

Introduction - Buts de ce cours

- Considérons, en mécanique classique, 2 systèmes en interaction, par exemple 2 particules 1 et 2. Le mouvement de chaque particule est bien sûr influencé par celui de l'autre. Mais à chaque instant, chaque particule a un état bien défini (défini par sa position et sa vitesse).
- En mécanique quantique aussi, l'évolution de chaque système est influencée par l'autre, mais apparaissent en plus des corrélations quantiques entre les 2 systèmes. Si l'état initial de 1+2 est un produit, $|\psi(0)\rangle = |1\psi\rangle \otimes |2\chi\rangle$, il n'en sera plus de même en général un instant t après : l'état de 1+2 sera toujours un état pur $|\psi(t)\rangle$, mais $|\psi(t)\rangle$ sera en général une superposition linéaire d'états produits qui ne se réduit pas à un seul état produit. L'état de chaque système ne sera plus pur, comme à $t=0$, mais sera décrit par un mélange statistique d'états associé à l'opérateur densité obtenu en prenant la trace de $|\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|$ sur 1 ou 2. L'entropie statistique de chaque système pris séparément augmente au cours du temps. Cette perte d'information s'explique par le fait qu'en s'intéressant au système 1 ou 2 séparément, on perd l'information associée aux corrélations quantiques qui sont apparues entre eux du fait de leur interaction.
- Dans les cours précédents nous avons montré l'importance du rôle joué par les corrélations quantiques dans l'opérations de mesure. Dans ce cours, nous allons établir des résultats généraux sur la dynamique des corrélations quantiques apparaissant entre 2 systèmes initialement non corrélés. Nous allons montrer en particulier que la vitesse d'apparition de ces corrélations peut dépendre de manière très sensible de l'état initial de chaque système. Ceci nous permettra de comprendre pourquoi il est possible, dans certains cas, de négliger de telles corrélations, alors que dans d'autres cas, elles apparaissent si vite qu'elles interdisent toute cohérence quantique réduite sur chaque système.

① Forme canonique de Schmidt pour le vecteur d'état d'un ensemble de 2 systèmes dans un état pur.

a - Position du problème

- Puisque le système global 1+2 est dans un état pur, son état est décrit par un ket $|\psi(1,2)\rangle$ qui peut toujours être développé sur une base orthonormée $\{|1u_n\rangle \otimes |2v_q\rangle\}$, produit tensoriel d'une base $\{|1u_n\rangle\}$ de l'espace des états E_1 de 1 par une base orthonormée $\{|2v_q\rangle\}$ de l'espace des états E_2 de 2

$$|\psi(1,2)\rangle = \sum_n \sum_q c_{nq} |1u_n\rangle \otimes |2v_q\rangle \quad (7.1)$$

- Nous allons montrer ci-dessous que $|\psi(1,2)\rangle$ peut toujours être réécrit sous la forme suivante, dite forme canonique de Schmidt

$$|\psi(1,2)\rangle = \sum_\lambda \gamma_\lambda |1\varphi_\lambda\rangle \otimes |2\chi_\lambda\rangle \quad (7.2)$$

où les $|1\varphi_\lambda\rangle$ (resp $|2\chi_\lambda\rangle$) forment un système orthonormé dans E_1 (resp E_2)

$$\langle 1\varphi_\lambda | 1\varphi_{\lambda'} \rangle = \delta_{\lambda\lambda'} \quad (7.3.a) \quad \langle 2\chi_\lambda | 2\chi_{\lambda'} \rangle = \delta_{\lambda\lambda'} \quad (7.3.b)$$

- Il importe de bien saisir la différence entre (7.1) et (7.2)

- Dans (7.1), les vecteurs de base sont repérés par 2 indices indépendants, n pour 1, q pour 2. Dans (7.2), ils sont repérés par le même indice λ pour 1 et pour 2. Si les espaces E_1 et E_2 sont chacun à un nombre fini N de dimensions, le développement (7.1) fait apparaître N^2 termes alors que le développement (7.2) contient au maximum N termes.

