Etude de quelques applications de la transformation de Pauli-Fierz (suite)

(4) La "catastrophe infrarouge" - Etude à tous les ordres en q_α

a) Amplitude de transition à l'ordre 1 en V_e et à tous les ordres en q_α.

b) Séparation des modes en 2 catégories

c) Approximation sur les amplitudes d'émission.

d) Calcul de grandeurs significatives expérimentalement. Disparition de toute divergence infrarouge.

e) Valeur moyenne de l'énergie rayonnée à basse fréquence

Appendice : Utilisation de $T' = \exp\left[\frac{i}{\hbar}\frac{q_\alpha}{m_\alpha^*}\vec{p}_\alpha\cdot\vec{Z}(\vec{0})\right]$ plutôt que $T = \exp\left[\frac{i}{\hbar}\frac{q_\alpha}{m_\alpha}\vec{p}_\alpha\cdot\vec{Z}(\vec{0})\right]$ - Motivations de ce changement et intérêt pour un calcul à tous les ordres en q_α.

Amplitudes de transition

Autre écriture de $V_e(\vec{r}_\alpha+\vec{\xi}_\alpha)$

D'après (1.9.a) $\quad \mathcal{V}_e(\vec{k}) = \int d^3r\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\, V_e(\vec{r}) \qquad (4.1.a)$

$\hookrightarrow \quad V_e(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3k\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}\, \mathcal{V}_e(\vec{k}) \qquad (4.1.b)$

Comme $\vec{r}_\alpha$ et $\vec{\xi}_\alpha = \frac{q_\alpha}{m_\alpha}\vec{Z}(\vec{0})$ commutent,

$$V_e(\vec{r}_\alpha+\vec{\xi}_\alpha) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3k\, e^{-i\vec{k}\cdot(\vec{r}_\alpha+\vec{\xi}_\alpha)}\,\mathcal{V}_e(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3k\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}_\alpha} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{\xi}_\alpha}\,\mathcal{V}_e(\vec{k}) \qquad (4.2)$$

Amplitude de probabilité à l'ordre 1 en V_e et à tous les ordres en q_α pour que la particule soit diffusée de $\vec{p}_1$ à $\vec{p}_2 = \vec{p}_1 - \hbar\vec{\varphi}$ avec émission de .... n_i photons du mode i $(\vec{k}_i\vec{\varepsilon}_i)$ ... n_j photons du mode j

Etat initial $\quad |\psi_{in}\rangle = |\vec{p}_1; \cdots 0_i \cdots 0_j \cdots\rangle = |\vec{p}_1; \{0_i\}\rangle \qquad (4.3)$

Etat final $\quad |\psi_{fin}\rangle = |\vec{p}_2; \cdots n_i \cdots n_j \cdots\rangle = |\vec{p}_2; \{n_i\}\rangle \qquad (4.4)$

$$\vec{p}_1 - \vec{p}_2 = \hbar\vec{\varphi} \qquad (4.5.a)$$

$$E_{in} = E_1 = \vec{p}_1^{\,2}/2m_\alpha \qquad E_{fin} = E_2 + \sum_i n_i\hbar\omega_i = \frac{\vec{p}_2^{\,2}}{2m_\alpha} + \sum_i n_i\hbar\omega_i \qquad (4.5.b)$$

$$\mathcal{A}\left(\vec{p}_1 \to \vec{p}_2 + \{n_i\vec{k}_i\vec{\varepsilon}_i\}\right) = -2\pi i\,\delta^{(T)}(E_{fin}-E_{in})\,\langle\psi_{fin}|V_e(\vec{r}_\alpha+\vec{\xi}_\alpha)|\psi_{in}\rangle \qquad (4.6)$$

$$\langle\psi_{fin}|V_e(\vec{r}_\alpha+\vec{\xi}_\alpha)|\psi_{in}\rangle = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3k\, \langle\psi_{fin}|e^{-i\vec{k}.\vec{r}_\alpha}\, e^{-i\vec{k}.\vec{\xi}_\alpha}|\psi_{in}\rangle\, \mathcal{V}_e(\vec{k}) =$$

