

Résultats établis dans le cours précédent et buts de ce cours

- Après une interaction correspondant à une opération de mesure idéale, le système S et l'appareil de mesure ont subi l'évolution :

$$|\Psi_i\rangle = (\sum_a c_a |u_a\rangle) \otimes |\varphi_0\rangle \rightarrow |\Psi_f\rangle = \sum_a c_a |u_a\rangle \otimes |\varphi_a\rangle \quad (6.1)$$

mettant en évidence des corrélations quantiques non-séparables entre les états orthogonaux $|u_a\rangle$ de S et les états orthogonaux $|\varphi_a\rangle$ de M .

- A partir de $t=0$, M interagit avec un environnement E ayant un très grand nombre de degrés de liberté et initialement dans l'état $|\chi(0)\rangle$. L'interaction H_{ME} est diagonale dans la base $\{|\varphi_a\rangle\}$ de M . Sous l'effet de H_{ME} , le système $S+M+E$ évolue suivant

$$|\Psi_{SME}(0)\rangle = (\sum_a c_a |u_a\rangle \otimes |\varphi_a\rangle) \otimes |\chi(0)\rangle \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\Psi_{SME}(t)\rangle = \sum_a c_a |u_a(t)\rangle \otimes |\varphi_a(t)\rangle \otimes |\chi_a(t)\rangle \quad (6.2)$$

où $|u_a(t)\rangle = e^{-iH_S t/\hbar} |u_a\rangle$ et $|\varphi_a(t)\rangle = e^{-iH_M t/\hbar} |\varphi_a\rangle = e^{-iE_a t/\hbar} |\varphi_a\rangle$ décrivent les évolutions propres de $|u_a\rangle$ et $|\varphi_a\rangle$, et où $|\chi_a(t)\rangle$ est un état de E corrélié avec l'état $|\varphi_a\rangle$ de M . Le point important est que

$$\text{Pour } t \text{ suffisamment long } \langle \chi_b(t) | \chi_a(t) \rangle = 0 \text{ si } b \neq a \quad (6.3)$$

- Dans ce cours, nous commençons par récapituler les points importants de la théorie de Zurek et par en discuter le contenu physique (§4). Puis nous présentons un modèle particulier où les interactions $S-M$ et $M-E$ ne sont pas séparées dans le temps mais constamment présentes, et où il est possible d'obtenir une expression analytique pour l'évolution au cours du temps de l'opérateur densité réduit de $S+M$ (§5).

④ Discussion physique

a. L'effet de l'interaction $M-E$ peut être considéré comme une mesure idéale de M par E .

- Il apparaît clairement sur (6.2) que, sous l'effet de H_{SM} , il s'établit des corrélations entre les états $|\varphi_a\rangle, |\varphi_b\rangle \dots$ de M et les états $|\chi_a(t)\rangle, |\chi_b(t)\rangle \dots$ de E . Comme les états $|\chi_a(t)\rangle, |\chi_b(t)\rangle \dots$ deviennent orthogonaux au bout d'un temps suffisamment long, cette corrélation devient parfaite, et l'évolution (6.2) peut être considérée comme une opération de mesure idéale de M par E . Le temps T_2 au bout duquel $|\chi_a(t)\rangle, |\chi_b(t)\rangle \dots$ deviennent orthogonaux peut être considéré comme le temps de mesure de M par E .
- Si l'on prend la trace sur E , c'est qu'on ne s'intéresse plus à E . On peut dans ce cas considérer que la mesure de M par E n'est pas eue.
- L'évolution (6.2) ne modifie pas les probabilités d'occupation des états $|\varphi_a\rangle$ de M (puisque $|\varphi_a(t)\rangle$ et $|\varphi_a\rangle$ diffèrent par un facteur de phase). Ceci est dû au fait que H_{SM} et H_{ME} ont été supposés tous deux diagonaux dans la base $\{|\varphi_a\rangle\}$ de M (voir (5.14) et (5.18)). On dit

alors que $\mathcal{E}$ effectue une mesure "non-démolissante" des observables de $\mathcal{M}$ diagonales dans la base $\{|\varphi_a\rangle\}$. La base privilégiée de $\mathcal{M}$ est celle des observables de $\mathcal{M}$ sur lesquelles $\mathcal{E}$ effectue en permanence une mesure non-démolissante ("P.N.D.")

b - La mesure de $\mathcal{M}$ par $\mathcal{E}$ permet de résoudre deux des difficultés d'une théorie quantique de la mesure.

(i) Plus d'ambiguïté sur la grandeur de $\mathcal{S}$ mesurée par $\mathcal{M}$

- La comparaison de (6.1) et (6.2) montre tout d'abord que l'interaction avec l'environnement laisse intactes les corrélations entre $|\varphi_a\rangle$ et $|\varphi_b\rangle$, $|\varphi_a\rangle$ et $|\varphi_b\rangle$...

