

Etude de quelques applications de la transformation de Pauli-Fierz

V-1

① Rayonnement de freinage d'une charge q_α dans un potentiel extérieur V_e ("Bremsstrahlung")

- a) Bilan d'énergie et d'impulsion
- b) Amplitude d'émission d'un photon à l'ordre 1 en V_e et 1 en q_α
- c) Forme de l'amplitude d'émission pour des photons émis de très basse fréquence.
- d) Probabilité d'émission par unité de temps. Section efficace

② Corrections radiatives à la diffusion par un potentiel V_e

- a) Identification des termes correctifs à l'ordre 1 en V_e et 2 en q_α
- b) Calcul de ces termes correctifs
- c) Corrections à la section efficace de diffusion élastique

③ La "catastrophe infrarouge". Etude à l'ordre le plus bas en q_α

- a) Divergences à basse fréquence des probabilités de transition calculées plus haut.
- b) Reexamen des grandeurs mesurées expérimentalement compte tenu de la sensibilité des détecteurs
- c) Disparition des divergences pour les grandeurs significatives expérimentalement.

Bilan d'énergie (potentiel V_e indépendant du temps)

Etat initial Particule $E_1 = \vec{p}_1^2 / 2m_\alpha$, $\vec{p}_1$

Etat final Particule $E_2 = \vec{p}_2^2 / 2m_\alpha$, $\vec{p}_2$
 + Photon $\vec{k} E$ $E = \hbar \omega$ $\vec{p} = \hbar \vec{k}$

Conservation de l'énergie $E_1 = E_2 + \hbar \omega$ (1.1)

De (1.1), on déduit, comme E_2 est positif

$$\hbar \omega \leq E_1 \rightarrow \hbar |\vec{k}| \leq \frac{p_1^2}{2m_\alpha c} = p_1 \frac{v_1}{2c} \ll |\vec{p}_1| \quad (1.2)$$

A la limite non relativiste pour les particules, on peut donc négliger l'impulsion du photon devant celle des particules

A cause de V_e , il n'y a plus conservation globale de l'impulsion : $\vec{P}_1 \neq \vec{P}_2 + \hbar \vec{k}$

L'impulsion perdue par la particule

$$\vec{P}_1 - \vec{P}_2 = \hbar \vec{\varphi}$$

(l'impulsion emportée par le photon) (1.3)

est encaissé par le potentiel extérieur puisque $\hbar \vec{k}$ est négligeable

Illustration sur une figure (à 1 dimension, $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{k}$ étant parallèles ou antiparallèles)

