

① Le modèle de Von Neumann (refs 1-2)

a. Hypothèses simplificatrices

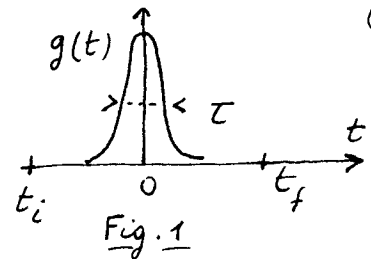
- Système S sur lequel on fait la mesure, d'observables $A, B, \dots$
Particule P , de masse M , de position X , d'impulsion P , et qui va être considérée comme l'appareil de mesure
- Hamiltonien d'interaction $S-P$

$$H_{SP} = g(t) A P \quad (2.1)$$

A : observable de S

P : impulsion de P

$g(t)$: fonction donnée de t , très centrée autour de $t=0$ et réelle que



$$\int g(t) dt = g \quad (2.2)$$

On "branche" l'interaction entre S et P pendant un temps très court.

- La durée τ de l'interaction est suffisamment courte pour que, pendant une durée de l'ordre de quelques τ , on puisse négliger l'évolution propre due aux hamiltoniens propres H_S et H_P de S et P .

Par exemple, la masse M de P est suffisamment grande pour qu'on puisse négliger le déplacement de P pendant τ ainsi que l'étalement de son paquet d'ondes.

- l'équation satisfaite par l'opérateur d'évolution $U(t, t_i)$ (t_i : temps initial - voir Fig. 1)

$$i\hbar \frac{d}{dt} U(t, t_i) = g(t) A P U(t, t_i) \quad (2.3)$$

s'intègre alors aisément (A et P commutent entre eux) pour donner à l'instant final t_f

$$U(t_f, t_i) = \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \left(\int_{t_i}^{t_f} g(t) dt \right) A P \right\} = e^{-igAP/\hbar} \quad (2.4)$$

b. Etat du système global après interaction

(i) Cas où l'état initial de $S+P$ est

$$|\psi(t_i)\rangle = |u_n\rangle \otimes |\varphi\rangle \quad (2.5)$$

S est dans l'état propre $|u_n\rangle$ de A de valeur propre a_n (supposée non dégénérée - voir plus loin pour la généralisation)

$$A |u_n\rangle = a_n |u_n\rangle \quad (2.6)$$

P est dans l'état $|\varphi\rangle$, de fonction d'onde $\varphi(x)$, de largeur Δx , localisée autour de $x=0$

- On a alors, compte tenu de (2.4), (2.5) et (2.6)

$$|\psi(t_f)\rangle = U(t_f, t_i) |\psi(t_i)\rangle = |u_n\rangle \otimes |\varphi_n\rangle \quad (2.7)$$

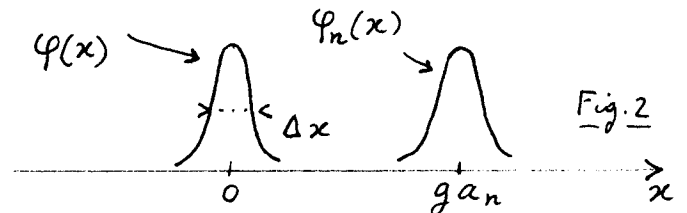
où

$$|\varphi_n\rangle = e^{-i g a_n P / \hbar} |\varphi\rangle \quad (2.8)$$

On reconnaît dans (2.8) l'opérateur de translation $e^{-i g a_n P / \hbar}$ de P . En effet,

$$\begin{aligned} \varphi_n(x) &= \langle x | \varphi_n \rangle = \langle x | e^{-i g a_n P / \hbar} | \varphi \rangle \\ &= \langle x - g a_n | \varphi \rangle = \varphi(x - g a_n) \end{aligned} \quad (2.9)$$

Après interaction avec S dans l'état $|u_n\rangle$ où A a la valeur a_n , P est translatée d'une quantité $g a_n$ (Fig. 2)



Si l'on considère la position de P comme l'"aiguille" d'un appareil de mesure, cette aiguille est centrée sur une valeur, $g a_n$, qui dépend bien de l'état $|u_n\rangle$ dans lequel se trouve S

(ii) Cas où l'état initial de $S + P$ est

$$|\psi(t_i)\rangle = \left(\sum_n c_n |u_n\rangle \right) \otimes |\varphi\rangle \quad (2.10)$$