- En changeant de base pour $\mathcal{S}$, $\{|\varphi_a\rangle\} \rightarrow \{|\psi_\nu\rangle\}$, on peut écrire $|\varphi_a\rangle = \sum_\nu |\psi_\nu\rangle \langle \psi_\nu | \varphi_a \rangle$, et par suite (6.1) sous la forme

$$|\Psi_{\mathcal{S}\mathcal{M}}(0)\rangle = \sum_\nu |\psi_\nu\rangle \otimes |\Omega_\nu\rangle \quad (6.4)$$

$$\text{où } |\Omega_\nu\rangle = \sum_a c_a \langle \psi_\nu | \varphi_a \rangle |\varphi_a\rangle \quad (6.5)$$

est un état de $\mathcal{E}$ pouvant être considéré comme corrélé avec $|\psi_\nu\rangle$. En présence de $\mathcal{E}$, comme $|\varphi_a\rangle$ se corrèle avec $|\chi_a(t)\rangle$, le vecteur $|\Omega_\nu\rangle \otimes |\chi(0)\rangle$ de $\mathcal{M} + \mathcal{S}$ devient à l'instant t

$$|\Omega_\nu\rangle \otimes |\chi(0)\rangle \rightarrow \sum_a c_a \langle \psi_\nu | \varphi_a \rangle |\varphi_a(t)\rangle \otimes |\chi_a(t)\rangle \quad (6.6)$$

ce qui donne pour l'état de $\mathcal{S} + \mathcal{M} + \mathcal{E}$ à l'instant t

$$|\Psi_{\mathcal{S}+\mathcal{M}+\mathcal{E}}(t)\rangle = \sum_\nu |\psi_\nu\rangle \otimes \left[\sum_a c_a \langle \psi_\nu | \varphi_a \rangle |\varphi_a(t)\rangle \otimes |\chi_a(t)\rangle \right] \quad (6.7)$$

Dès que les vecteurs $|\chi_a(t)\rangle$ deviennent orthogonaux les uns aux autres, le vecteur de $\mathcal{S} + \mathcal{M}$ figurant dans le crochet de (6.7) n'est plus un produit d'un vecteur de $\mathcal{M}$ par un vecteur de $\mathcal{E}$, et les corrélations initiales entre $|\psi_\nu\rangle$ et $|\Omega_\nu\rangle$, figurant dans (6.4), ont disparu : l'état $|\psi_\nu\rangle$ de $\mathcal{S}$ ne reste pas corrélé avec un état bien défini de $\mathcal{M}$.

Il y a donc une seule base $\{|\varphi_a\rangle\}$ de $\mathcal{M}$ dans laquelle les corrélations $\mathcal{S} - \mathcal{M}$ ne sont pas brouillées par $\mathcal{E}$. C'est la base de $\mathcal{M}$ qui diagonalise $H_{\mathcal{M}\mathcal{E}}$. Les observables de $\mathcal{S}$ mesurées par $\mathcal{M}$ sont celles qui sont diagonales dans la base $\{|\varphi_a\rangle\}$ corrélée avec la base privilégiée $\{|\varphi_a\rangle\}$ de $\mathcal{M}$. C'est donc finalement la forme de l'interaction avec $\mathcal{E}$ qui fixe les grandeurs de $\mathcal{S}$ mesurées par $\mathcal{M}$.

(ii) les cohérences quantiques de $\mathcal{S} + \mathcal{M}$ dans la base $\{|\varphi_a\rangle \otimes |\varphi_b\rangle\}$ sont détruites.

- les cohérences quantiques de $\rho_{\mathcal{S}\mathcal{M}}(t) = \text{Tr}_{\mathcal{E}} |\Psi_{\mathcal{S}\mathcal{M}\mathcal{E}}(t)\rangle \langle \Psi_{\mathcal{S}\mathcal{M}\mathcal{E}}(t)|$ entre $|\varphi_a\rangle$ et $|\varphi_b\rangle$ sont réduites par rapport à celles de $|\Psi_{\mathcal{S}\mathcal{M}}(0)\rangle \langle \Psi_{\mathcal{S}\mathcal{M}}(0)|$ par un facteur $\langle \chi_b(t) | \chi_a(t) \rangle$.

- Comme les produits scalaires $\langle \chi_b(t) | \chi_a(t) \rangle$ sont devenus nuls si $b \neq a$ au bout d'un temps T_2 , les cohérences quantiques de $\mathcal{S} + \mathcal{M}$ sont détruites au bout du même temps. Le temps T_2 peut donc être considéré comme le temps de relaxation des cohérences quantiques de $\mathcal{S} + \mathcal{M}$ dans la base privilégiée, et aussi, comme nous l'avons vu plus haut, comme le temps de mesure de $\mathcal{M}$ par $\mathcal{E}$.

c - Règles de superselection

- Au bout d'un temps T_2 , l'état de $\mathcal{S} + \mathcal{M}$ peut être considéré comme

un mélange statistique d'états $|u_a\rangle \otimes |\varphi_a\rangle, |u_b\rangle \otimes |\varphi_b\rangle \dots$ avec des poids $|c_a|^2, |c_b|^2 \dots$. Cela veut-il dire que $S+M$ ne peut être trouvé que dans l'un de ces états seulement ?