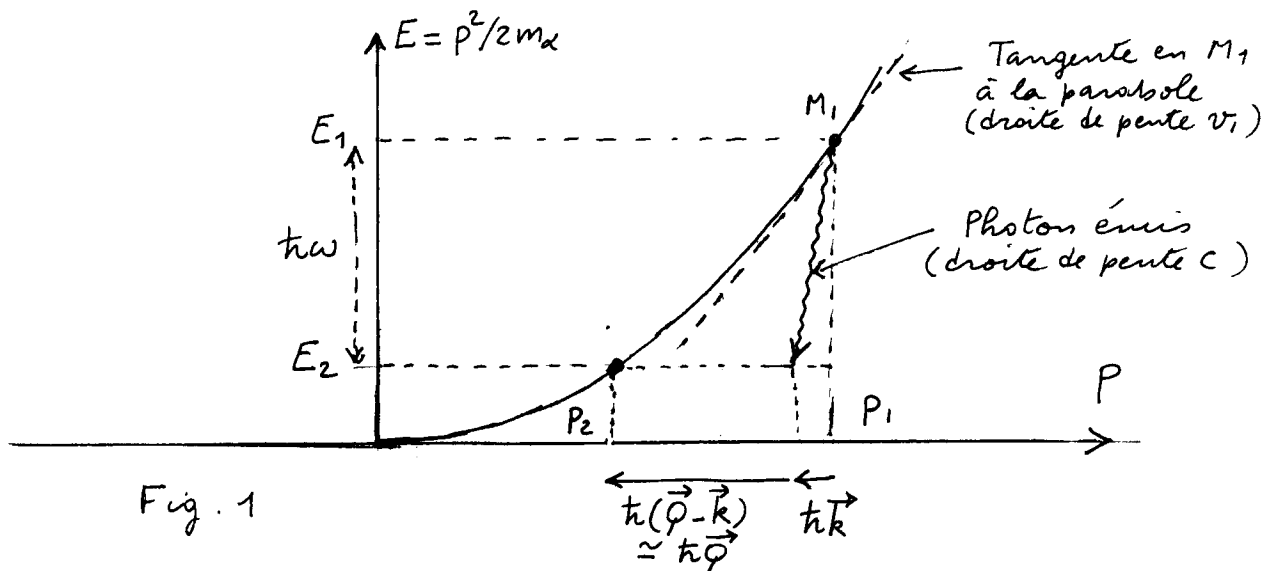


Fig. 1

L'énergie perdue par la particule est transformée en rayonnement.

L'impulsion perdue par la particule est pratiquement totalement encaissée, par le potentiel puisque l'impulsion du rayonnement émis est négligeable.

Amplitude d'émission d'un photon dans le point de vue Pauli-Fierz

- Hamiltonien d'interaction . Proviens de $V_e(\vec{r}_\alpha + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \vec{Z}(\vec{0})) =$

$$V_e(\vec{r}_\alpha + \vec{S}_\alpha) = V_e(\vec{r}_\alpha) + \underbrace{\vec{S}_\alpha \cdot \vec{\nabla} V_e(\vec{r}_\alpha)}_{H_{I1}^{PF}} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \sum_{\alpha,\beta} \underbrace{\vec{S}_{\alpha i} \vec{S}_{\beta j} \nabla_i \nabla_j V_e(\vec{r}_\alpha)}_{H_{I2}^{PF}} + \dots (1.4)$$

avec $\vec{S}_\alpha = \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \vec{Z}(\vec{0})$ (1.5)

- Le terme d'interaction à 1 photon H_{I1}^{PF} du point de vue de Pauli-Fierz relie l'état initial $|\Psi_{in}\rangle = |\vec{P}_1; 0\rangle$, d'énergie $E_{in} = E_1$ à l'état final $|\Psi_{fin}\rangle = |\vec{P}_2; \vec{k}, \vec{E}\rangle$ d'énergie $E_2 + \hbar\omega$

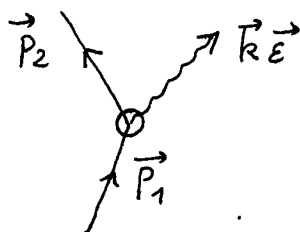


Fig. 2

Le rond symbolise l'élément de matrice de H_{I1}^{PF}

Ordre 1 en V_e et 1 en q_α

- Calcul de l'élément de matrice de H_{I1}^{PF}

V-3

$$\langle \vec{p}_2; \vec{k} \vec{\epsilon} | H_{I1}^{PF} | \vec{p}_1; 0 \rangle = \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \langle \vec{k} \vec{\epsilon} | \vec{Z}(\vec{0}) | 0 \rangle \cdot \langle \vec{p}_2 | \vec{\nabla} V_e | \vec{p}_1 \rangle \quad (1.6)$$