S est dans une superposition linéaire d'états propres de A . D'après la linéarité de l'équation de Schrödinger, on a alors, compte tenu de (2.5), (2.7) et (2.8)

$$|\psi(t_f)\rangle = \sum_n c_n |u_n\rangle \otimes |\varphi_n\rangle \quad (2.11)$$

c. Propriétés importantes de l'état final du système global

- L'état final (2.11) reflète l'existence de corrélations apparues entre S et P après l'interaction : à chaque état $|u_n\rangle$ de S est associé un état $|\varphi_n\rangle$ de P . Si l'on suppose que la fonction d'onde initiale $\varphi(x)$ de P est suffisamment étroite, c.-à-d. si

$$\Delta x \ll g |a_n - a_m| \quad \text{si } n \neq m \quad (2.12)$$

les fonctions d'ondes $\varphi_n(x)$ et $\varphi_m(x)$ ne se recouvrent pas (si $n \neq m$), de sorte que

$$\langle \varphi_n | \varphi_m \rangle = \delta_{nm} \quad (2.13)$$

La corrélation entre S et P est alors parfaite. A 2 états orthogonaux $|u_n\rangle$ et $|u_m\rangle$ de S sont associés 2 états orthogonaux de P .

- Les probabilités d'occupation des états $|u_n\rangle$ de S , égales à $|c_n|^2$ d'après (2.10) avant interaction, demeurent égales à $|c_n|^2$ après interaction d'après (2.11). C'est en ce sens que

l'opération étudiée plus haut peut être considérée comme une mesure idéale de A (par opposition à des mesures non-idéales comme la détection d'un photon par effet photo-électrique qui détruit le photon détecté).

- L'état final (2.11) est une superposition linéaire de états $|u_n\rangle \otimes |\varphi_n\rangle$ avec des amplitudes c_n , et non un mélange statistique de ces mêmes états avec des poids $|c_n|^2$.
L'un des objets du cours de cette année est précisément de discuter les manifestations physiques de l'existence de ces cohérences quantiques entre $|\varphi_m\rangle \otimes |u_m\rangle$ et $|\varphi_n\rangle \otimes |u_n\rangle$ et de préciser les conditions dans lesquelles il est légitime de les ignorer.

d. Application des postulats de la mesure au système global

- Une fois que S et P ont interagi et que l'état du système global est passé de (2.10) à (2.11), on observe la position X de la particule P et on utilise les postulats de la mesure pour calculer les probabilités des divers résultats possibles.
- Si la largeur Δx de $\varphi(x)$ est suffisamment petite, les états $|\varphi_n\rangle$ peuvent être considérés comme des états propres approchés de X , orthogonaux les uns aux autres (voir (2.13)).
La probabilité de trouver à t_f P dans l'état $|\varphi_n\rangle$ (c'est à dire l'aiguille dans la position q_n) est égale ~~au carré~~ à la norme de la projection de $|\psi(t_f)\rangle$ dans le sous-espace sous-tendu par $|\varphi_n\rangle$, c'est à dire $|c_n|^2 \langle u_n | u_n \rangle = |c_n|^2$.

On trouve le même résultat que si l'on appliquait les postulats de la mesure à S tout seul dans l'état initial $\sum_n c_n |u_n\rangle$ et qu'on posait la question : quelle est la probabilité de trouver q_n quand on mesure A sur S dans cet état?

- La position X de P apparaît donc bien comme la position de l'aiguille d'un appareil mesurant A , puisque la probabilité de trouver cette aiguille centrée en q_n après interaction entre S et P est égale à la probabilité $|c_n|^2$ de trouver q_n pour A avant l'interaction $S-P$.

En d'autres termes, la mesure de A sur S donne le même résultat (au facteur d'échelle q près) que la mesure de X sur P une fois que S et P ont interagi.

e. Quelques généralisations

(i) Valeurs propres dégénérées pour A

$$A |u_n^\alpha\rangle = a_n |u_n^\alpha\rangle \quad (2.14)$$

α indice de dégénérescence

$$\langle u_n^\alpha | u_m^\beta \rangle = \delta_{nm} \delta_{\alpha\beta} \quad (2.15)$$

- Les formules (2.5) et (2.7), (2.10) et (2.11) sont alors modifiées comme suit

$$|\psi(t_i)\rangle = |u_n^\alpha\rangle \otimes |\varphi\rangle \rightarrow |\psi(t_f)\rangle = |u_n^\alpha\rangle \otimes |\varphi_n\rangle \quad (2.16)$$

$$|\psi(t_i)\rangle = \left(\sum_n \sum_\alpha c_n^\alpha |u_n^\alpha\rangle \right) \otimes |\varphi\rangle \rightarrow \sum_n \left(\sum_\alpha c_n^\alpha |u_n^\alpha\rangle \right) \otimes |\varphi_n\rangle \quad (2.17)$$

où $|\varphi_n\rangle$ est toujours donné par (2.8)