- Il est bien connu en mécanique quantique que plusieurs interprétations peuvent être données d'un mélange statistique. Considérons pour simplifier un système à 2 états $|\uparrow\rangle$ et $|\downarrow\rangle$ décrit par le mélange

$$\rho = 0,6 |\uparrow\rangle\langle\uparrow| + 0,4 |\downarrow\rangle\langle\downarrow| \quad (6.8)$$

Une première manière de se représenter cet état est de le considérer comme l'état représentatif d'un ensemble de 100 spins, dont 60 sont dans l'état $|\uparrow\rangle$ et 40 dans l'état $|\downarrow\rangle$. Mais on peut tout aussi bien écrire

$$\begin{aligned} \rho &= 0,2 |\uparrow\rangle\langle\uparrow| + 0,4 (|\uparrow\rangle\langle\uparrow| + |\downarrow\rangle\langle\downarrow|) \\ &= 0,2 |\uparrow\rangle\langle\uparrow| + 0,4 |\otimes\rangle\langle\otimes| + 0,4 |\otimes\rangle\langle\otimes| \end{aligned} \quad (6.9)$$

ce qui fait apparaître ρ comme l'état représentatif de 100 spins dont 20 sont dans l'état $|\uparrow\rangle$, 40 dans l'état $|\otimes\rangle$, 40 dans l'état $|\otimes\rangle$.

- Un raisonnement analogue peut être fait pour le mélange

$$\rho = \sum_a |c_a|^2 |\varphi_a\rangle\langle\varphi_a| \quad (6.10)$$

Mais si on arrive à mettre ρ sous forme d'un autre mélange faisant intervenir des projecteurs $|\Omega_\gamma\rangle\langle\Omega_\gamma|$ sur des états $|\Omega_\gamma\rangle$ n'appartenant pas à la base $\{|\varphi_a\rangle\}$, l'interaction avec E fera disparaître très rapidement les cohérences quantiques apparaissant dans le développement de $|\Omega_\gamma\rangle$ sur la base $\{|\varphi_a\rangle\}$, de sorte que les états du nouveau mélange se transformeront très vite en état $|\varphi_a\rangle$, ou $|\varphi_b\rangle$, ou $|\varphi_c\rangle \dots$

- L'interaction de M avec E interdit donc à M d'être dans une superposition linéaire des états de la base privilégiée $\{|\varphi_a\rangle\}$, cette interdiction n'étant d'ailleurs valable qu'à des échelles de temps plus longues que T_2 . Une telle interdiction correspond à ce qu'on appelle une "règle de superselection". De telles règles ont été parfois postulées pour imposer à M d'avoir un comportement classique dans la base $\{|\varphi_a\rangle\}$. Dans la théorie de Zurek, de telles règles apparaissent comme une conséquence du couplage avec E .

d - L'information n'est pas perdue - Elle est transférée.

- Les états $|\Psi_{SM_E}(0)\rangle$ et $|\Psi_{SM_E}(t)\rangle$ figurant en (6.2) sont tous deux des états purs, d'entropie nulle. Aucune perte d'information ne se produit au cours du temps à cause de l'interaction avec E .

- Par contre, alors que $\rho_{SM}(0)$ correspond à un cas pur, $\rho_{SM}(t)$ est un mélange statistique d'états, d'entropie plus grande que celle de $\rho_{SM}(0)$. Le fait de prendre la trace sur E a fait perdre de l'information. C'est l'information qui est associée aux corrélations apparues entre M et E par suite de leur interaction, information à laquelle on renonce quand on prend la trace sur E .

- Revenons à $S+M+E$. Comme l'information totale reste constante, l'information gagnée par M sur E et associée aux corrélations $M-E$ doit s'accompagner d'une perte d'information. En fait, M , en gagnant de l'information sur E , en perd sur S . Avant

d'interagir avec E , M est corrélé avec S dans plusieurs bases différentes $\{|u_a\rangle\}$ et $\{|p_a\rangle\}$, $\{|v_y\rangle\}$ et $\{|z_y\rangle\}$... L'établissement de nouvelles corrélations entre M et E brouille les corrélations entre $\{|v_y\rangle\}$ et $\{|z_y\rangle\}$.

- C'est ce transfert d'information, qui n'affecte pas les corrélations entre $\{|u_a\rangle\}$ et $\{|p_a\rangle\}$, qui rend la base $\{|p_a\rangle\}$ de M privilégiée : c'est la seule base où subsistent des corrélations entre S et M . De plus, on voit sur (6.2) que, dans l'état $|\psi_{SM}(t)\rangle$, $|u_a\rangle$ est corrélé, non seulement à $|p_a\rangle$, mais aussi à $|x_a(t)\rangle$. Le transfert d'information de $S-M$ à $M-E$ s'accompagne donc d'un renforcement des corrélations concernant les états $\{|u_a\rangle\}$ de S , puisqu'on peut considérer maintenant que, non seulement M , mais aussi E , mesure les observables de S diagonales dans la base $\{|u_a\rangle\}$.