$$= \int d^3k\, \underbrace{\frac{1}{(2\pi)^3}\langle\vec{P}_2|e^{-i\vec{k}.\vec{r}_\alpha}|\vec{P}_1\rangle}_{\frac{1}{L^3}\delta(\vec{\varphi}-\vec{k})}\, \langle\{n_i\}|e^{-i\vec{k}.\vec{\xi}_\alpha}|\{0_i\}\rangle\, \mathcal{V}_e(\vec{k})$$

$$= \frac{\mathcal{V}_e(\vec{\varphi})}{L^3}\langle\{n_i\}|e^{-i\vec{\varphi}.\vec{\xi}_\alpha}|\{0_i\}\rangle \qquad (4.7)$$

$$\mathcal{A}(\vec{P}_1\to\vec{P}_2+\{n_i\vec{k}_i\vec{\varepsilon}_i\}) = -2\pi i\,\delta^{(T)}(E_{fin}-E_{in})\,\frac{\mathcal{V}_e(\vec{\varphi})}{L^3}\langle\{n_i\}|e^{-i\vec{\varphi}.\vec{\xi}_\alpha}|\{0_i\}\rangle \qquad (4.8)$$

<u>2 catégories de modes</u>

- 2 fréquences : ω_m très basse, ω_M très élevée (avec toutefois $k_M|\vec{r}_\alpha|\ll 1$)
- Modes "basse fréquence" repérés avec un indice λ (grec minuscule)

$$\omega_\lambda \leqslant \omega_m$$

  Modes "haute fréquence" repérés avec un indice Λ (grec majuscule)

$$\omega_m \leqslant \omega_\Lambda \leqslant \omega_M$$

- On peut distinguer dans le développement en modes du vecteur de Hertz $\vec{Z}(\vec{r})$ les contributions des 2 types de modes

$$\vec{Z}^{\,b.f}(\vec{r}) = \sum_\lambda \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0\omega_\lambda L^3}}\left[\vec{\varepsilon}_\lambda\frac{a_\lambda}{i\omega_\lambda}e^{i\vec{k}_\lambda.\vec{r}} - \vec{\varepsilon}_\lambda\frac{a_\lambda^+}{i\omega_\lambda}e^{-i\vec{k}_\lambda.\vec{r}}\right] \qquad (4.9)$$

$$\vec{Z}^{\,h.f}(\vec{r}) = \sum_\Lambda \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0\omega_\Lambda L^3}}\left[\vec{\varepsilon}_\Lambda\frac{a_\Lambda}{i\omega_\Lambda}e^{i\vec{k}_\Lambda.\vec{r}} - \vec{\varepsilon}_\Lambda\frac{a_\Lambda^+}{i\omega_\Lambda}e^{-i\vec{k}_\Lambda.\vec{r}}\right] \qquad (4.10)$$

- Comme $\vec{Z}^{\,b.f}(\vec{0})$ commute avec $\vec{Z}^{\,h.f}(\vec{0})$,

$$e^{-i\vec{\varphi}.\vec{\xi}_\alpha} = e^{-i\vec{\varphi}.\vec{\xi}_\alpha^{\,b.f}}\, e^{-i\vec{\varphi}.\vec{\xi}_\alpha^{\,h.f}} \qquad (4.11)$$

avec $\vec{\xi}_\alpha^{\,b.f} = \frac{q_\alpha}{m_\alpha}\vec{Z}^{\,b.f}(\vec{0})$ $\qquad \vec{\xi}_\alpha^{\,h.f} = \frac{q_\alpha}{m_\alpha}\vec{Z}^{\,h.f}(\vec{0})$ $\qquad (4.12)$

<u>Amplitude de probabilité</u> à l'ordre 1 en V_e et à tous les ordres en q_α pour que la particule soit diffusée de $\vec{P}_1$ à $\vec{P}_2$ avec émission de 0 photon haute fréquence et de ... n_λ photons basse fréquence du mode λ...