- La probabilité de trouver à t_f , S dans l'état $|\varphi_n\rangle$ (c'est-à-dire l'aiguille centrée en g_n) est égale à la norme de la projection de $|\psi(t_f)\rangle$ sur le sous-espace sous-tendu par $|\varphi_n\rangle$, c'est-à-dire à $\sum_\alpha |c_n^\alpha|^2$. On retrouve le même résultat que pour la probabilité de trouver a_n quand on mesure A sur S dans l'état initial $\sum_n \sum_\alpha c_n^\alpha |u_n^\alpha\rangle$.

(ii) Définition générale d'une opération de mesure idéale

- Système S . Le même que plus haut. Equation (2.14)
- Appareil de mesure M . Plus général que la particule S considérée plus haut. Etat initial $|\varphi\rangle$.
- Interaction $S-M$ de durée très brève, telle que, si S est initialement dans un état propre $|u_n^\alpha\rangle$ de A , le système $S+M$ se retrouve après interaction dans l'état $|\psi(t_i)\rangle = |u_n^\alpha\rangle \otimes |\varphi\rangle \rightarrow |\psi(t_f)\rangle = |u_n^\alpha\rangle \otimes |\varphi_n\rangle \quad (2.18)$
L'état de S n'a pas changé, alors que l'état final $|\varphi_n\rangle$ de M dépend de a_n . Cette corrélation est parfaite

$$\langle \varphi_n | \varphi_m \rangle = \delta_{nm} \quad (2.19)$$

- D'après la linéarité de l'équation de Schrödinger, on a alors

$$\left(\sum_n \sum_\alpha c_n^\alpha |u_n^\alpha\rangle \right) \otimes |\varphi\rangle \rightarrow \sum_n \left(\sum_\alpha c_n^\alpha |u_n^\alpha\rangle \right) \otimes |\varphi_n\rangle \quad (2.20)$$

② Succession de 2 opérations de mesure idéales sur S faites avec 2 appareils différents M_A et M_B (ref. 3)

a. Problème étudié - Hypothèses simplificatrices.

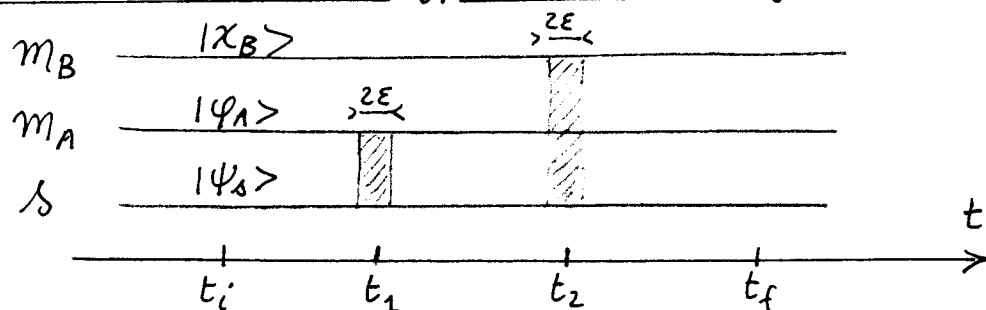


Fig. 3

- A l'instant initial t_i , S est dans $|\psi_S\rangle$, M_A dans $|\varphi_A\rangle$, M_B dans $|X_B\rangle$ (voir Fig. 3)

- L'interaction entre M_A et S est "branchée" entre $t_1 - \epsilon$ et $t_1 + \epsilon$. Elle correspond à une mesure idéale de l'observable A de S effectuée à l'instant t_1 . De même, l'interaction entre M_B et S est "branchée" entre $t_2 - \epsilon$ et $t_2 + \epsilon$ (avec $t_2 - t_1 \gg 2\epsilon$) pour effectuer à t_2 une mesure idéale de B sur S (Voir Fig. 3)
- Pour simplifier l'écriture, on néglige l'évolution propre de M_A et M_B (on pourrait aisément en tenir compte). M_A (M_B) n'évolue donc qu'entre $t_1 - \epsilon$ et $t_1 + \epsilon$ ($t_2 - \epsilon$ et $t_2 + \epsilon$) par suite de l'interaction avec S . Par contre, on tient compte de l'évolution propre de S entre t_i et t_1 , t_1 et t_2 , t_2 et t_f , tout en négligeant l'évolution propre de S pendant les durées 2ϵ de chaque interaction. Toujours pour simplifier l'écriture, on suppose les valeurs propres a_n et b_q de A et B non dégénérées. Par contre, A et B ne commutent pas nécessairement et peuvent avoir des vecteurs propres $|u_n\rangle$ et $|v_q\rangle$ différents

$$A|u_n\rangle = a_n|u_n\rangle \quad B|v_q\rangle = b_q|v_q\rangle \quad (2.21)$$