- Le développement (7.2) fait apparaître des corrélations par-faites entre les états $|1\varphi_\lambda\rangle$ de 1 et les états $|2\chi_\lambda\rangle$ de 2: quand 1 est dans $|1\varphi_\lambda\rangle$, 2 est dans $|2\chi_\lambda\rangle$ et réciproquement. A 2 états orthogonaux $|1\varphi_\lambda\rangle$ et $|1\varphi_{\lambda'}\rangle$ de 1 sont associés 2 états orthogonaux $|2\chi_\lambda\rangle$ et $|2\chi_{\lambda'}\rangle$ de 2. On pourrait bien sur réécrire (7.1) sous la forme

$$|\psi(1,2)\rangle = \sum_n |1u_n\rangle \otimes |2\Omega_n\rangle \quad (7.4)$$

avec

$$|2\Omega_n\rangle = \sum_q c_{nq} |2v_q\rangle \quad (7.5)$$

mais les états $|2\Omega_n\rangle$ ne sont pas en général orthogonaux les uns aux autres. C'est la raison pour laquelle le développement (7.2) est plus intéressant que le développement (7.1).

b - Démonstration de l'existence d'une forme canonique de Schmidt

- Commençons par supposer que le développement (7.2) existe, et calculons les opérateurs densités réduits de 1 et 2. On a par exemple, compte tenu de (7.3.b)

$$\begin{aligned} \rho(1) &= \text{Tr}_2 |\psi(1,2)\rangle \langle \psi(1,2)| = \sum_\lambda \sum_{\lambda'} \gamma_\lambda \gamma_{\lambda'}^* |1\varphi_\lambda\rangle \langle 1\varphi_{\lambda'}| \underbrace{\text{Tr}_2 |2\chi_\lambda\rangle \langle 2\chi_{\lambda'}|}_{= \langle \chi_{\lambda'} | \chi_\lambda \rangle = \delta_{\lambda\lambda'}} \\ &= \sum_\lambda |\gamma_\lambda|^2 |1\varphi_\lambda\rangle \langle 1\varphi_\lambda| \end{aligned} \quad (7.6)$$

Un calcul tout à fait analogue donnerait

$$\rho(2) = \sum_\lambda |\gamma_\lambda|^2 |2\chi_\lambda\rangle \langle 2\chi_\lambda| \quad (7.7)$$

Il apparaît ainsi que, si (7.2) existe, les $|1\varphi_\lambda\rangle$ et les $|2\chi_\lambda\rangle$ sont les états qui diagonalisent $\rho(1)$ et $\rho(2)$ respectivement, les $|\gamma_\lambda|^2$ étant les valeurs propres correspondantes.

- Le résultat précédent suggère alors la démarche suivante

- Connaissant $|\psi(1,2)\rangle$, on peut calculer l'opérateur densité réduit de 1, $\rho(1) = \text{Tr}_2 |\psi(1,2)\rangle \langle \psi(1,2)|$. Comme $\rho(1)$ est un opérateur densité, c'est un opérateur hermitique, semi-positif, de trace 1. La diagonalisation de $\rho(1)$ donne alors

$$\rho(1) = \sum_{\lambda,i} \pi_\lambda |1\varphi_\lambda^i\rangle \langle 1\varphi_\lambda^i| \quad (7.8)$$

où les valeurs propres π_λ satisfont

$$\pi_\lambda \text{ réel, positif ou nul} \quad \sum_{\lambda,i} \pi_\lambda = 1 \quad (7.9)$$

et où les vecteurs propres $|1\varphi_\lambda^i\rangle$, associés à la valeur propre π_λ (c'est un indice de dégénérescence éventuelle) sont orthonormés

$$\langle 1\varphi_\lambda^i | 1\varphi_{\lambda'}^{i'} \rangle = \delta_{\lambda\lambda'} \delta_{ii'} \quad (7.10)$$