- Notons enfin que l'information associée aux corrélations apparaissant entre M et E n'est pas aisément accessible. Par suite du très grand nombre de degrés de liberté de E , des expériences sensibles à ces corrélations, bien que théoriquement envisageables, sont de plus en plus difficiles à réaliser en pratique quand la taille de E croît. C'est cette fuite d'information liée à des mesures de plus en plus difficiles à faire qui peut expliquer l'irréversibilité du système quand on se restreint aux corrélations plus aisément accessibles, celles existant entre S et M .

e - L'effet de M sur E est aussi important que l'effet de E sur M

- Dans les traitements usuels (comme ceux utilisant l'équation pilote), l'accent est mis sur la dissipation de M produite par l'action de E sur M . On prend la trace sur E et on étudie comment l'opérateur densité réduit de M évolue au cours du temps.

- Le traitement donné dans le cours V montre clairement que E est également perturbé par M . Suivant que M est dans $|p_a\rangle$ ou $|p_b\rangle$, l'évolution de E n'est pas la même : E évolue vers $|x_a(t)\rangle$ ou $|x_b(t)\rangle$, et c'est parce que $|x_a(t)\rangle$ et $|x_b(t)\rangle$ deviennent orthogonaux au bout d'un certain temps T_2 que les cohérences quantiques réduites de M sont détruites. La notion de dissipation est donc étroitement liée à celle de corrélation quantique.

- Dans certains cas, si E est un système à très petit nombre de degrés de liberté, l'interaction $M-E$ peut faire apparaître des corrélations suffisantes entre M et E pour faire disparaître les cohérences quantiques de M , et il semble alors peu approprié de parler de dissipation pour M . Par exemple, dans le § 3 b du cours III, nous avons considéré un spin qui passe à travers 2 cavités monomodes et qui se retrouve à la sortie dans le même état qu'à l'entrée. Le fait que les effets d'interférence, observables en l'absence des cavités, disparaissent est davantage dû à une corrélation parfaite entre le chemin suivi par le spin dans l'interféromètre et l'état du champ (monomode donc à 1 seul degré de liberté) dans les 2 cavités qu'à une dissipation.

f - Liens avec le point de vue de Copenhague

- Dans le point de vue de Copenhague, l'accent est mis sur le fait que les appareils de mesure doivent être analysés en termes classiques.

Mais on ne précise pas quel est le critère qui fait qu'un appareil de mesure, constitué en fait d'objets quantiques comme des atomes, des noyaux..., peut être considéré comme un objet classique.

- Dans la théorie de Zurek, ce critère apparaît plus clairement. C'est l'interaction avec l'environnement E qui privilégie une base de M , dans laquelle les cohérences réduites de M sont détruites très rapidement, et dans laquelle M se comporte comme un objet classique. Les états de S qui sont mesurés par M sont les états de S qui sont corrélés avec les états de la base de M dans laquelle M a un comportement classique puisque l'interaction avec E l'empêche d'être dans une superposition linéaire de ces états (règles de sélection induites par E). En d'autres termes, le caractère classique d'un système n'est pas une propriété intrinsèque de ce système. Il est déterminé par l'interaction avec l'environnement qui impose des règles de superselection dans une certaine base dans laquelle le système apparaît comme classique.

- Notons enfin que la séparation entre M et E n'est pas forcément aussi tranchée qu'il y paraît. M peut être constitué par un petit nombre de degrés de liberté de l'appareil de mesure, ceux qui interagissent directement avec le système microscopique S . E est alors l'ensemble des autres degrés de liberté de l'appareil de mesure couplés à ceux qui sont directement en contact avec S , ainsi que l'environnement externe proprement dit de l'appareil.

⑤ Etude d'un modèle permettant de suivre l'évolution de $S+M$ en présence d'interactions $S-M$ et $M-E$ (référence 2)

a - Le modèle de Walls-Collet-Milburn. Hamiltonien.

- S est un oscillateur harmonique à 1 dimension, de fréquence ω_0 , d'opérateurs de création et d'annihilation a et $a^\dagger$

$$H_S = \hbar \omega_0 a^\dagger a \quad (6.11)$$

S est par exemple un mode du champ électromagnétique.

- M est un autre oscillateur harmonique à 1 dimension, de fréquence ω et d'opérateurs b et $b^\dagger$

$$H_M = \hbar \omega b^\dagger b \quad (6.12)$$

M est par exemple un autre mode du champ électromagnétique

- L'interaction $S-M$ est décrite par l'hamiltonien

$$H_{SM} = \frac{\hbar}{2} a^\dagger a (b \eta^* e^{i\omega t} + b^\dagger \eta e^{-i\omega t}) \quad (6.13)$$

où $\eta e^{-i\omega t}$ est la partie de fréquence positive d'un champ classique de fréquence ω .