- Dans ce qui suit, nous allons calculer l'évolution du système global $S + M_A + M_B$ entre t_i et t_f (§ 2b), puis, en appliquant les postulats de la mesure à M_A et M_B à t_f , en déduire les probabilités d'observer les "aiguilles" de M_A et M_B dans des positions données. Comme les mesures sont idéales, nous en déduirons toutes les probabilités concernant les mesures de A à t_1 et B à t_2 (§ 2c). Nous pourrions alors, à partir de cette étude globale sur $S + M_A + M_B$, retrouver la "réduction du paquet d'ondes" qui est généralement postulée quand on considère uniquement S , sans inclure dans le système étudié M_A et M_B (§ 3)

b. Calcul de l'état final du système global $S + M_A + M_B$

- On part de

$$|\Psi(t_i)\rangle = |\Psi_S\rangle \otimes |\varphi_A\rangle \otimes |\chi_B\rangle \quad (2.22)$$

- Entre t_i et $t_1 - \epsilon$, seul S évolue. Si U_S est l'opérateur d'évolution propre de S

$$|\Psi(t_1 - \epsilon)\rangle = (U_S(t_1 - \epsilon, t_i)|\Psi_S\rangle) \otimes |\varphi_A\rangle \otimes |\chi_B\rangle \quad (2.23)$$

Développons l'état de S à l'instant $t_1 - \epsilon$ sur la base $\{|u_n\rangle\}$ des états propres de A

$$U_S(t_1 - \epsilon, t_i)|\Psi_S\rangle = \sum_n |u_n\rangle \langle u_n | U_S(t_1 - \epsilon, t_i) | \Psi_S \rangle \quad (2.24)$$

- Entre $t_1 - \epsilon$ et $t_1 + \epsilon$, M_B n'évolue toujours pas. Comme l'interaction $S - M_A$ correspond à une opération de mesure idéale, le système $S + M_A$, qui est, d'après (2.23) et (2.24), dans l'état $\sum_n c_n |u_n\rangle \otimes |\varphi_A\rangle$ à l'instant $t_1 - \epsilon$ (avec $c_n = \langle u_n | U_S(t_1 - \epsilon, t_i) | \Psi_S \rangle$), se retrouve à l'instant $t_1 + \epsilon$ dans l'état $\sum_n c_n |u_n\rangle \otimes |\varphi_A^n\rangle$ où $|\varphi_A^n\rangle$ est l'état de M_A corrélié avec $|u_n\rangle$ (voir (2.10) et (2.11)). On peut donc écrire

$$|\Psi(t_1 + \epsilon)\rangle = \sum_n \langle u_n | U_S(t_1 - \epsilon, t_i) | \Psi_S \rangle |u_n\rangle \otimes |\varphi_A^n\rangle \otimes |\chi_B\rangle \quad (2.25)$$

On suppose les états $\{|\varphi_A^n\rangle\}$ orthonormés (corrélation parfaite - voir (2.19))

- Entre $t_1 + \epsilon$ et $t_2 - \epsilon$, seul S évolue. Il faut donc faire agir sur (2.25) l'opérateur $U_S(t_2 - \epsilon, t_1 + \epsilon)$. En développant, à l'instant t_2 , le vecteur $U_S(t_2 - \epsilon, t_1 + \epsilon) |u_n\rangle$ sur la base $\{|v_q\rangle\}$ des états propres de B , on obtient

$$|\psi(t_2 - \epsilon)\rangle = \sum_n \sum_q \langle v_q | U_S(t_2 - \epsilon, t_1 + \epsilon) | u_n \rangle \langle u_n | U_S(t_1 - \epsilon, t_i) | \psi_S \rangle \times |v_q\rangle \otimes |\varphi_A^n\rangle \otimes |\chi_B\rangle \quad (2.26)$$

- Entre $t_2 - \epsilon$ et $t_2 + \epsilon$, seuls S et M_B évoluent. M_A reste "spectateur". En utilisant le fait que l'interaction $S-M_B$ correspond à une mesure idéale et en introduisant les états $|\chi_B^q\rangle$ de M_B corrélés (parfaitement) avec $|v_q\rangle$, on obtient

$$|\psi(t_2 + \epsilon)\rangle = \sum_n \sum_q \langle v_q | U_S(t_2, t_1) | u_n \rangle \langle u_n | U_S(t_1, t_i) | \psi_S \rangle \times |v_q\rangle \otimes |\varphi_A^n\rangle \otimes |\chi_B^q\rangle \quad (2.27)$$

On a remplacé ϵ par 0 dans les opérateurs d'évolution U_S figurant sur la 1^{re} ligne de (2.26), puisqu'on suppose ϵ suffisamment petit pour que l'évolution propre de S pendant un temps ϵ soit négligeable.