D'après (4.8), (4.11), (4.12)

$$\mathcal{A}(\vec{P}_1\to\vec{P}_2+\{0\,\vec{k}_\Lambda\vec{\varepsilon}_\Lambda\}+\{n_\lambda\vec{k}_\lambda\vec{\varepsilon}_\lambda\}) = -2\pi i\,\delta^{(T)}(E_1-E_2-\sum_\lambda n_\lambda\hbar\omega_\lambda)\times$$

$$\times\frac{\mathcal{V}_e(\vec{\varphi})}{L^3}\langle\{0_\Lambda\}|e^{-i\vec{\varphi}.\vec{\xi}_\alpha^{\,h.f}}|\{0_\Lambda\}\rangle\langle\{n_\lambda\}|e^{-i\vec{\varphi}.\vec{\xi}_\alpha^{\,b.f}}|\{0_\lambda\}\rangle \qquad (4.13)$$

Dans (4.13), $\hbar\vec{\varphi} = \vec{P}_1-\vec{P}_2$. Pour $\vec{P}_1$ et $\vec{n}_2 = \vec{P}_2/P_2$ fixés, $\vec{\varphi}$ est déterminé par la conservation de l'énergie

$$(\vec{P}_1^{\,2}-\vec{P}_2^{\,2})/2m_\alpha = \sum_\lambda n_\lambda\hbar\omega_\lambda \qquad (4.14)$$

Donc $\vec{\varphi}$ dépend en principe des $\{n_\lambda\}$

Cependant, comme $\omega_\lambda \leq \omega_m$ et que $\hbar\omega_m$ est très petit, on peut négliger l'énergie $\sum_\lambda n_\lambda \hbar\omega_\lambda$ rayonnée à basse fréquence, ce qui permet d'écrire

$$|\vec{P_1}| \sim |\vec{P_2}| \tag{4.15}$$

et de remplacer dans (4.13) $\vec{\varphi}$ par $\vec{\varphi}_{el}$ correspondant à la diffusion élastique de la particule de $\vec{P_1}$ à $\vec{P_2}$. $\vec{\varphi}_{el}$ est indépendant des $\{n_\lambda\}$.

De plus, comme la fonction $\delta^{(T)}$ de (4.13) agit sur des fonctions lentement variables de l'énergie, on peut la remplacer par $\delta^{(T)}(E_1-E_2)$ puisque $\sum_\lambda n_\lambda \hbar\omega_\lambda$ est négligeable.

Finalement, ces 2 approximations permettent de réécrire (4.13) sous la forme

$$\mathcal{A}(\vec{P_1} \to \vec{P_2} + \{0\,\vec{k}_\Lambda\vec{\varepsilon}_\Lambda\} + \{n_\lambda\vec{k}_\lambda\vec{\varepsilon}_\lambda\}) =$$

$$= \mathcal{A}_{el}(\vec{P_1} \to \vec{P_2} + \{0\,\vec{k}_\Lambda\vec{\varepsilon}_\Lambda\}) \;\langle\{n_\lambda\}|e^{-i\vec{\varphi}\cdot\vec{\xi}_\alpha^{\,b.f}}|\{0_\lambda\}\rangle \tag{4.16}$$

où

$$\mathcal{A}_{el} = -2\pi i\,\delta^{(T)}(E_1-E_2)\,\frac{V_e(\vec{\varphi})}{L^3}\,\langle\{0_\Lambda\}|e^{-i\vec{\varphi}\cdot\vec{\xi}_\alpha^{\,h.f}}|\{0_\Lambda\}\rangle \tag{4.17}$$

est l'amplitude de diffusion élastique dans V_e, sans émission d'aucun photon haute fréquence et calculée en ignorant complètement les photons basse fréquence.

Remarques

(i) Même si $\hbar\omega_\lambda$ est très petit, $\sum_\lambda n_\lambda\hbar\omega_\lambda$ peut devenir non négligeable si n_λ est suffisamment grand et l'expression (4.16) cesse alors d'être valable. Nous calculerons plus loin (cf § e) la valeur moyenne de l'énergie totale rayonnée à basse fréquence et montrerons qu'elle est très inférieure à $\hbar\omega_m$. Les processus pour lesquels $\sum_\lambda n_\lambda\hbar\omega_\lambda$ n'est pas négligeable ont donc une probabilité extrêmement faible et peuvent être ignorés.