Physiquement, H_{SM} peut décrire un processus de mélange à 4 ondes (Fig. 1) : absorption d'un photon de l'onde S (opérateur a) ; émission induite d'un photon de l'onde S (opérateur $a^\dagger$) ; absorption d'un photon de l'onde $\eta e^{-i\omega t}$ (suffisamment intense pour pouvoir être traité classiquement) ; émission d'un photon de l'onde M (opérateur $b^\dagger$). Le processus de la figure 1, associé à l'hamiltonien (6.13) fait apparaître un champ dans le mode M , proportionnellement au nombre de photons dans le mode S et à l'amplitude η de l'onde classique. L'amplitude du champ apparaissant

dans le mode m est une mesure du nombre de photons dans le mode S

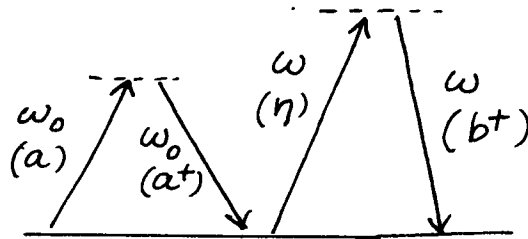


Fig. 1

- E est un réservoir d'oscillateurs harmoniques i , au zéro absolu, de fréquences ω_i et d'opérateurs a_i et $a_i^\dagger$, le couplage $m-E$ étant linéaire en $b, b^\dagger, a_i, a_i^\dagger$

$$H_E = \sum_i \hbar \omega_i a_i^\dagger a_i \quad (6.14)$$

$$H_{mE} = \sum_i g_i (b a_i^\dagger + b^\dagger a_i) \quad (6.15)$$

g_i est une constante de couplage. Les ω_i forment un quasi-continuum assez large pour que l'effet de E sur m puisse être décrit par une équation pilote. Les g_i sont suffisamment petits pour que l'amortissement de m soit faible: $\gamma \ll \omega$ où γ est le taux d'amortissement de m . On peut alors utiliser l'équation pilote établie dans le cours 88-89 (voir formule (9.51) de ce cours, et aussi la référence 3)

- Comme $a^\dagger a$ commute avec H_m et H_S et que E n'agit pas sur S , $a^\dagger a$ est une constante du mouvement. Si S est dans l'état propre $|n\rangle$ de $a^\dagger a$ (avec $n=0,1,2,\dots$), il y reste au cours du temps. L'opération de mesure de S par m est donc une opération de mesure idéale.

b - Équation pilote de $S+m$

- Nous nous plaçons en représentation d'interaction par rapport à $H_0 + H_m$

$$\tilde{\rho}_{sm}(t) = e^{i(H_0 + H_m)t/\hbar} \rho_{sm}(t) e^{-i(H_0 + H_m)t/\hbar} \quad (6.16.2)$$

$$\tilde{H}_{sm} = e^{i(H_0 + H_m)t/\hbar} H_{sm} e^{-i(H_0 + H_m)t/\hbar} = \frac{\hbar}{2} a^\dagger a (b \eta^* + b^\dagger \eta) \quad (6.16.b)$$

Le passage en représentation d'interaction fait disparaître la dépendance temporelle de $H_{sm}(t)$ (comme un "passage dans le référentiel tournant").

- En l'absence de E , l'équation d'évolution de $\tilde{\rho}_{sm}$ est

$$\frac{d}{dt} \tilde{\rho}_{sm} = \frac{1}{i\hbar} [\tilde{H}_{sm}, \tilde{\rho}_{sm}] = \frac{1}{2} [a^\dagger a (\varepsilon b^\dagger - \varepsilon^* b), \tilde{\rho}_{sm}] \quad (6.17)$$

avec

$$\varepsilon = \eta / i \quad \varepsilon^* = -\eta^* / i \quad (6.18)$$

- Pour décrire l'effet de H_{mE} (qui n'agit pas sur S), il suffit d'ajouter à (6.17) les termes de l'équation pilote (9.51) du cours 88-89 (sauf le terme $-i\omega [b^\dagger b, \rho_{sm}]$, puisqu'on est en représentation d'interaction). On obtient finalement (en omettant les indices sm et ρ pour simplifier les notations)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \rho = & \frac{1}{2} [a^\dagger a (\varepsilon b^\dagger - \varepsilon^* b), \rho] \\ & - \frac{\gamma}{2} [b^\dagger b \rho + \rho b^\dagger b] + \gamma b \rho b^\dagger \end{aligned} \quad (6.19)$$

La 1^{ère} ligne de (6.19) décrit l'effet sur $S+M$ de l'interaction $S-M$, la 2^{ème} ligne, celle de l'interaction $M-E$.

- Pour comprendre la signification physique du paramètre γ apparaissant dans la 2^{ème} ligne de (6.19), calculons l'évolution de la valeur moyenne de l'amplitude du champ b dans le mode M . Nous supposons S dans l'état $|n\rangle$, ce qui permet de remplacer $a+a^\dagger$ par n dans la 1^{ère} ligne de (6.19). En multipliant les 2 membres de (6.19) par b , en prenant la trace et en utilisant l'invariance d'une trace dans une permutation circulaire, de même que $[b, b^\dagger] = 1$, on obtient

$$\frac{d}{dt} \langle b \rangle = \frac{\epsilon n}{2} - \frac{\gamma}{2} \langle b \rangle \quad (6.20)$$

Le 1^{er} terme de (6.20) décrit comment l'amplitude moyenne croît proportionnellement au nombre n de photons dans le mode S et à l'amplitude ϵ de l'onde classique ; le 2^{ème} terme décrit l'amortissement de $\langle b \rangle$ avec un temps $\gamma/2$ sous l'effet du couplage avec E . Si, à $t=0$, $\langle b \rangle = 0$, la solution de (6.20) s'écrit

$$\langle b \rangle(t) = \alpha_n(t) = \frac{\epsilon n}{\gamma} (1 - e^{-\gamma t/2}) \quad (6.21)$$