(Etats de la particule et du photon discrétisés dans un cube L^3)

$$\langle \vec{k} \vec{\epsilon} | \vec{Z}(\vec{0}) | 0 \rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 \omega L^3}} \langle \vec{k} \vec{\epsilon} | \frac{\vec{E} \cdot \vec{a}^\dagger \vec{k} \vec{\epsilon}}{-i\omega} | 0 \rangle = i \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 \omega^3 L^3}} \vec{\epsilon} \quad (1.7)$$

$$\langle \vec{p}_2 | \vec{\nabla} V_e | \vec{p}_1 \rangle = \int d^3r \frac{e^{-i\vec{p}_2 \cdot \vec{r}/\hbar}}{\sqrt{L^3}} \vec{\nabla} V_e(\vec{r}) \frac{e^{i\vec{p}_1 \cdot \vec{r}/\hbar}}{\sqrt{L^3}} = \frac{1}{L^3} \int d^3r e^{i\vec{\Phi} \cdot \vec{r}} \vec{\nabla} V_e(\vec{r}) \quad (1.8)$$

Or, d'après les propriétés de la transformée de Fourier

$$\int d^3r e^{i\vec{\Phi} \cdot \vec{r}} \vec{\nabla} V_e(\vec{r}) = -i\vec{\Phi} V_e(\vec{\Phi}) \quad (1.9.a)$$

$$\text{ou } V_e(\vec{\Phi}) = \int d^3r e^{i\vec{\Phi} \cdot \vec{r}} V_e(\vec{r}) \quad (1.9.b)$$

$$\hookrightarrow \langle \vec{p}_2 | \vec{\nabla} V_e | \vec{p}_1 \rangle = -\frac{i}{L^3} \vec{\Phi} V_e(\vec{\Phi}) \quad (1.10)$$

Finalement

$$\langle \vec{p}_2; \vec{k} \vec{\epsilon} | H_{I1}^{PF} | \vec{p}_1; 0 \rangle = \frac{1}{L^3} V_e(\vec{\Phi}) \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 \omega^3 L^3}} \vec{\epsilon} \cdot \vec{\Phi} \quad (1.11)$$

- Amplitude de transition (associée au processus de la figure 2)

$$\mathcal{A}(\vec{p}_1 \rightarrow \vec{p}_2 + \vec{k} \vec{\epsilon}) = -2\pi i \delta^{(T)}(E_1 - E_2 - \hbar\omega) \frac{1}{L^3} V_e(\vec{\Phi}) \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 \omega^3 L^3}} \vec{\epsilon} \cdot \vec{\Phi} \quad (1.12)$$

Remarque. Le calcul peut être aussi fait dans le point de vue de Coulomb. On peut vérifier que les termes d'ordre 2 du développement de Born, associés aux 2 diagrammes 6a et 6b de la page II-3, redonnent bien l'amplitude (1.12). Mais il faut alors faire un calcul d'ordre 2 alors que le point de vue de Pauli-Fierz permet ici d'obtenir le résultat dès l'ordre 1.

Limite des très basses fréquences ($\hbar\omega \ll E_1$)

- Si le photon émis a une fréquence ω très faible devant $E_1/\hbar$

$$E_2 = E_1 - \hbar\omega \simeq E_1 \quad (1.13)$$

$$\text{et par suite } |\vec{p}_2| \simeq |\vec{p}_1| \quad (1.14)$$

Pour une direction donnée $\vec{n}_2 = \vec{p}_2/p_2$ de la particule diffusée, on peut alors considérer que $\vec{p}_1 - \vec{p}_2 = \hbar\vec{\Phi}$ ne dépend plus du photon $\vec{k} \vec{\epsilon}$ émis et a la même valeur que pour une diffusion purement élastique (sans émission de photons)

Pour $\vec{p}_1$ et $\vec{n}_2 = \vec{p}_2/p_2$ fixes

$$(\vec{\Phi})_{\text{inelastique}} \simeq (\vec{\Phi})_{\text{élastique}} \simeq \frac{\vec{p}_1 - \vec{p}_2}{\hbar} \quad (1.15)$$

avec $\hbar\omega \ll E_1$

- Or l'amplitude de diffusion élastique $\vec{p}_1 \rightarrow \vec{p}_2$ vaut à l'ordre 1 en V_e et 0 en q_α