(ii) Le raisonnement conduisant de (4.13) à (4.13) peut être généralisé à des processus au cours desquels des photons haute fréquence peuvent être émis. Ainsi

$$\mathcal{A}(\vec{P_1} \to \vec{P_2} + 1\text{ photon }\vec{k}_\Lambda\vec{\varepsilon}_\Lambda + \{n_\lambda\vec{k}_\lambda\vec{\varepsilon}_\lambda\}) =$$

$$= \mathcal{A}(\vec{P_1} \to \vec{P_2} + 1\text{ photon }\vec{k}_\Lambda\vec{\varepsilon}_\Lambda)\;\langle\{n_\lambda\}|e^{-i\vec{\varphi}\cdot\vec{\xi}_\alpha^{\,b.f}}|\{0_\lambda\}\rangle \tag{4.18}$$

où

$$\mathcal{A}(\vec{P_1} \to \vec{P_2} + 1\text{ photon }\vec{k}_\Lambda\vec{\varepsilon}_\Lambda) = -2\pi i\,\delta^{(T)}(E_1-E_2-\hbar\omega_\Lambda)\,\times$$

$$\times\;\frac{V_e(\vec{\varphi})}{L^3}\,\langle\vec{k}_\Lambda\vec{\varepsilon}_\Lambda|e^{-i\vec{\varphi}\cdot\vec{\xi}_\alpha^{\,h.f}}|\{0_\Lambda\}\rangle \tag{4.19}$$

est l'amplitude de diffusion avec émission d'un photon $\vec{k}_\Lambda\vec{\varepsilon}_\Lambda$ calculée en ignorant les photons basse fréquence. Dans (4.18) et (4.19), $\vec{\varphi}$ est défini pour $\vec{P_1}$ et $\vec{n}_2 = \vec{P_2}/P_2$ fixés par $(P_1^2-P_2^2)/2m_\alpha = \hbar\omega_\Lambda$.

Grandeurs mesurées expérimentalement

- Compte tenu de la résolution finie en énergie avec laquelle la particule diffusée est observée, on ne peut pas savoir si des photons basse fréquence ont été émis ou non au cours de la diffusion.
La quantité mesurée est donc

$$W_{mesuré} = \sum_{\{n_\lambda\}} W(\vec{P}_1 \rightarrow \vec{P}_2 + \{0\vec{k}_\Lambda\vec{\varepsilon}_\Lambda\} + \{n_\lambda\vec{k}_\lambda\vec{\varepsilon}_\lambda\}) \qquad (4.20)$$

où W est la probabilité de transition par unité de temps égale au carré du module de (4.13) divisé par T. En utilisant (4.16), on trouve

$$W(\vec{P}_1 \rightarrow \vec{P}_2 + \{0\vec{k}_\Lambda\vec{\varepsilon}_\Lambda\} + \{n_\lambda\vec{k}_\lambda\vec{\varepsilon}_\lambda\}) =$$
$$= W_{el}(\vec{P}_1 \rightarrow \vec{P}_2 + \{0\vec{k}_\Lambda\vec{\varepsilon}_\Lambda\}) \, |\langle\{n_\lambda\}| e^{-i\vec{\varphi}\cdot\vec{\xi}_\alpha^{b.f}} |\{0_\lambda\}\rangle|^2 \qquad (4.21)$$

où

$$W_{el} = \frac{1}{T} |\mathcal{A}_{el}(\vec{P}_1 \rightarrow \vec{P}_2 + \{0\vec{k}_\Lambda\vec{\varepsilon}_\Lambda\})|^2 \qquad (4.22)$$

est la probabilité de diffusion élastique par unité de temps $\vec{P}_1 \rightarrow \vec{P}_2$ sans émission d'aucun photon haute fréquence et calculée en ignorant complètement les modes basse fréquence (à la différence de $W_{el}^{(0)}$ apparaissant en (3.2), W_{el} est maintenant valable à tous les ordres en q_α).