C. Solution de l'équation pilote (voir aussi l'Appendice)

- L'équation pilote (6.19) est suffisamment simple pour qu'on puisse en trouver une solution analytique. En effet, si l'on considère la fonction caractéristique adaptée à l'ordre normal associé à ρ (voir cours X du cours 88-89)

$$C_N(\lambda, \lambda^*) = \text{Tr}(\rho e^{\lambda b^\dagger} e^{-\lambda^* b}) \quad (6.22)$$

on peut montrer que l'équation d'évolution de $C_N(\lambda, \lambda^*)$ déduite de (6.19) est une équation aux dérivées partielles linéaire du 1^{er} ordre par rapport à λ, λ^*, t . Cette équation peut être alors résolue par la méthode des caractéristiques (voir cours V1 du cours 88-89) le passage de $C_N(\lambda, \lambda^*)$ à ρ s'effectue ensuite grâce à (6.22)

- Nous nous contenterons ici de donner les résultats d'un tel calcul (voir l'Appendice pour plus de détails).

Nous supposons qu'à $t=0$

$$|\Psi_S(0)\rangle = \sum_n c_n |n\rangle \quad |\Psi_M(0)\rangle = |0\rangle \quad (6.23)$$

de sorte que

$$\rho(0) = \sum_n \sum_{n'} c_n c_{n'}^* (|n\rangle \langle n'|)_S \otimes (|0\rangle \langle 0|)_M \quad (6.24)$$

S est dans une superposition linéaire d'états $|n\rangle$, M est dans l'état fondamental $|0\rangle$.

On obtient alors pour $\rho(t)$ le résultat suivant

$$\rho(t) = \sum_n \sum_{n'} c_n c_{n'}^* \exp \left\{ \frac{|\epsilon|^2}{\gamma^2} (n-n')^2 \left(1 - \frac{\gamma t}{2} - e^{-\gamma t/2} \right) \right\} \times \\ \times (|n\rangle \langle n'|)_S \otimes \left(\frac{|\alpha_n(t)\rangle \langle \alpha_{n'}(t)|}{\langle \alpha_{n'}(t) | \alpha_n(t) \rangle} \right)_M \quad (6.25)$$

où $|\alpha_n(t)\rangle$ est l'état cohérent du mode M correspondant à l'amplitude classique $\alpha_n(t)$ écrite en (6.21).

d - Discussion physique

- Considérons tout d'abord l'exponentielle de la 1^{ère} ligne de (6.25). Pour $n=n'$, elle vaut 1. Pour $n \neq n'$, c'est une fonction décroissante de t , car $1 - \gamma \frac{t}{2} - e^{-\gamma t/2}$ est négatif et a un module qui croît avec t . Pour $\gamma t \gg 1$, on peut négliger $e^{-\gamma t/2}$ devant $1 - \gamma \frac{t}{2} \sim -\gamma \frac{t}{2}$, de sorte que l'exponentielle vaut alors

$$\exp \left\{ -\frac{\gamma t}{2} \frac{|\mathcal{E}|^2}{\gamma^2} (n-n')^2 \right\} \quad (6.26)$$

On obtient une exponentielle qui tend très vite vers 0, avec un temps plus grand que $\frac{\gamma}{2}$ par un facteur $\frac{|\mathcal{E}|^2}{\gamma^2} (n-n')^2$, qui peut encore s'écrire, compte tenu de (6.21)

$$\frac{|\mathcal{E}|^2}{\gamma^2} (n-n')^2 = |\alpha_n(\infty) - \alpha_{n'}(\infty)|^2 \quad (6.27)$$

Le facteur d'augmentation du temps de décroissance est donc proportionnel au carré de la distance entre les 2 valeurs moyennes dans l'état stationnaire, $\alpha_n(\infty)$ et $\alpha_{n'}(\infty)$, des amplitudes du champ dans le mode m correspondant à n photons et n' photons dans le mode s .

- Le produit scalaire $\langle \alpha_{n'}(t) | \alpha_n(t) \rangle$, figurant au dénominateur de la 2^{ème} ligne de (6.25), introduit lui aussi une dépendance temporelle. Pour $\gamma t \gg 1$, le module de ce produit scalaire devient constant et égal à

$$|\langle \alpha_n(\infty) | \alpha_{n'}(\infty) \rangle| = \exp \left\{ -\frac{1}{2} |\alpha_n(\infty) - \alpha_{n'}(\infty)|^2 \right\} = e^{-\frac{|\mathcal{E}|^2}{2\gamma^2} (n-n')^2} \quad (6.28)$$

Il est du même ordre que la contribution du terme 1 de la parenthèse de la 1^{ère} ligne de (6.25) que nous avons négligé devant celle de $-\gamma t/2$ pour $\gamma t \gg 1$.