- Enfin, entre $t_2 + \epsilon$ et t_f , seul S évolue, et il suffirait d'appliquer $U_S(t_f, t_2)$ à $|\psi(t_2 + \epsilon)\rangle$ dans (2.27) pour obtenir $|\psi(t_f)\rangle$.

C. Calcul de quelques probabilités relatives aux résultats enregistrés par M_A et M_B

Comme M_A et M_B n'évoluent pas après $t_2 + \epsilon$, il suffit d'utiliser l'expression (2.27) de l'état du système global à $t_2 + \epsilon$.

(i) Probabilité d'observer a_n sur M_A à t_1 et b_q sur M_B à t_2

- Après les 2 interactions en t_1 et t_2 , on observe ^(à l'instant $t_2 + \epsilon$) les "aiguilles" de M_A et M_B et on utilise les postulats de la mécanique quantique pour calculer la probabilité de "lire" les résultats a_n sur M_A et b_q sur M_B (plus exactement $g a_n$ et $g' b_q$ où g et g' sont des constantes analogues à celle introduite en (2.2)). Cette probabilité n'est autre que la probabilité de trouver M_A dans $|\varphi_A^n\rangle$ et M_B dans $|\chi_B^q\rangle$ à $t_2 + \epsilon$, c'est à dire encore la norme de $P_A^n P_B^q |\psi(t_2 + \epsilon)\rangle$ où $P_A^n = |\varphi_A^n\rangle \langle \varphi_A^n|$ et $P_B^q = |\chi_B^q\rangle \langle \chi_B^q|$ sont les projecteurs sur les états $|\varphi_A^n\rangle$ et $|\chi_B^q\rangle$. Enfin, comme M_A n'a pas évolué depuis $t_1 + \epsilon$, la probabilité de lire a_n sur M_A à $t_2 + \epsilon$ est la même qu'à $t_1 + \epsilon$. On en déduit, en utilisant (2.27) et le fait que $(P_A^n P_B^q)^2 = P_A^n P_B^q = |\varphi_A^n \chi_B^q\rangle \langle \varphi_A^n \chi_B^q|$

$$\begin{aligned} \text{Proba}(\text{lire } a_n \text{ sur } M_A \text{ à } t_1 + \epsilon \text{ et } b_q \text{ sur } M_B \text{ à } t_2 + \epsilon) &= \\ &= \langle \psi(t_2 + \epsilon) | \varphi_A^n, \chi_B^q \rangle \langle \varphi_A^n, \chi_B^q | \psi(t_2 + \epsilon) \rangle = \\ &= | \langle v_q | U_S(t_2, t_1) | u_n \rangle \langle u_n | U_S(t_1, t_i) | \psi_S \rangle |^2 \end{aligned} \quad (2.28)$$

- Cette probabilité, relative à des résultats de lecture sur M_A et M_B est ainsi exprimée en fonction d'éléments de matrices relatifs au seul système S . Nous reviendrons plus loin sur ce point (§ 3).

(ii) Probabilité d'observer b_q sur M_B à t_2 sachant que l'on a observé a_n sur M_A à t_1 .

- Calculons tout d'abord la probabilité de lire a_n sur M_A à $t_1 + \epsilon$. D'après les postulats de la mécanique, et en écrivant pour simplifier $P(a_n, t_1)$ pour $\text{Proba}(\text{lire } a_n \text{ sur } M_A \text{ à } t_1 + \epsilon)$, on obtient, compte tenu de (2.25)

$$\begin{aligned} P(a_n, t_1) &= \langle \psi(t_1 + \epsilon) | \varphi_A^n \rangle \langle \varphi_A^n | \psi(t_1 + \epsilon) \rangle \\ &= |\langle u_n | U_S(t_1, t_i) | \psi_S \rangle|^2 \end{aligned} \quad (2.29)$$

- Par ailleurs, d'après la définition même de probabilité conditionnelle, on peut écrire

$$P(a_n, t_1 \text{ et } b_q, t_2) = P(a_n, t_1) P(b_q, t_2 / a_n, t_1) \quad (2.30)$$

où $P(a_n, t_1 \text{ et } b_q, t_2)$ est la probabilité double (2.28), $P(a_n, t_1)$ la probabilité simple (2.29) et $P(b_q, t_2 / a_n, t_1)$ la probabilité conditionnelle que l'on cherche précisément à calculer ici et qui vaut donc, compte tenu de (2.28), (2.29) et (2.30)

$$P(b_q, t_2 / a_n, t_1) = |\langle v_q | U_S(t_2, t_1) | u_n \rangle|^2 \quad (2.31)$$

(iii) Probabilité d'observer b_q sur M_B à t_2 , quel que soit le résultat enregistré sur M_A à t_1 .