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{el}^{(0)}(\vec{p}_1 \rightarrow \vec{p}_2) &= -2\pi i \delta^{(T)}(E_2 - E_1) \langle \vec{p}_2 | V_e | \vec{p}_1 \rangle \\ &= -2\pi i \delta^{(T)}(E_2 - E_1) \frac{1}{L^3} V_e(\vec{\phi}_{el}) \end{aligned} \quad (1.16)$$

- Comparons alors (1.12) et (1.16). Si $\hbar\omega$ est suffisamment faible, on peut négliger la différence entre $\delta^{(T)}(E_1 - E_2 - \hbar\omega)$ et $\delta^{(T)}(E_1 - E_2)$, de même que la différence entre $\vec{\phi} = (\vec{\phi})_{inel}$ qui figure dans (1.12) et $\vec{\phi}_{el}$ qui figure dans (1.16). On obtient alors

Si $\hbar\omega \ll E_1$

$$\mathcal{A}(\vec{p}_1 \rightarrow \vec{p}_2 + \vec{k}\vec{E}) = \mathcal{A}_{el}^{(0)}(\vec{p}_1 \rightarrow \vec{p}_2) q_\alpha \eta_1(\vec{k}, \vec{E}) \quad (1.17)$$

où

$$q_\alpha \eta_1(\vec{k}, \vec{E}) = \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 \omega^3 L^3}} \vec{E} \cdot \vec{\phi}_{el} \quad (1.18)$$

Ainsi, l'amplitude d'émission d'un photon de très basse fréquence, la particule passant de $\vec{p}_1$ à $\vec{p}_2$ est proportionnelle à l'amplitude de diffusion élastique $\vec{p}_1 \rightarrow \vec{p}_2$ calculée à l'ordre 0 en q_α . (particule soumise au seul potentiel V_e)

Probabilité de transition $\vec{p}_1 \rightarrow \vec{p}_2 + \vec{k}\vec{E}$ par unité de temps

$$[\delta^{(T)}(E_{in} - E_{fin})]^2 = \frac{1}{\pi^2} \frac{\sin^2(E_{in} - E_{fin})T/2\hbar}{(E_{in} - E_{fin})^2} \simeq \frac{T}{2\pi\hbar} \delta^{(T)}(E_{in} - E_{fin}) \quad (1.19)$$

$$\begin{aligned} W(\vec{p}_1 \rightarrow \vec{p}_2 + \vec{k}\vec{E}) &= \frac{|\mathcal{A}(\vec{p}_1 \rightarrow \vec{p}_2 + \vec{k}\vec{E})|^2}{T} \\ &= \frac{2\pi}{\hbar} \delta^{(T)}(E_1 - E_2 - \hbar\omega) \frac{|V_e(\vec{\phi})|^2}{L^6} \frac{q_\alpha^2}{m_\alpha^2} \frac{\hbar}{2\varepsilon_0 \omega^3 L^3} (\vec{E} \cdot \vec{\phi})^2 \end{aligned} \quad (1.20)$$

- Sommation sur les états finaux du photon

Nombre d'états dans l'angle solide $d\Omega$ autour de $\vec{k} = \vec{k}/k$ et dans l'intervalle $[\omega, \omega + d\omega]$, avec la polarisation $\vec{E}$

$$\frac{L^3}{(2\pi)^3} k^2 dk d\Omega = \frac{L^3}{(2\pi)^3} \frac{1}{c^3} \omega^2 d\omega d\Omega \quad (1.21)$$

- Sommation sur les états finaux de la particule

$$E_2 = p_2^2 / 2m_\alpha \quad m_\alpha dE_2 = p_2 dp_2$$

Nombre d'états dans l'angle solide $d\Omega_2$ autour de $\vec{n}_2 = \vec{p}_2/p_2$ et dans l'intervalle d'énergie $[E_2, E_2 + dE_2]$

$$\frac{L^3}{(2\pi)^3} k_2^2 dk_2 d\Omega_2 = \frac{L^3}{(2\pi\hbar)^3} p_2^2 dp_2 d\Omega_2 = \frac{L^3}{(2\pi)^3} \frac{m_\alpha p_2}{\hbar^3} dE_2 d\Omega_2 \quad (1.22)$$