- Utilisant la relation de fermeture

$$\sum_{\lambda, i} |1\varphi_{\lambda}^i\rangle\langle 1\varphi_{\lambda}^i| = \mathbb{I}_{E_1} \quad (7.14)$$

où $\mathbb{I}_{E_1}$ est l'opérateur identité de E_1 , on obtient

$$|\psi(1,2)\rangle = \left(\sum_{\lambda, i} |1\varphi_{\lambda}^i\rangle\langle 1\varphi_{\lambda}^i| \right) |\psi(1,2)\rangle = \sum_{\lambda, i} |1\varphi_{\lambda}^i\rangle \otimes |2\Omega_{\lambda}^i\rangle \quad (7.12)$$

$$\text{où } |2\Omega_{\lambda}^i\rangle = \langle 1\varphi_{\lambda}^i | \psi(1,2) \rangle = \sum_n \sum_q c_{nq} \langle 1\varphi_{\lambda}^i | 1u_n \rangle |2v_q\rangle \quad (7.13)$$

est un vecteur parfaitement bien défini de E_2 , si on connaît $|\psi(1,2)\rangle$ et les vecteurs propres $|1\varphi_{\lambda}^i\rangle$ de $\rho(1)$.

- Recalculons alors $\rho(1) = T_{22} |\psi(1,2)\rangle\langle\psi(1,2)|$ à partir de (7.12)

$$\rho(1) = \sum_{\lambda, i} \sum_{\lambda', i'} |1\varphi_{\lambda}^i\rangle\langle 1\varphi_{\lambda'}^{i'}| \left(T_{22} |2\Omega_{\lambda}^i\rangle\langle 2\Omega_{\lambda'}^{i'}| \right) = \sum_{\lambda, i} \sum_{\lambda', i'} \langle 2\Omega_{\lambda'}^{i'} | 2\Omega_{\lambda}^i \rangle |1\varphi_{\lambda}^i\rangle\langle 1\varphi_{\lambda'}^{i'}| \quad (7.14)$$

En comparant (7.8) et (7.14), on en déduit alors que

$$\langle 2\Omega_{\lambda'}^{i'} | 2\Omega_{\lambda}^i \rangle = \delta_{\lambda\lambda'} \delta_{i'i'} \pi_{\lambda} \quad (7.15)$$

Il suffit alors, pour tous les π_{λ} non nuls de (7.8), de définir les vecteurs

$$|2\chi_{\lambda}^i\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi_{\lambda}}} |2\Omega_{\lambda}^i\rangle \quad (7.16)$$

qui satisfont, compte tenu de (7.15), à

$$\langle 2\chi_{\lambda'}^{i'} | 2\chi_{\lambda}^i \rangle = \delta_{\lambda\lambda'} \delta_{i'i'} \quad (7.17)$$

pour réécrire $|\psi(1,2)\rangle$ sous la forme

$$|\psi(1,2)\rangle = \sum_{\lambda, i} \sqrt{\pi_{\lambda}} |1\varphi_{\lambda}^i\rangle \otimes |2\chi_{\lambda}^i\rangle \quad (7.18)$$

qui est bien une forme canonique de Schmidt (7.2), compte tenu de (7.10) et (7.17). Les coefficients du développement (7.18) sont définis à un facteur de phase près, puisqu'on peut changer arbitrairement les phases des $|1\varphi_{\lambda}^i\rangle$ et celles des $|2\chi_{\lambda}^i\rangle$. Le choix fait en (7.18) revient à prendre tous les coefficients du développement réels et positifs.

En conclusion, nous avons bien montré qu'il existe un développement canonique de Schmidt pour $|\psi(1,2)\rangle$ et identifié les vecteurs de 1 et 2 qui apparaissent dans ce développement (ce sont les vecteurs propres de $\rho(1)$ et $\rho(2)$), de même que les coefficients $\delta_{\lambda} = \sqrt{\pi_{\lambda}}$.