- Les 2 interactions $S-M_A$ et $S-M_B$ ont bien lieu à t_1 et t_2 mais on ne lit pas le résultat enregistré par M_A . On s'intéresse seulement à la probabilité de lire b_q sur M_B à $t_2 + \epsilon$ qu'on notera $P(b_q, t_2; M_A \text{ non lu})$. D'après les postulats de la mesure

$$P(b_q, t_2; M_A \text{ non lu}) = \langle \psi(t_2 + \epsilon) | \chi_B^q \rangle \langle \chi_B^q | \psi(t_2 + \epsilon) \rangle \quad (2.32)$$

En reportant (2.27) dans (2.32) et en utilisant le fait que les états $|\varphi_A^n\rangle$ sont orthonormés, on obtient

$$\begin{aligned} P(b_q, t_2; M_A \text{ non lu}) &= \sum_n |\langle v_q | U_S(t_2, t_1) | u_n \rangle \langle u_n | U_S(t_1, t_i) | \psi_S \rangle|^2 = \\ &= \sum_n P(a_n, t_1 \text{ et } b_q, t_2) = \sum_n P(a_n, t_1) P(b_q, t_2 / a_n, t_1) \end{aligned} \quad (2.33)$$

Bien noter que la 1^{ère} ligne de (2.33) est une somme de carrés et non le carré d'une somme.

- Il est intéressant de comparer $P(b_q, t_2; M_A \text{ non lu})$ à $P(b_q, t_2; \text{sans } M_A)$ qui est la probabilité de lire b_q sur M_B à $t_2 + \epsilon$ en l'absence de tout appareil M_A interagissant avec S entre t_i et t_1 . Un raisonnement analogue à celui conduisant à (2.29) donne

$$P(b_q, t_2; \text{sans } M_A) = |\langle v_q | U_S(t_2, t_i) | \psi_S \rangle|^2 \quad (2.34)$$

En utilisant $U_S(t_2, t_i) = U_S(t_2, t_1) U_S(t_1, t_i)$ et en insérant la II-8 relation de fermeture $\sum_n |u_n\rangle \langle u_n| = \mathbb{1}$ entre les 2 U_S , on obtient

$$\mathcal{P}(b_q, t_2; \text{sans } M_A) = \left| \sum_n \langle v_q | U_S(t_2, t_1) | u_n \rangle \langle u_n | U_S(t_1, t_i) | \psi_s \rangle \right|^2 \quad (2.35)$$

A la différence de (2.33), (2.35) est le carré d'une somme et non une somme de carrés

En d'autres termes, même si M_A n'est pas eu, l'interaction $S-M_A$ à l'instant t_1 fait disparaître des effets d'interférence entre "chemins" passant par des états différents $|u_n\rangle$ à t_1 , effets qui existent en l'absence de M_A .

Remarque

Si l'on répète la mesure de A à t_1 et celle de B à t_2 sur un très grand nombre de systèmes identiques tous dans le même état initial $|\psi_s(t_i)\rangle$, la valeur moyenne du produit des résultats observés est

$$\sum_n \sum_q a_n b_q \mathcal{P}(a_n, t_1 \text{ et } b_q, t_2) \quad (2.36)$$

En utilisant (2.28) et $A = \sum_n a_n |u_n\rangle \langle u_n|$, $B = \sum_q b_q |v_q\rangle \langle v_q|$, on peut mettre (2.36) sous forme d'une fonction de corrélation, c-à-d sous forme d'une valeur moyenne dans $|\psi_s(t_i)\rangle$ d'un produit d'opérateurs de S pris, dans le point de vue de Heisenberg, à des instants différents (voir M. Goldberger and K. Watson, Phys. Rev. 134, B 919 (1964)).

③ La réduction du paquet d'ondes

a. Nouvel éclairage apporté par l'approche globale précédente

- Deux types de postulats sur la mesure sont généralement utilisés quand on raisonne sur le système observé S seul, sans inclure dans l'analyse, comme nous l'avons fait ci-dessus, l'évolution des appareils de mesure $M_A, M_B \dots$ qui interagissent avec S .