- Pour $\gamma t \gg 1$, on peut donc négliger les termes non-diagonaux de (6.27), et ceci d'autant mieux que $|\mathcal{E}|^2/\gamma^2$ est plus grand que 1, ce qui donne

$$\rho(\infty) = \sum_n |\mathcal{C}_n|^2 \left(|n\rangle \langle n| \right)_s \otimes \left(|\alpha_n(\infty)\rangle \langle \alpha_n(\infty)| \right)_m \quad (6.29)$$

On a utilisé $\langle \alpha_n(\infty) | \alpha_n(\infty) \rangle = 1$

On trouve donc que, au bout d'un temps de l'ordre de quelques γ^{-1} , l'opérateur densité de $s+m$ est devenu un mélange statistique, avec des poids $|\mathcal{C}_n|^2$, d'états où s est dans l'état $|n\rangle$ et m dans l'état cohérent $|\alpha_n(\infty)\rangle$ correspondant à la valeur moyenne stationnaire de l'amplitude du champ dans le mode m quand il y a n photons dans le mode s .

Pour $|\mathcal{E}|/\gamma$ suffisamment grand, les distances $|\alpha_n(\infty) - \alpha_{n'}(\infty)|$ entre les points représentant dans le plan complexe les états cohérents $|\alpha_n(\infty)\rangle$ et $|\alpha_{n'}(\infty)\rangle$, de l'ordre de $(n-n')|\mathcal{E}|/\gamma$, sont beaucoup plus grandes que la largeur de chaque état cohérent, de l'ordre de 1, de sorte que les états $|\alpha_n(\infty)\rangle$ et $|\alpha_{n'}(\infty)\rangle$ sont pratiquement orthogonaux (voir aussi (6.28)). La corrélation entre les états $|n\rangle$ de s et $|\alpha_n(\infty)\rangle$ de m est alors parfaite, l'environnement détruisant les cohérences quantiques entre $|n\rangle \otimes |\alpha_n(\infty)\rangle$ et $|n'\rangle \otimes |\alpha_{n'}(\infty)\rangle$ au bout d'un temps de l'ordre de quelques γ^{-1} .

- D'après (6.29), la base privilégiée de m ("base de l'aiguille") est formée d'états cohérents $\{|\alpha_n(\infty)\rangle\}$. Effectivement, l'hamiltonien d'interaction H_{mE} (voir (6.15)) fait intervenir les opérateurs b et $b^\dagger$ et les états $|\alpha_n(\infty)\rangle$ sont bien les états propres de l'opérateur b de m apparaissant dans H_{mE} .
- L'amplitude moyenne stationnaire $\alpha_n(\infty)$ du champ dans le mode m , à l'issue du processus de mesure, peut être aussi grande que l'on veut si $|E|/8$ est suffisamment grand. Le mécanisme de mesure étudié dans ce modèle contient donc un processus d'amplification (mélange à 4 ondes) limité par les pertes et conduit à des états de m (états de l'aiguille) qui sont quasi-classiques, comme on s'y attend pour une "aiguille macroscopique".

Références

- (1) Articles de Zurek - Mêmes références que dans le cours IV, notamment Phys. Rev. D 24, 1516 (1981) et 26, 1862 (1982)
- (2) D.F. Walls, M.J. Collet, G.J. Milburn, Phys. Rev. D 32, 3208 (1985)
- (3) C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, G. Grynberg, "Processus d'interaction entre photons et atomes", Interéditions et Editions du CNRS Paris 1988, Complément B, V.

Appendice (les numéros soulignés réfèrent à des formules du cours 88-89)

- Cherchons une solution de (6.19) de la forme

$$\rho(t) = \sum_{nn'} (|n\rangle\langle n'|)_s \otimes (\rho_{nn'})_m \quad (6.30)$$

où $\rho_{nn'}$ est un opérateur de m satisfaisant, d'après (6.19), à l'équation

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{nn'} = & \frac{n}{2} (\epsilon b^\dagger - \epsilon^* b) \rho_{nn'} - \frac{n'}{2} \rho_{nn'} (\epsilon b^\dagger - \epsilon^* b) \\ & + \frac{\gamma}{2} [2b\rho_{nn'}b^\dagger - b^\dagger b\rho_{nn'} - \rho_{nn'}b^\dagger b] \end{aligned} \quad (6.31)$$

D'après (6.24),

$$\rho_{nn'}(t=0) = c_n c_{n'}^* (|0\rangle\langle 0|)_m \quad (6.32)$$

- Soit

$$C_{nn'}(\lambda, \lambda^*, t) = \text{Tr} [e^{\lambda b^\dagger} e^{-\lambda^* b} \rho_{nn'}(t)] \quad (6.33)$$

la fonction caractéristique, adaptée à l'ordre normal, associé à $\rho_{nn'}(t)$. En utilisant (10.14) et (10.15), on obtient

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + a_1(\lambda, \lambda^*, t) \frac{\partial}{\partial \lambda} + a_2(\lambda, \lambda^*, t) \frac{\partial}{\partial \lambda^*} \right] C_{nn'}(\lambda, \lambda^*, t) = b(\lambda, \lambda^*, t) C_{nn'}(\lambda, \lambda^*, t) \quad (6.34)$$

avec

$$\begin{cases} a_1(\lambda, \lambda^*, t) = a_2^*(\lambda, \lambda^*, t) = \frac{\gamma}{2} \lambda - \frac{n-n'}{2} \epsilon \end{cases} \quad (6.35)$$

$$b(\lambda, \lambda^*, t) = -\frac{1}{2} (n\epsilon\lambda^* - n'\epsilon^*\lambda) \quad (6.36)$$