C - Quelques conséquences des résultats précédents

- On déduit immédiatement de (7.18) que

$$\rho(1) = \sum_{\lambda, i} \pi_{\lambda} |1\varphi_{\lambda}^i\rangle\langle 1\varphi_{\lambda}^i| \quad (7.19) \quad \rho(2) = \sum_{\lambda, i} \pi_{\lambda} |2\chi_{\lambda}^i\rangle\langle 2\chi_{\lambda}^i| \quad (7.20)$$

On voit ainsi que les opérateurs densités réduits de 1 et 2 ont mêmes valeurs propres non nulles, avec les mêmes degrés de dégénérescence. Nous verrons dans un cours ultérieur que ceci entraîne que 1 et 2, pris séparément, ont même entropie statistique.

- Considérons un ensemble de 2 spins $1/2$ dans un état pur. L'écriture de $|\psi(1,2)\rangle$ sous la forme (7.18) permet de montrer qu'il existe 2 directions $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ telles que si 1 est orienté le long de $\vec{n}_1$ (resp. $-\vec{n}_1$), 2 est orienté le long de $\vec{n}_2$ (resp. $-\vec{n}_2$). De plus, l'égalité des valeurs propres de $\rho(1)$ et $\rho(2)$ (voir (7.19) et (7.20)) entraîne que le taux de polarisation de 1 le long de $\vec{n}_1$ est le même que celui de 2 le long de $\vec{n}_2$.

② Calcul perturbatif de la vitesse d'apparition des corrélations quantiques à partir d'un état initial produit

a - Principe du calcul

- Le système global 1+2 est initialement dans un état produit

$$|\Psi(0)\rangle = |1\varphi_0\rangle \otimes |2\chi_0\rangle = |\varphi_0, \chi_0\rangle \quad (7.21)$$

(le dernier terme de (7.21) utilise des notations simplifiées). A l'instant $t=0$, la forme canonique de Schmidt se réduit à un seul terme. Il n'y a pas de corrélations quantiques et les 2 opérateurs densités réduits sont des cas purs.

$$\rho_1(0) = |\varphi_0\rangle\langle\varphi_0| \quad \rho_2(0) = |\chi_0\rangle\langle\chi_0| \quad (7.22)$$

- Sous l'effet de l'hamiltonien

$$H = H_1 + H_2 + W \quad (7.23)$$

où H_1 et H_2 sont les hamiltoniens propres de 1 et 2 et W leur interaction, $|\Psi(0)\rangle$ évolue et devient

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-iHt/\hbar} |\Psi(0)\rangle = \left(1 - \frac{it}{\hbar} H - \frac{t^2}{2\hbar^2} H^2 \dots\right) |\Psi(0)\rangle \quad (7.24)$$

A l'instant t , la forme canonique de Schmidt ne se réduit plus en général à un seul terme. Au lieu d'avoir dans (7.2) tous les γ_α nuls, sauf un γ_0 qui vaut 1, plusieurs γ_α sont maintenant non nuls. Pour t suffisamment petit, l'un des γ_α aura un module très légèrement inférieur à 1, celui qui se raccorde à γ_0 pour $t=0$, tous les autres ayant des modules très petits (puisque $\sum |\gamma_\alpha|^2 = 1$). Dans ce paragraphe, nous allons établir une expression perturbative décrivant comment le module du coefficient $\gamma_0(t)$ qui tend vers 1 quand $t \rightarrow 0$, décroît au voisinage de $t=0$. Cette vitesse de décroissance de $|\gamma_0(t)|$ caractérise la vitesse à laquelle de nouveaux termes apparaissent dans le développement de Schmidt, c'est à dire encore la vitesse avec laquelle apparaissent les corrélations entre 1 et 2.