- Probabilité de transition par unité de temps pour que la particule soit diffusée dans $d\Omega_2$, $d\Omega_2$ avec émission d'un photon de polarisation $\vec{E}$ dans $d\omega$, $d\Omega$.

Intégrale de $W(\vec{p}_1 \rightarrow \vec{p}_2 + \vec{k} \vec{E})$ dans le volume correspondant : La fonction $\delta(\tau)$ fait disparaître l'intégrale sur E_2 à condition de remplacer E_2 par $E_1 - \hbar\omega$. Il vient

$$dW(\vec{p}_1 \rightarrow \vec{p}_2 + \vec{k} \vec{E}) = \frac{2\pi}{\hbar} \frac{|\psi_e(\vec{\phi})|^2}{L^6} \frac{q_\alpha^2}{m_\alpha^2} \frac{\hbar}{2\epsilon_0 \omega^3 L^3} (\vec{E} \cdot \vec{\phi})^2 \frac{L^3 m_\alpha p_2}{(2\pi)^3 \hbar^3} \frac{L^3}{(2\pi)^3} \frac{1}{c^3} \omega^2 d\Omega_2 d\omega d\Omega \quad (1.23)$$

c'est à dire encore

$$dW(\vec{p}_1 \rightarrow \vec{p}_2 + \vec{k} \vec{E}) = \frac{\mathcal{C}}{L^3} \frac{q_\alpha^2}{m_\alpha} (\vec{E} \cdot \vec{\phi})^2 |\psi_e(\vec{\phi})|^2 p_2 \frac{d\omega}{\omega} d\Omega d\Omega_2 \quad (1.24)$$

où
$$\mathcal{C} = \frac{1}{(2\pi)^5} \frac{1}{2\epsilon_0 \hbar^3 c^3} \quad (1.25)$$

Section efficace différentielle de diffusion avec émission d'un photon $\vec{k} \vec{E}$

- Flux incident
$$\Phi_{inc} = \frac{p_i}{m_\alpha} \frac{1}{L^3} \quad (1.26)$$

- Section efficace

$$d\sigma(\vec{p}_1 \rightarrow \vec{p}_2 + \vec{k} \vec{E}) = \frac{dW(\vec{p}_1 \rightarrow \vec{p}_2 + \vec{k} \vec{E})}{\Phi_{inc}} = \mathcal{C} q_\alpha^2 (\vec{E} \cdot \vec{\phi})^2 |\psi_e(\vec{\phi})|^2 \frac{p_2}{p_1} \frac{d\omega}{\omega} d\Omega d\Omega_2 \quad (1.27)$$

Plus de dépendance en L comme il se doit pour une grandeur physique comme $d\sigma$

- Cas d'une charge $q_\alpha = Zq$ (q charge du proton) diffusée par le potentiel créé par une charge $Z'q$ à l'origine

$$q_\alpha = Zq \quad (1.28)$$

$$V_e(\vec{r}) = \frac{ZZ'q^2}{4\pi\epsilon_0 r} \rightarrow \psi_e(\vec{\phi}) = \frac{ZZ'q^2}{\epsilon_0 \phi^2} \quad (1.29)$$

$$\hookrightarrow d\sigma(\vec{p}_1 \rightarrow \vec{p}_2 + \vec{k} \vec{E}) = Z^4 Z'^2 \frac{\alpha^3}{\pi^2} \hbar^2 \frac{[\vec{E} \cdot (\vec{p}_1 - \vec{p}_2)]^2}{|\vec{p}_1 - \vec{p}_2|^4} \frac{p_2}{p_1} \frac{d\omega}{\omega} d\Omega d\Omega_2 \quad (1.30)$$

où
$$\alpha = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} = \frac{1}{137}$$