Postulat I sur la probabilité $\mathcal{P}(a_n)$ d'observer un résultat donné a_n

Fait intervenir la valeur moyenne du projecteur $P_n = |u_n\rangle \langle u_n|$ sur le sous-espace propre correspondant à a_n

$$\mathcal{P}(a_n) = \langle \psi | P_n | \psi \rangle \text{ ou plus généralement } \mathcal{P}(a_n) = \text{Tr } \rho P_n \quad (2.37)$$

Postulat II sur l'état du système juste après une mesure (idéale) qui a donné a_n . C'est le fameux postulat de réduction du paquet d'ondes

$$|\psi\rangle \rightarrow \frac{P_n |\psi\rangle}{\sqrt{\langle \psi | P_n | \psi \rangle}} \text{ ou plus généralement } \rho \xrightarrow{\text{(de trouver)}} \frac{P_n \rho P_n}{\text{Tr } \rho P_n} \quad (2.38)$$

- Par exemple, pour calculer la probabilité $\mathcal{P}(b_q)$ lors d'une mesure de B à t_2 sachant que l'on a trouvé a_n lors d'une mesure de A à l'instant $t_1 < t_2$, on utilise habituellement le raisonnement suivant.

Puisque l'on a trouvé a_n à l'instant t_1 , l'état de S juste après cette mesure est, d'après le postulat II, $|u_n\rangle$.

Entre t_1 et t_2 , S évolue et son état est devenu à t_2 $|\psi_s(t_2)\rangle = U_S(t_2, t_1) |u_n\rangle$. Si à t_2 on mesure B , la probabilité de trouver b_q est, d'après le postulat I

$$\mathcal{P}(b_q, t_2 / a_n, t_1) = \langle \psi_s(t_2) | v_q \rangle \langle v_q | \psi_s(t_2) \rangle = |\langle v_q | U_S(t_2, t_1) | u_n \rangle|^2 \quad (2.39)$$

- Plus haut, nous avons obtenu le même résultat (voir (2.31)) en étudiant l'évolution du système global $S + M_A + M_B$ et en appliquant uniquement le postulat I, sans jamais utiliser le postulat II. En effet le résultat (2.31) a été déduit des probabilités (2.28) et (2.29), qui sont analogues à (2.37), et de la définition d'une probabilité conditionnelle.

Ainsi, si l'on inclut dans le système global étudié M_A et M_B , on n'a plus besoin du postulat de réduction du paquet d'ondes pour décrire l'état de S après la 1^{ère} mesure. Les résultats obtenus en appliquant uniquement le postulat I au système global $S + M_A + M_B$ coïncident avec ceux obtenus en appliquant les postulats I et II au seul système S . Le postulat II n'est donc pas aussi fondamental que le postulat I. Il permet essentiellement de faire l'économie d'une description globale de $S + M_A + M_B$ et de raisonner uniquement sur S .

b. Etat de S après une mesure de M_A non lue

- Dans la présentation habituelle où seul S est considéré, le raisonnement est le suivant :

Après une mesure de A ayant donné a_n , dont la probabilité est $P(a_n) = \text{Tr } \rho P_n$ (postulat I, voir (2.37)), l'état du système S est devenu $P_n = P_n \rho P_n / \text{Tr } \rho P_n = P_n \rho P_n / P(a_n)$ (postulat II, voir (2.38)). Si l'on n'observe pas le résultat obtenu, on peut seulement dire que, après la mesure, l'état de S est P_n avec une probabilité $P(a_n)$, $P_{n'}$ avec une probabilité $P(a_{n'})$, Il s'agit là de la définition même d'un mélange statistique d'états, de sorte que l'état ρ' de S après la mesure non lue de A s'écrit

$$\rho \xrightarrow[\text{non lue}]{\text{Mesure de } A} \rho'$$

$$\rho' = \sum_n P_n P(a_n) = \sum_n \frac{P_n \rho P_n}{P(a_n)} P(a_n) = \sum_n P_n \rho P_n \quad (2.40)$$

ρ' s'obtient donc à partir de ρ en ne gardant que les blocs diagonaux de ρ à l'intérieur de chaque sous-espace propre de A . Toutes les cohérences quantiques entre états de valeurs propres a_n et $a_{n'}$ différentes de A ont été détruites par la mesure de A , même si cette mesure n'est pas lue.

- Appliquons maintenant l'analyse globale du § 2 à un tel problème.