- D'après les résultats du § 1 précédent, les $|\gamma_\alpha(t)|^2$ ne sont autres que les valeurs propres π_α de $\rho_1(t)$ et $\rho_2(t)$. Le principe du calcul est donc simple. A partir de (7.24), nous calculons $\rho_1(t)$ et $\rho_2(t)$. Nous cherchons ensuite une expression perturbative des valeurs propres de $\rho_1(t)$ pour t petit et étudions au voisinage de $t=0$, la décroissance de la valeur propre $\pi_0(t)$ qui tend vers 1 quand $t \rightarrow 0$.

b - Calcul perturbatif des valeurs propres de $\rho(1)$

- Introduisons dans les espaces des états $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ de 1 et 2 des bases orthonormées $\{|\varphi_j\rangle\}$ et $\{|\chi_k\rangle\}$, avec $j=0,1,2,\dots$ $k=0,1,2,\dots$ incluant les états initiaux $|\varphi_0\rangle$ de 1 et $|\chi_0\rangle$ de 2. La base

$$\{|\varphi_j\rangle \otimes |\chi_k\rangle\} = \{|\varphi_j, \chi_k\rangle\} \quad (7.25)$$

de $\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$ est une base fixe sur laquelle nous allons développer $|\Psi(t)\rangle$ donné par (7.24). En utilisant

$$\sum_j \sum_k |\varphi_j, \chi_k\rangle \langle \varphi_j, \chi_k| = \mathbb{1} \quad (7.26)$$

nous obtenons, au 2^{ème} ordre inclus en t , et compte tenu de (7.21)

$$|\psi(t)\rangle = |\varphi_0 \chi_0\rangle - \frac{it}{\hbar} \sum_j \sum_k |\varphi_j \chi_k\rangle \langle \varphi_j \chi_k | H | \varphi_0 \chi_0 \rangle - \frac{t^2}{2\hbar^2} \sum_j \sum_k |\varphi_j \chi_k\rangle \langle \varphi_j \chi_k | H^2 | \varphi_0 \chi_0 \rangle \quad (7.27)$$

qu'on peut encore écrire sous la forme

$$|\psi(t)\rangle = \sum_j |1\varphi_j\rangle \otimes |2\Omega_j\rangle \quad (7.28)$$

où

$$|2\Omega_j\rangle = \delta_{j0} |2\chi_0\rangle - \frac{it}{\hbar} \sum_k |2\chi_k\rangle \langle \varphi_j \chi_k | H | \varphi_0 \chi_0 \rangle - \frac{t^2}{2\hbar^2} \sum_k |2\chi_k\rangle \langle \varphi_j \chi_k | H^2 | \varphi_0 \chi_0 \rangle \quad (7.29)$$

- Les vecteurs $|2\Omega_j\rangle$ ne sont pas orthogonaux les uns aux autres, de sorte que (7.28) n'est pas en général un développement de Schmidt. En fait, les produits scalaires $\langle 2\Omega_\ell | 2\Omega_j \rangle$ sont, les éléments de matrice, dans la base fixe $\{|1\varphi_j\rangle\}$, de l'opérateur densité réduit $\rho(1)$ de 1. En effet, d'après (7.28),

$$\rho_1(t) = \text{Tr}_2 |\psi(t)\rangle \langle \psi(t)| = \sum_j \sum_\ell |1\varphi_j\rangle \langle 1\varphi_\ell| (\text{Tr}_2 |2\Omega_j\rangle \langle 2\Omega_\ell|) \quad (7.30)$$

de sorte que

$$(\rho_1(t))_{j\ell} = \langle 1\varphi_j | \rho_1(t) | 1\varphi_\ell \rangle = \text{Tr}_2 |2\Omega_j\rangle \langle 2\Omega_\ell| = \langle 2\Omega_\ell | 2\Omega_j \rangle \quad (7.31)$$

Il suffit alors d'utiliser (7.29) pour obtenir à l'ordre 2 en t

$$(\rho_1(t))_{j\ell} = \alpha_{j\ell} + \beta_{j\ell} t + \gamma_{j\ell} t^2 \quad (7.32)$$

avec

$$\alpha_{j\ell} = \delta_{j0} \delta_{\ell 0} \quad (7.33)$$

$$\beta_{j\ell} = \frac{i}{\hbar} [\delta_{j0} \langle \varphi_0 \chi_0 | H | \varphi_\ell \chi_0 \rangle - \delta_{\ell 0} \langle \varphi_j \chi_0 | H | \varphi_0 \chi_0 \rangle] \quad (7.34)$$

$$\gamma_{j\ell} = \frac{1}{2\hbar^2} [2 \sum_k \langle \varphi_0 \chi_0 | H | \varphi_\ell \chi_k \rangle \langle \varphi_j \chi_k | H | \varphi_0 \chi_0 \rangle - \delta_{\ell 0} \langle \varphi_j \chi_0 | H^2 | \varphi_0 \chi_0 \rangle - \delta_{j0} \langle \varphi_0 \chi_0 | H^2 | \varphi_\ell \chi_0 \rangle] \quad (7.35)$$