On vérifie que $d\sigma$ est bien homogène à 1 surface

Diffusion élastique $\vec{P}_1 \rightarrow \vec{P}_2$ (sans émission de photons) [V-6]

- Revenons à (1.4)

- $V_e(\vec{r}_\alpha)$ relie l'état initial $|\vec{P}_1; 0\rangle$ à l'état final $|\vec{P}_2; 0\rangle$

↳ Amplitude de diffusion à l'ordre 1 en V_e et 0 en q_α déjà calculée en (1.16)

- H_{I1}^{PF} relie $|\vec{P}_1; 0\rangle$ à $|\vec{P}_2; 0\rangle$ au 2^{ème} ordre (création d'un photon $\vec{k}\vec{\epsilon}$ puis absorption de ce photon)
A l'ordre 1 en V_e , H_{I1}^{PF} n'intervient donc pas

- H_{I2}^{PF} relie directement $|\vec{P}_1; 0\rangle$ à $|\vec{P}_2; 0\rangle$



Fig. 3

le double rond symbolise H_{I2}^{PF}

Seul terme d'ordre 1 en V_e et 2 en q_α

Remarque Dans le point de vue de Coulomb, les termes correctifs à l'ordre 1 en V_e et 2 en q_α sont plus compliqués à calculer. 3 diagrammes (si on néglige la polarisation du vide et les créations de paires e^+e^- , ce que nous faisons ici aussi)

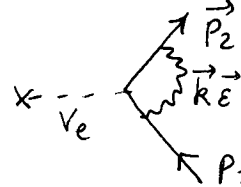
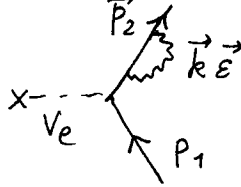
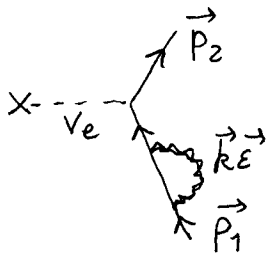


Fig. 4

3 diagrammes avec 3 vertex alors que dans le point de vue de Pauli-Fierz, 1 seul diagramme avec 1 seul vertex.

Calcul des termes correctifs

Calcul de $\langle \vec{P}_2; 0 | H_{I2}^{PF} | \vec{P}_1; 0 \rangle$

$$\langle \vec{P}_2; 0 | H_{I2}^{PF} | \vec{P}_1; 0 \rangle = \frac{1}{2} \frac{q_\alpha^2}{m_\alpha^2} \sum_{i,j} \sum_{\vec{k}, \vec{\epsilon}} \langle \vec{P}_2; 0 | Z_i(\vec{0}) Z_j(\vec{0}) \nabla_i \nabla_j V_e(\vec{r}_\alpha) | \vec{P}_1; 0 \rangle \quad (2.1)$$

$$\langle \vec{P}_2 | \nabla_i \nabla_j V_e(\vec{r}_\alpha) | \vec{P}_1 \rangle = i \varphi_i i \varphi_j \langle \vec{P}_2 | V_e(\vec{r}_\alpha) | \vec{P}_1 \rangle = -\frac{1}{L^3} \mathcal{V}_e(\vec{\varphi}) \varphi_i \varphi_j \quad (2.2)$$

$$\langle 0 | Z_i(\vec{0}) Z_j(\vec{0}) | 0 \rangle = \sum_{\vec{k}, \vec{\epsilon}} \frac{\hbar}{2\epsilon_0 \omega L^3} \frac{1}{\omega^2} \epsilon_i \epsilon_j \quad (2.3)$$

$$\hookrightarrow \langle \vec{P}_2; 0 | H_{I2}^{PF} | \vec{P}_1; 0 \rangle = -\frac{1}{L^3} \mathcal{V}_e(\vec{\varphi}) \sum_{\vec{k}, \vec{\epsilon}} \frac{\hbar}{2\epsilon_0 \omega^3 L^3} (\vec{\epsilon} \cdot \vec{\varphi})^2 \frac{q_\alpha^2}{2m_\alpha^2} \quad (2.4)$$