Nous connaissons l'état (2.25) du système global $S + M_A + M_B$ à l'instant $t_1 + \epsilon$, c'est à dire après l'interaction $S - M_A$. Cet état, qui est une superposition linéaire d'états et non un mélange statistique d'états, a été obtenu par résolution de l'équation de Schrödinger de $S + M_A$ entre $t_1 - \epsilon$ et $t_1 + \epsilon$ (voir § 1 ci-dessus). Nous n'avons utilisé aucun postulat sur la mesure (ni I, ni II) puisque nous n'observons pas M_A .

Nous allons utiliser maintenant (2.25) pour faire des prévisions de résultats de mesure faisant intervenir des appareils

autres que M_A . En d'autres termes, une fois que S et M_A ont interagi à t_1 , on ne s'intéresse plus à M_A et on suppose que S et M_A n'interagissent plus à nouveau. Toutes les prévisions concernant des mesures faites après t_1 par des appareils M_B autres que M_A seront d'après (2.37) données par des valeurs moyennes d'observables telles que $G_B \otimes \mathbb{I}_A$ où G_B est une observable de M_B et $\mathbb{I}_A$ l'opérateur identité de M_A . Pour calculer ces probabilités, nous pouvons alors nous contenter d'utiliser la trace sur M_A de l'opérateur densité de $S + M_A$ associé à (2.25)

$$\rho' = \text{Tr}_{M_A} \rho_{S+M_A}(t_1 + \epsilon) \quad (2.41)$$

A partir de (2.25) et (2.41), on obtient alors immédiatement, en utilisant l'orthogonalité des états $\{|\varphi_A^n\rangle\}$

$$\begin{aligned} \rho' &= \sum_n \sum_{n'} \langle u_n | U_S(t_1, t_i) | \psi_S \rangle \langle \psi_S | U_S^\dagger(t_1, t_i) | u_{n'} \rangle \underbrace{\text{Tr}_{M_A} |\varphi_A^n\rangle \langle \varphi_A^{n'}|}_{= \langle \varphi_A^n | \varphi_A^{n'} \rangle = \delta_{nn'}} \times \\ &\quad \times |u_n\rangle \langle u_{n'}| \otimes |X_B\rangle \langle X_B| \\ &= |X_B\rangle \langle X_B| \otimes \sum_n |\langle u_n | U_S(t_1, t_i) | \psi_S \rangle|^2 |u_n\rangle \langle u_n| \\ &= |X_B\rangle \langle X_B| \otimes \sum_n P_n \rho_S(t_1) P_n \end{aligned} \quad (2.42)$$

On retrouve bien que pour toutes les mesures ultérieures qui ne font plus intervenir M_A , on peut considérer que l'état de S après la mesure non lue de M_A est donné par le mélange statistique d'états (2.40)

— Le calcul précédent montre clairement que, si les cohérences quantiques de S entre $|u_n\rangle$ et $|u_{n'}\rangle$ (avec $n \neq n'$) sont détruites après la mesure non lue de M_A , c'est parce que l'interaction S - M_A a corrélié $|u_n\rangle$ et $|u_{n'}\rangle$ à des états orthogonaux de M_A $|\varphi_A^n\rangle$ et $|\varphi_A^{n'}\rangle$. Les amplitudes quantiques associés à S dans $|u_n\rangle$ et S dans $|u_{n'}\rangle$ n'interfèrent plus car, en consultant M_A , on pourrait en principe savoir si S est dans $|u_n\rangle$ ou $|u_{n'}\rangle$.

Notons cependant que, si la cohérence réduite de S entre $|u_n\rangle$ et $|u_{n'}\rangle$ est nulle, il n'en est pas de même pour $S + M_A$ qui, d'après (2.25), est (après l'interaction S - M_A) dans une superposition linéaire des états $|u_n\rangle \otimes |\varphi_A^n\rangle$ et $|u_{n'}\rangle \otimes |\varphi_A^{n'}\rangle$. Si S et M_A interagissaient de nouveau, on obtiendrait des résultats erronés si l'on négligeait ces cohérences quantiques qui décrivent les corrélations apparues entre S et M_A à l'issue de leur interaction (voir cours suivant).

Références

- (1) J. Von Neumann, *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics* Princeton University Press (1955), chapitre VI.
Reproduit dans *Quantum Theory and Measurement*, edited by J.A. Wheeler and W.H. Zurek, Princeton University Press (1983), p. 619
- (2) B. d'Espagnat, *Conceptual Foundations of Quantum Mechanics*, Benjamin 1971, 2^e édition 1976
- (3) La présentation de ce paragraphe résulte de discussions avec Franck Lalœ