Seul α_{00} est non nul et vaut 1. De même, seuls β_{j0} avec $j \neq 0$ et $\beta_{0\ell}$ avec $\ell \neq 0$ sont non nuls (β_{00} est nul)

- Pour trouver les valeurs propres λ de $\rho_1(t)$, il faut résoudre l'équation aux valeurs propre

$j \backslash \ell$	0	1	2	
0	$1 + \gamma_{00} t^2 - \lambda$	$\beta_{01} t + \gamma_{01} t^2$	$\beta_{02} t + \gamma_{02} t^2$	...
1	$\beta_{10} t + \gamma_{10} t^2$	$\gamma_{11} t^2 - \lambda$	$\gamma_{12} t^2$	...
2	$\beta_{20} t + \gamma_{20} t^2$	$\gamma_{21} t^2$	$\gamma_{22} t^2 - \lambda$	...
				= 0

(7.36)

Supposons la dimension de l'espace E_1 finie et égale à N . Le

déterminant (7.36) est alors un déterminant $N \times N$, qui vaut à l'ordre 2 en t

$$(1-\lambda) \left[(-\lambda)^{N-1} + (-\lambda)^{N-2} \sum_{j \neq 0} \gamma_{jj} t^2 \right] + \gamma_{00} t^2 (-\lambda)^{N-1} - \sum_{j \neq 0} \beta_{0j} \beta_{j0} t^2 (-\lambda)^{N-2} = 0 \quad (7.37)$$

A partir de (7.34), (7.35) et (7.26), on montre alors que (7.37) s'écrit

$$\lambda^N - \lambda^{N-1} + \lambda^{N-2} \frac{t^2}{\hbar^2} \sum_{j \neq 0} \sum_{k \neq 0} |\langle \varphi_j \chi_k | H | \varphi_0 \chi_0 \rangle|^2 = 0 \quad (7.38)$$

$N-2$ valeurs propres restent nulles. Une valeur propre $\pi_0(t)$ vaut

$$\pi_0(t) = 1 - A t^2$$

où

$$A = \frac{1}{\hbar^2} \sum_{j \neq 0} \sum_{k \neq 0} |\langle \varphi_j \chi_k | H | \varphi_0 \chi_0 \rangle|^2 \quad (7.39)$$

et l'autre $\pi_1(t)$ vaut $A t^2$.

Le résultat obtenu ne dépend pas de N et reste valable pour tout N . Le coefficient A , qui décrit la décroissance au voisinage de $t=0$ de $\pi_0(t)$ qui tend vers 1 quand $t \rightarrow 0$, caractérise la vitesse d'apparition des corrélations quantiques entre 1 et 2.

Comme les hamiltoniens propres H_1 et H_2 de 1 et 2 ne peuvent changer l'état de 1 et 2 à la fois, ils ne peuvent relier $|\varphi_0 \chi_0\rangle$ à $|\varphi_j \chi_k\rangle$ avec $j \neq 0$ et $k \neq 0$. Seule l'interaction W entre 1 et 2 (voir (7.23)) contribue à (7.39) qu'on peut donc récrire, en introduisant les projecteurs sur les espaces supplémentaires de φ_0 dans E_1 , χ_0 dans E_2