- Compte tenu de (4.20) et (4.21)

$$W_{mesuré}(\vec{P}_1 \rightarrow \vec{P}_2 + \{0\vec{k}_\Lambda\vec{\varepsilon}_\Lambda\}) =$$
$$W_{el}(\vec{P}_1 \rightarrow \vec{P}_2 + \{0\vec{k}_\Lambda\vec{\varepsilon}_\Lambda\}) \times \sum_{\{n_\lambda\}} |\langle\{n_\lambda\}| e^{-i\vec{\varphi}\cdot\vec{\xi}_\alpha^{b.f}} |\{0_\lambda\}\rangle|^2 \qquad (4.23)$$

Or

$$\sum_{\{n_\lambda\}} |\langle\{n_\lambda\}| e^{-i\vec{\varphi}\cdot\vec{\xi}_\alpha^{b.f}} |\{0_\lambda\}\rangle|^2 =$$
$$\langle\{0_\lambda\}| e^{i\vec{\varphi}\cdot\vec{\xi}_\alpha^{b.f}} \sum_{\{n_\lambda\}} |\{n_\lambda\}\rangle\langle\{n_\lambda\}| \; e^{-i\vec{\varphi}\cdot\vec{\xi}_\alpha^{b.f}} |\{0_\lambda\}\rangle \qquad (4.24)$$

Tous les opérateurs apparaissant dans (4.24) n'agissent que dans le sous espace des photons basse fréquence. Dans ce sous-espace, $\sum_{\{n_\lambda\}} |\{n_\lambda\}\rangle\langle\{n_\lambda\}| = \mathbb{1}$ (relation de fermeture) et la deuxième ligne de (4.24) se réduit à $\langle\{0_\lambda\}|\{0_\lambda\}\rangle = 1$, de sorte que

$$W_{mesuré}(\vec{P}_1 \rightarrow \vec{P}_2 + \{0\vec{k}_\Lambda\vec{\varepsilon}_\Lambda\}) = W_{el}(\vec{P}_1 \rightarrow \vec{P}_2 + \{0\vec{k}_\Lambda\vec{\varepsilon}_\Lambda\}) \qquad (4.25)$$

La grandeur mesurée expérimentalement peut donc être calculée en ignorant complètement les modes basse fréquence. Elle ne contient plus aucune divergence infrarouge

Un calcul analogue peut être fait à partir des équations (4.18) et (4.19). Il montre qu'on peut ignorer tous les mode basse fréquence pour les grandeurs significatives expérimentalement impliquant l'émission de un (ou plusieurs) photons haute fréquence.

Valeur moyenne de l'énergie rayonnée à basse fréquence

– L'équation (4.21) montre que, si la particule est diffusée élastiquement de $\vec{P}_1$ à $\vec{P}_2$, la probabilité pour qu'elle émette un ensemble $\{n_\lambda\}$ de photons basse fréquence est

$$|\langle\{n_\lambda\}|\, e^{-i\vec{\varphi}\cdot\vec{\xi}_\alpha^{\,b.f}}\,|\{0_\lambda\}\rangle|^2 \tag{4.26}$$

l'énergie rayonnée dans ce processus étant

$$E_{\{n_\lambda\}} - E_{\{0_\lambda\}} = \sum_\lambda n_\lambda \hbar\omega_\lambda \tag{4.27}$$

– Energie moyenne rayonnée

$$\langle E_{ray}^{b.f}\rangle = \sum_{\{n_\lambda\}} \left(E_{\{n_\lambda\}} - E_{\{0_\lambda\}}\right) |\langle\{n_\lambda\}|e^{-i\vec{\varphi}\cdot\vec{\xi}_\alpha^{\,b.f}}|\{0_\lambda\}\rangle|^2 =$$

$$= \sum_{\{n_\lambda\}} \langle\{0_\lambda\}|e^{i\vec{\varphi}\cdot\vec{\xi}_\alpha^{\,b.f}}|\{n_\lambda\}\rangle\langle\{n_\lambda\}|\left[H_R^{b.f}, e^{-i\vec{\varphi}\cdot\vec{\xi}_\alpha^{\,b.f}}\right]|\{0_\lambda\}\rangle \tag{4.28}$$

