag{2.23}$$

Le dernier terme de (2.23) a la même forme dans les 2 points de vue puisque $\vec{Z}(\vec{0})$ commute avec $T$ et sera noté $\vec{\xi}_\alpha$

$$\vec{\xi}_\alpha = \frac{q_\alpha}{m_\alpha}\,\vec{Z}(\vec{0}) = \vec{\xi}_\alpha^{\,(1)} = \vec{\xi}_\alpha^{\,(2)} \tag{2.24}$$

- Interprétation de $\vec{\xi}_\alpha$.
  A l'ordre le plus bas en $q_\alpha$, on ne peut considérer que le champ libre pour calculer $\quad m_\alpha \ddot{\vec{\xi}}_\alpha = q_\alpha \ddot{\vec{Z}}(\vec{0})$
  Or, pour le champ libre, d'après (2.9)

$$m_\alpha \ddot{\vec{\xi}}_\alpha = q_\alpha \ddot{\vec{Z}}(\vec{0}) = -q_\alpha \dot{\vec{A}}_\perp(\vec{0}) = q_\alpha \vec{E}_\perp(\vec{0}) \tag{2.25}$$

$\vec{\xi}_\alpha$ représente donc le mouvement de vibration de la particule si elle n'était soumise qu'au champ libre (champ incident, fluctuations du vide).

- Dans le point de vue (2), l'opérateur $\vec{r}_\alpha$ s'écrit d'après (2.23), (2.24)

$$\vec{r}_\alpha = \vec{r}_\alpha^{\,(2)} - \xi_\alpha = \vec{r}_\alpha^{\,(2)} - \xi_\alpha^{(2)} \tag{2.26}$$

et représente donc la <u>position "moyenne"</u> autour de laquelle la particule effectue le mouvement de vibration $\vec{\xi}_\alpha^{\,(2)}$. Cette position moyenne sera notée $\vec{r}_\alpha^{\,\prime(2)}$

$$\vec{r}_\alpha = \vec{r}_\alpha^{\,\prime(2)} \tag{2.27}$$

## <u>Transformation de l'impulsion de la particule</u>

- Comme $\vec{p}_\alpha$ commute avec $T$

$$\vec{p}_\alpha = \vec{p}_\alpha^{\,(1)} = \vec{p}_\alpha^{\,(2)} \tag{2.28}$$

- Nous verrons plus loin, après avoir calculé l'hamiltonien total $H^{(2)}$ dans le point de vue (2) que

$$m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha^{\,\prime(2)} = \frac{1}{i\hbar}\left[\vec{r}_\alpha^{\,\prime(2)}, H^{(2)}\right] = \frac{1}{i\hbar}\left[\vec{r}_\alpha, H^{(2)}\right] = \vec{p}_\alpha = \vec{p}_\alpha^{\,(2)} \tag{2.29}$$

$\vec{p}_\alpha / m_\alpha$ représente donc, dans le point de vue (2), la <u>vitesse du mouvement moyen</u> de la particule.

---

<u>Références</u>


- W. Pauli and M. Fierz, Nuovo Cimento <u>15</u>, 167 (1938)
- "Photons et Atomes - Les processus d'interaction"
  Tome II, Complément $B_{II}$
  C.C-T, J. Dupont-Roc, G. Grynberg
  Interéditions - Editions du CNRS, à paraître en 1988