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{\hbar^2} \sum_{j \neq 0} \sum_{k \neq 0} |\langle 1\varphi_j, 2\chi_k | W(1,2) | 1\varphi_0, 2\chi_0 \rangle|^2 = \\ &= \frac{1}{\hbar^2} \langle 1\varphi_0, 2\chi_0 | W(1,2) \left[\mathbb{1}_{E_1} - |1\varphi_0\rangle\langle 1\varphi_0| \right] \otimes \left[\mathbb{1}_{E_2} - |2\chi_0\rangle\langle 2\chi_0| \right] W(1,2) | 1\varphi_0, 2\chi_0 \rangle \end{aligned} \quad (7.40)$$

③ Etude de quelques applications

a - Deux oscillateurs harmoniques couplés

Hamiltonien

$$H = \underbrace{\hbar\omega_1 a_1^\dagger a_1}_{H_1} + \underbrace{\hbar\omega_2 a_2^\dagger a_2}_{H_2} + \underbrace{\hbar g (a_1^\dagger a_2 + a_2^\dagger a_1)}_W \quad (7.41)$$

L'oscillateur 1 (resp 2) a une fréquence ω_1 (resp. ω_2) et des opérateurs de création et d'annihilation a_1 et $a_1^\dagger$ (resp a_2 et $a_2^\dagger$). g est une constante de couplage. W décrit des processus où 1 perd un quantum d'énergie $\hbar\omega_1$, alors que 2 gagne un quantum $\hbar\omega_2$ et réciproquement.

Cas où l'état initial est un état propre de H_1 et H_2

- Chaque oscillateur est dans un niveau d'énergie bien défini

$$|\psi(0)\rangle = |N_1\rangle \otimes |N_2\rangle = |N_1, N_2\rangle \quad (7.42)$$

On a alors

$$W |N_1, N_2\rangle = \hbar g \left[\sqrt{N_1(N_2+1)} |N_1-1, N_2+1\rangle + \sqrt{(N_1+1)N_2} |N_1+1, N_2-1\rangle \right] \quad (7.43)$$

Comme les 2 états figurant au second membre de (7.43) ont à la fois N_1 et N_2 changés, les 2 projecteurs apparaissant sur la 2^e ligne de (7.40)

sont inutiles et A se réduit à

$$A = \frac{1}{\hbar^2} \langle N_1, N_2 | W^2 | N_1, N_2 \rangle \\ = g^2 [N_1(N_2+1) + (N_1+1)N_2] = g^2 [2N_1N_2 + N_1 + N_2] \quad (7.44)$$

- Il apparaît ainsi que la vitesse d'apparitions des corrélations quantiques croît comme le produit N_1N_2 des nombres quantiques N_1 et N_2 repérant l'énergie de 1 et 2 (à la limite $N_1, N_2 \gg 1$)

Cas où l'état initial est un état cohérent

- Chaque oscillateur i ($i=1,2$) est dans un état cohérent $|\alpha_i\rangle$, état propre de a_i , de valeur propre α_i

$$|\psi(0)\rangle = |\alpha_1\rangle \otimes |\alpha_2\rangle = |\alpha_1, \alpha_2\rangle \quad (7.45)$$

$$a_1|\alpha_1\rangle = \alpha_1|\alpha_1\rangle \quad a_2|\alpha_2\rangle = \alpha_2|\alpha_2\rangle \quad (7.46)$$

Les expressions adjointes de (7.46) sont

$$\langle \alpha_1 | a_1^\dagger = \alpha_1^* \langle \alpha_1 | \quad \langle \alpha_2 | a_2^\dagger = \alpha_2^* \langle \alpha_2 | \quad (7.47)$$

- Développons le produit des 2 projecteurs de la 2^{ème} de (7.40)

$$(1 - |\alpha_1\rangle\langle\alpha_1|)(1 - |\alpha_2\rangle\langle\alpha_2|) = 1 + |\alpha_1, \alpha_2\rangle\langle\alpha_1, \alpha_2| - |\alpha_1\rangle\langle\alpha_1| \otimes \mathbb{1}_2 - |\alpha_2\rangle\langle\alpha_2| \otimes \mathbb{1}_1 \quad (7.48)$$

et calculons la contribution de chacun des 4 termes de (7.48).