où

$$H_R^{b.f} = \sum_\lambda \hbar\omega_\lambda \left(a_\lambda^+ a_\lambda + \frac{1}{2}\right) \tag{4.29}$$

$$\hookrightarrow \quad \langle E_{ray}^{b.f}\rangle = \langle\{0_\lambda\}|\, e^{i\vec{\varphi}\cdot\vec{\xi}_\alpha^{\,b.f}} H_R^{b.f} e^{-i\vec{\varphi}\cdot\vec{\xi}_\alpha^{\,b.f}} - H_R^{b.f}\,|\{0_\lambda\}\rangle \tag{4.30}$$

– En utilisant le développement de $\vec{\xi}_\alpha^{\,b.f}$ en a_λ et a_λ^+, on obtient

$$e^{i\vec{\varphi}\cdot\vec{\xi}_\alpha^{\,b.f}} = \exp\left\{\sum_\lambda \left(\gamma_\lambda^* a_\lambda - \gamma_\lambda a_\lambda^+\right)\right\} \tag{4.31}$$

où

$$\gamma_\lambda = \frac{q_\alpha}{m_\alpha}\sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0\omega_\lambda^3 L^3}}\;\vec{\varepsilon}_\lambda\cdot\vec{\varphi} \tag{4.32}$$

L'opérateur (4.31) est un opérateur de translation de a_λ et a_λ^+

$$e^{i\vec{\varphi}\cdot\vec{\xi}_\alpha^{\,b.f}}\, a_\lambda\, e^{-i\vec{\varphi}\cdot\vec{\xi}_\alpha^{\,b.f}} = a_\lambda + \gamma_\lambda \tag{4.33}$$

– L'équation (4.33) et son adjointe, donnent alors pour (4.30)

$$\langle E_{ray}^{b.f}\rangle = \sum_\lambda \hbar\omega_\lambda \gamma_\lambda^*\gamma_\lambda = \sum_\lambda \hbar\omega_\lambda q_\alpha^2 \frac{(\vec{\varepsilon}_\lambda\cdot\delta\vec{v})^2}{2\varepsilon_0\hbar\omega_\lambda^3 L^3} \tag{4.34}$$

où

$$\delta\vec{v} = \frac{\vec{P}_1 - \vec{P}_2}{m_\alpha} = \frac{\hbar\vec{\varphi}}{m_\alpha} \tag{4.35}$$

$$\hookrightarrow \quad \langle E_{ray}^{b.f}\rangle = \frac{L^3}{(2\pi)^3}\int_0^{k_m} k^2 dk \int d\Omega \sum_{\vec{\varepsilon}\perp\vec{k}} \frac{q_\alpha^2}{2\varepsilon_0\omega_\lambda^2 L^3} \sum_{i,j} \varepsilon_i\varepsilon_j\,\delta v_i\,\delta v_j \tag{4.36}$$

$$\int d\Omega \sum_{\vec{\varepsilon}} \varepsilon_i\varepsilon_j = \int d\Omega\left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}\right) = \frac{8\pi}{3}\delta_{ij} \tag{4.37}$$

$$\hookrightarrow \quad \langle E_{ray}^{b.f}\rangle = \frac{q_\alpha^2}{2\varepsilon_0 c^2}\frac{1}{3\pi^2} k_m (\delta\vec{v})^2 = \frac{2\alpha}{3\pi}\frac{(\delta\vec{v})^2}{c^2}\hbar\omega_m \tag{4.38}$$

Comme $\alpha = q_\alpha^2/4\pi\varepsilon_0\hbar c = 1/137 \ll 1$ et que $(\delta\vec{v})^2 \ll c^2$, on en déduit que $\langle E_{ray}^{b.f}\rangle \ll \hbar\omega_m$. Il est donc légitime de négliger $\sum_\lambda n_\lambda\hbar\omega_\lambda$ devant E_1 et E_2 dans (4.13)

Remarque

Retour à la formule (1.13) page III.4 donnant la variable normale classique du champ rayonné dans le mode $\vec{k}\vec{\varepsilon}$ par une particule classique diffusée de $\vec{v}_1$ à $\vec{v}_2$ par un potentiel (la réaction du rayonnement émis étant négligeable).