Amplitude de diffusion $P_1 \rightarrow P_2$ à l'ordre 1 en V_e et à l'ordre 2 inclus en q_α

$$\mathcal{A}(\vec{P}_1 \rightarrow \vec{P}_2) = -2\pi i \delta^{(T)}(E_1 - E_2) \langle \vec{P}_2; 0 | V_e(\vec{r}_\alpha) + H_{I2}^{PF} | \vec{P}_1; 0 \rangle \quad (2.5)$$

A partir de (1.16) et de (2.4), on obtient

$$\mathcal{A}(\vec{p}_1 \rightarrow \vec{p}_2) = -2\pi i \delta^{(T)}(E_1 - E_2) \frac{v_e(\vec{\varphi})}{L^3} \left[1 - \frac{q_\alpha^2}{2m_\alpha^2} \sum_{\vec{k}\vec{E}} \frac{\hbar}{2\varepsilon_0 \omega^3 L^3} (\vec{E} \cdot \vec{\varphi})^2 \right] \quad (2.6)$$

Dans (1.16), $\vec{\varphi} = \vec{p}_1 - \vec{p}_2 = \vec{p}_{el}$ est le même ^{qu'ici}. On peut donc écrire

$$\mathcal{A}(\vec{p}_1 \rightarrow \vec{p}_2) = \mathcal{A}_{el}^{(0)}(\vec{p}_1 \rightarrow \vec{p}_2) f(\vec{\varphi}) \quad (2.7)$$

$$\text{où} \quad f(\vec{\varphi}) = 1 - \frac{q_\alpha^2}{2m_\alpha^2} \sum_{\vec{k}\vec{E}} \frac{\hbar}{2\varepsilon_0 \omega^3 L^3} (\vec{E} \cdot \vec{\varphi})^2 \quad (2.8)$$

est un "facteur de forme" qui vient corriger l'amplitude de diffusion élastique calculée à l'ordre 0 en q_α (et toujours à l'ordre 1 en v_e)

Ce facteur de forme diffère de 1 par un terme en q_α^2 décrivant les corrections radiatives en $\alpha = q^2/40\pi\epsilon_0\hbar c$

Corrections à la section efficace

Les amplitudes $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}_{el}^{(0)}$ diffèrent d'après (2.7) d'un facteur $f(\vec{\varphi})$. On en déduit que les sections efficaces $d\sigma$ (ordre 1 en v_e et 2 inclus en q_α) et $d\sigma_{el}^{(0)}$ (ordre 1 en v_e et 0 en q_α) diffèrent d'un facteur $|f(\vec{\varphi})|^2$

$$d\sigma(\vec{p}_1 \rightarrow \vec{p}_2) = d\sigma_{el}^{(0)}(\vec{p}_1 \rightarrow \vec{p}_2) |f(\vec{\varphi})|^2 \quad (2.9)$$

A l'ordre 2 inclus en q_α , on a

$$\begin{aligned} |f(\varphi)|^2 &\simeq 1 - \frac{q_\alpha^2}{m_\alpha^2} \sum_{\vec{k}\vec{E}} \frac{\hbar}{2\varepsilon_0 \omega^3 L^3} (\vec{E} \cdot \vec{\varphi})^2 \\ &= 1 - q_\alpha^2 \sum_{\vec{k}\vec{E}} |\eta_1(\vec{k}, \vec{E})|^2 \end{aligned} \quad (2.10)$$

où η_1 est donné en (1.18)