Il faut résoudre (6.34) avec la condition initiale (6.32) qui donne

$$\begin{aligned} C_{nn'}(\lambda, \lambda^*, 0) &= c_n c_{n'}^* \text{Tr} (e^{\lambda b^\dagger} e^{-\lambda^* b} |0\rangle\langle 0|) \\ &= c_n c_{n'}^* \langle 0 | e^{\lambda b^\dagger} e^{-\lambda^* b} | 0 \rangle = c_n c_{n'}^* \end{aligned} \quad (6.37)$$

- Equation des caractéristiques (voir cours VI du cours 88-89) (VI-10)

$$\frac{dt}{1} = \frac{d\lambda}{a_1(\lambda, \lambda^*)} \rightarrow \frac{d\lambda}{dt} = a_1(\lambda, \lambda^*) = \frac{\gamma}{2} \lambda - \frac{n-n'}{2} \varepsilon \quad (6.38)$$

Solution correspondant à $\lambda = \lambda_0$ pour $t = 0$

$$\lambda(t, \lambda_0) = \left[\lambda_0 - (n-n') \frac{\varepsilon}{\gamma} \right] e^{\gamma t/2} + (n-n') \frac{\varepsilon}{\gamma} \quad (6.39)$$

Inversion de cette formule donnant le point λ_0 par lequel passe en $t=0$ la caractéristique passant en λ à t

$$\lambda_0 = (n-n') \frac{\varepsilon}{\gamma} + \left[\lambda - (n-n') \frac{\varepsilon}{\gamma} \right] e^{-\gamma t/2} \quad (6.40)$$

- Le long d'une caractéristique, on a donc (voir aussi (6.29))

$$\frac{d}{dt} C_{nn'}(\lambda(t, \lambda_0), \lambda^*(t, \lambda_0^*), t) = b(\lambda(t, \lambda_0), \lambda^*(t, \lambda_0^*), t) C_{nn'}(\lambda(t, \lambda_0), \lambda^*(t, \lambda_0^*), t) \quad (6.41)$$

où d'après (6.36) et (6.39)

$$b(\lambda(t, \lambda_0), \lambda^*(t, \lambda_0^*), t) = \frac{1}{2} (n' \varepsilon^* \lambda_0 - n \varepsilon \lambda_0^*) e^{\gamma t/2} + (n-n')^2 \frac{|\varepsilon|^2}{2\gamma} e^{\gamma t/2} - (n-n')^2 \frac{|\varepsilon|^2}{2\gamma} \quad (6.42)$$

La solution de (6.41), correspondant à la condition initiale (6.37) s'écrit (voir aussi (6.30))

$$C_{nn'}(\lambda(t, \lambda_0), \lambda^*(t, \lambda_0^*), t) = c_n c_{n'}^* \exp \left\{ \int_0^t dt' b(\lambda(t', \lambda_0), \lambda^*(t', \lambda_0^*), t') \right\} \quad (6.43)$$

Après intégration de (6.42) entre 0 et t et report dans l'exponentielle de (6.43), il faut enfin remplacer λ_0 par son expression (6.40) en fonction de λ , ce qui donne finalement (voir aussi (6.32))

$$C_{nn'}(\lambda, \lambda^*, t) = c_n c_{n'}^* \exp \left\{ \frac{|\varepsilon|^2}{\gamma^2} (n-n')^2 \left(1 - \frac{\gamma t}{2} - e^{-\gamma t/2} \right) \right\} \times \exp \left\{ \alpha_{n'}^*(t) \lambda - \alpha_n(t) \lambda^* \right\} \quad (6.44)$$

où $\alpha_n(t)$ est donné par (6.21).

- Il suffit enfin de noter que l'exponentielle de la 2^{ème} ligne de (6.44) est la fonction caractéristique adaptée à l'ordre normal et associée à $\frac{|\alpha_n(t)\rangle \langle \alpha_{n'}(t)|}{\langle \alpha_{n'}(t) | \alpha_n(t) \rangle}$ puisque

$$\begin{aligned} \text{Tr} \left\{ e^{\lambda b^\dagger} e^{-\lambda^* b} \frac{|\alpha_n(t)\rangle \langle \alpha_{n'}(t)|}{\langle \alpha_{n'}(t) | \alpha_n(t) \rangle} \right\} &= \frac{\langle \alpha_{n'}(t) | e^{\lambda b^\dagger} e^{-\lambda^* b} | \alpha_n(t) \rangle}{\langle \alpha_{n'}(t) | \alpha_n(t) \rangle} \\ &= \exp \left\{ \alpha_{n'}^*(t) \lambda - \alpha_n(t) \lambda^* \right\} \end{aligned} \quad (6.45)$$

pour montrer que (6.25) est bien la solution de l'équation pilote (6.19) correspondant à la condition initiale (6.24).