A la limite des très basses fréquences $\omega\tau_c \ll 1$ (où τ_c est le temps de collision), on peut remplacer dans (1.13)

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{\varepsilon}\cdot\vec{\gamma}_\alpha(t')\, e^{i\omega t'} dt' = \int_{t_1}^{t_2} \vec{\varepsilon}\cdot\vec{\gamma}_\alpha(t')\, dt' = \vec{\varepsilon}\cdot(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) = \vec{\varepsilon}\cdot\delta\vec{v}$$

En reportant alors la valeur de $\alpha_\varepsilon(\vec{k}) = -q_\alpha \vec{\varepsilon}\cdot\delta\vec{v} / \sqrt{2\varepsilon_0 \hbar\omega^3 (2\pi)^3}$ dans l'expression de l'énergie du champ classique $\int d^3k \sum_{\vec{\varepsilon}} \hbar\omega\, \alpha_\varepsilon^*(\vec{k})\alpha_\varepsilon(\vec{k})$, et en sommant sur $\vec{k}$ et $\vec{\varepsilon}$ avec $|\vec{k}| < k_m$, on retrouve exactement (4.38)

Le calcul quantique à tous les ordres en q_α présenté ici redonne donc bien le résultat classique en valeur moyenne.

Appendice

1 - Rappels du cours IV

- $$T = \exp\left[\frac{i}{\hbar}\frac{q_\alpha}{m_\alpha}\vec{p}_\alpha\cdot\vec{Z}(\vec{0})\right] \tag{A.1}$$

- $$T\frac{1}{2m_\alpha}\left[\vec{p}_\alpha - q_\alpha\vec{A}_\perp(\vec{0})\right]^2 T^+ = \frac{1}{2m_\alpha}\left[\vec{p}_\alpha - q_\alpha\vec{A}_\perp(\vec{0}) - q_\alpha\vec{A}_{\perp P}(\vec{0})\right]^2$$
$$= \frac{1}{2m_\alpha}\left[\vec{p}_\alpha\left(1 - \frac{\delta m_{1\alpha}}{m_\alpha}\right) - q_\alpha\vec{A}_\perp(\vec{0})\right]^2 \tag{A.2}$$

car
$$q_\alpha\vec{A}_{\perp P}(\vec{0}) = \frac{\delta m_{1\alpha}}{m_\alpha}\vec{p}_\alpha \tag{A.3}$$

avec
$$\delta m_{1\alpha} = \frac{q_\alpha^2 k_M}{3\pi^2\varepsilon_0 c^2} \tag{A.4}$$

- $$T H_R T^+ = H_R + \frac{q_\alpha}{m_\alpha}\vec{p}_\alpha\cdot\vec{A}_\perp(\vec{0}) + \frac{\vec{p}_\alpha^{\,2}}{2m_\alpha}\frac{\delta m_{1\alpha}}{m_\alpha} \tag{A.5}$$

2 - Critique du cours IV

- Dans le cours IV, on a négligé dans (A.2) le double produit de $-\frac{\delta m_{1\alpha}}{m_\alpha}\vec{p}_\alpha$ avec $-q_\alpha\vec{A}_\perp(\vec{0})$ avec l'argument que c'est un terme d'ordre 3 en q_α (En effet, d'après (A.4), $\delta m_{1\alpha}$ est d'ordre 2 en q_α).

  Mais ce terme est un terme d'interaction puisqu'y figurent à la fois $\vec{p}_\alpha$ et $\vec{A}_\perp(\vec{0})$. Dans un calcul <u>à tous les ordres en q_α</u>, comme celui fait dans le § 4, il faudrait en tenir compte et considérer l'effet de ce terme en plus de celui de $V_e(\vec{r}_\alpha + \vec{\xi}_\alpha)$

- Notons qu'on a aussi négligé les termes provenant du carré de $-\frac{\delta m_{1\alpha}}{m_\alpha}\vec{p}_\alpha$, qui sont d'ordre 4 en q_α mais ne dépendent que de la particule.