Les corrections radiatives diminuent donc la section efficace de diffusion élastique

Divergences des probabilités de transition aux basses fréquences

- D'après (1.24), la probabilité par unité de temps d'émission d'un photon $\hbar\omega$, $dW(\vec{p}_1 \rightarrow \vec{p}_2 + \vec{k}\vec{E})$ dans l'intervalle $d\omega$, varie en $d\omega/\omega$

La probabilité d'émission d'un photon $\omega \gg \delta$ diverge donc en $\log \delta$ quand $\delta \rightarrow 0$

- De même, le calcul de $\sum_{\vec{k}\vec{E}}$ dans la 1^{re} ligne de (2.10) fait apparaître dans le terme correctif $|f(\varphi)|^2$ des probabilités de transition une divergence logarithmique vis à vis de la borne inférieure de l'intégrale sur k .

Reexamen des grandeurs mesurées expérimentalement

- Si $\hbar\omega$ est plus petit que la sensibilité dE du détecteur mesurant l'énergie E_2 de la particule diffusée, la mesure de E_2 ne permettra pas de savoir si un photon très mou a été émis ou non au cours de la diffusion.

↳ La grandeur mesurée est donc en fait la probabilité pour que la particule ait été diffusée de $\vec{p}_1$ à $\vec{p}_2$ avec émission de 0 ou 1 (ou 2 ou 3...) photons très mous ($\hbar\omega \ll dE$)

- Dans le calcul d'ordre 2 en q_α fait ici, il faut donc ajouter les probabilités de diffusion avec émission de 0 ou 1 photon

$$W_{\text{mesuré}}(\vec{p}_1 \rightarrow \vec{p}_2) = \frac{1}{T} \left[|A(\vec{p}_1 \rightarrow \vec{p}_2)|^2 + \sum_{\vec{k}, \vec{E}} |A(\vec{p}_1 \rightarrow \vec{p}_2 + \vec{k}, \vec{E})|^2 \right] \quad (3.1)$$

$\omega \leq \omega_m \approx dE/\hbar$

Disparition des divergences à l'ordre 2 en q_α

- Comme ω est très petit dans le dernier terme de (3.1), on peut utiliser (1.17) qui montre que ce dernier terme est proportionnel à $|A_{el}^{(0)}(\vec{p}_1 \rightarrow \vec{p}_2)|^2$. Il en est de même pour le premier d'après (2.7). On peut donc mettre en facteur dans (3.1) $|A_{el}^{(0)}(\vec{p}_1 \rightarrow \vec{p}_2)|^2/T$ qui n'est autre que la probabilité de transition par unité de temps $W_{el}^{(0)}(\vec{p}_1 \rightarrow \vec{p}_2)$ calculée à l'ordre 0 en q_α .

On obtient ainsi, compte tenu de (1.17), (1.18), (2.7) et (2.10)

$$W_{\text{mesuré}}(\vec{p}_1 \rightarrow \vec{p}_2) = W_{el}^{(0)}(\vec{p}_1 \rightarrow \vec{p}_2) \times \left[1 - q_\alpha^2 \sum_{\vec{k}, \vec{E}} |\eta_1(\vec{k}, \vec{E})|^2 + q_\alpha^2 \sum_{\vec{k}, \vec{E}} |\eta_1(\vec{k}, \vec{E})|^2 \right] \quad (3.2)$$

$\omega \leq \omega_m \approx dE/\hbar$

Les divergences logarithmiques aux bornes inférieures des 2 sommes sur $\vec{k}, \vec{E}$ qui apparaissent dans (3.2) se compensent exactement.

Il n'y a plus de divergence infrarouge sur $W_{\text{mesuré}}$.

La diminution de la section efficace de diffusion élastique due aux corrections radiatives provenant des modes basse fréquence compense exactement la section efficace de diffusion avec émission d'un photon appartenant à ces modes basse fréquence.