3- Meilleure solution

- Utilisation de $$T' = \exp\left[\frac{i}{\hbar}\frac{q_\alpha}{m_\alpha^*}\vec{p}_\alpha\cdot\vec{Z}(\vec{0})\right] \quad (A.6)$$

avec $$m_\alpha^* = m_\alpha + \delta m_{1\alpha} \quad (A.7)$$

plutôt que (A.1)

- $$T'\frac{1}{2m_\alpha}\left[\vec{p}_\alpha - q_\alpha\vec{A}_\perp(\vec{0})\right]^2 T'^+ = \frac{1}{2m_\alpha}\left[\vec{p}_\alpha\left(1-\frac{\delta m_{1\alpha}}{m_\alpha^*}\right) - q_\alpha\vec{A}_\perp(\vec{0})\right]^2 \quad (A.8)$$

Le m_α qui apparait dans le crochet de (A.2) ne peut en effet provenir que de T, puisque $\delta m_{1\alpha}$ ne dépend pas de m_α. Pour passer de (A.2) à (A.8), il suffit donc de remplacer à l'intérieur du crochet de (A.2), m_α par m_α^*.

Comme $$1-\frac{\delta m_{1\alpha}}{m_\alpha^*} = \frac{m_\alpha^* - \delta m_{1\alpha}}{m_\alpha^*} = \frac{m_\alpha}{m_\alpha^*} \quad (A.9)$$

on obtient, sans faire aucune approximation

$$T'\frac{1}{2m_\alpha}\left[\vec{p}_\alpha - q_\alpha\vec{A}_\perp(\vec{0})\right]^2 T'^+ = \frac{\vec{p}_\alpha^{\,2}}{2m_\alpha^*}\frac{m_\alpha}{m_\alpha^*} - \frac{q_\alpha}{m_\alpha^*}\vec{p}_\alpha\cdot\vec{A}_\perp(\vec{0}) + \frac{q_\alpha^2}{2m_\alpha}\vec{A}_\perp^{\,2}(\vec{0}) \quad (A.10)$$

- De même, comme H_R ne dépend pas de m_α, les m_α qui apparaissent dans (A.5) ne peuvent provenir que de T. Pour passer de TH_RT^+ à $T'H_RT'^+$, il suffit donc de remplacer dans (A.5) m_α par m_α^*

$$T'H_RT'^+ = H_R + \frac{q_\alpha}{m_\alpha^*}\vec{p}_\alpha\cdot\vec{A}_\perp(\vec{0}) + \frac{\vec{p}_\alpha^{\,2}}{2m_\alpha^*}\frac{\delta m_{1\alpha}}{m_\alpha^*} \quad (A.11)$$

- En ajoutant (A.10) et (A.11) et en notant que le coefficient de $\frac{\vec{p}_\alpha^{\,2}}{2m_\alpha^*}$ est $\frac{m}{m_\alpha^*} + \frac{\delta m_{1\alpha}}{m_\alpha^*} = 1$, on obtient

$$T'\left\{\frac{1}{2m_\alpha}\left[\vec{p}_\alpha - q_\alpha\vec{A}_\perp(\vec{0})\right]^2 + H_R\right\}T'^+ = \frac{\vec{p}_\alpha^{\,2}}{2m_\alpha^*} + H_R + \frac{q_\alpha^2}{2m_\alpha}\vec{A}_\perp^{\,2}(\vec{0}) \quad (A.12)$$

Aucune approximation n'a été faite dans le calcul.
Aucun terme d'interaction n'apparait.

- Les termes d'interaction ne peuvent alors vraiment provenir que de la transformée de $V_e(\vec{r}_\alpha)$

$$T'V_e(\vec{r}_\alpha)T'^+ = V_e(\vec{r}_\alpha + \vec{\xi}'_\alpha) \quad (A.13)$$

avec $$\vec{\xi}'_\alpha = \frac{q_\alpha}{m_\alpha^*}\vec{Z}(\vec{0}) \quad (A.14)$$

Tous les calculs du § 4 ne sont donc valables à tous les ordres en q_α que si m_α est remplacé par m_α^* dans $\vec{\xi}_\alpha$.