• La contribution du 1^{er} terme vaut $\hbar^2 g^2 \langle \alpha_1, \alpha_2 | (a_1^\dagger a_2 + a_2^\dagger a_1)^2 | \alpha_1, \alpha_2 \rangle$. Pour pouvoir utiliser (7.46) et (7.47), il faut ranger $(a_1^\dagger a_2 + a_2^\dagger a_1)^2$ dans l'ordre normal. En utilisant $[a_i, a_i^\dagger] = 1$ ($i=1,2$), on obtient

$$(a_1^\dagger a_2 + a_2^\dagger a_1)^2 = (a_1^\dagger)^2 a_2^2 + (a_2^\dagger)^2 a_1^2 + 2a_1^\dagger a_2^\dagger a_1 a_2 + a_2^\dagger a_2 + a_1^\dagger a_1 \quad (7.49)$$

La contribution du 1^{er} terme de (7.48) vaut donc

$$\hbar^2 g^2 [(\alpha_1^* \alpha_2 + \alpha_2^* \alpha_1)^2 + |\alpha_2|^2 + |\alpha_1|^2] \quad (7.50)$$

• La contribution du 2^{ème} terme de (7.48) vaut, compte tenu de (7.46) et (7.47)

$$\hbar^2 g^2 [\langle \alpha_1, \alpha_2 | a_1^\dagger a_2 + a_2^\dagger a_1 | \alpha_1, \alpha_2 \rangle]^2 = \hbar^2 g^2 (\alpha_1^* \alpha_2 + \alpha_2^* \alpha_1)^2 \quad (7.51)$$

• La contribution du 3^{ème} terme de (7.48) vaut

$$-\hbar^2 g^2 \langle \alpha_1, \alpha_2 | a_1^\dagger a_2 + a_2^\dagger a_1 | \alpha_1 \rangle \langle \alpha_1 | a_1^\dagger a_2 + a_2^\dagger a_1 | \alpha_1, \alpha_2 \rangle \quad (7.52)$$

$$\text{Or } \langle \alpha_1 | a_1^\dagger a_2 + a_2^\dagger a_1 | \alpha_1, \alpha_2 \rangle = (\alpha_1^* \alpha_2 + \alpha_1 a_2^\dagger) | \alpha_2 \rangle \quad (7.53)$$

On en déduit, compte tenu de $[a_2, a_2^\dagger] = 1$ et (7.46) (7.47), que

$$(7.52) = -\hbar^2 g^2 \langle \alpha_2 | (\alpha_1 \alpha_2^* + \alpha_1^* a_2) (\alpha_1^* \alpha_2 + \alpha_1 a_2^\dagger) | \alpha_2 \rangle \\ = -\hbar^2 g^2 [(\alpha_1^* \alpha_2 + \alpha_2^* \alpha_1)^2 + |\alpha_1|^2] \quad (7.54)$$

• Un calcul analogue donne pour la contribution du 4^{ème} terme de (7.48)

$$-\hbar^2 g^2 [(\alpha_1^* \alpha_2 + \alpha_2^* \alpha_1)^2 + |\alpha_2|^2] \quad (7.55)$$

- Finalement, en ajoutant (7.50), (7.51), (7.54) et (7.55), on obtient

$$A = 0 \quad (7.56)$$

Ainsi, si l'état initial des 2 oscillateurs est un état cohérent, la vitesse d'apparition des corrélations quantiques entre 1 et 2 est nulle, et ce quelle que soit l'énergie moyenne $|\alpha_1|^2 \hbar \omega_1$ et $|\alpha_2|^2 \hbar \omega_2$ de 1 et 2.

Discussion physique

- Le résultat précédent montre clairement que, suivant l'état initial des 2 oscillateurs, des corrélations quantiques peuvent apparaître très rapidement (état initial (7.42) avec $N_1, N_2 \gg 1$) ou pas du tout (état initial (7.45)). Il est satisfaisant de noter que, si l'état initial est quasiclassique, le comportement du système va rester classique. L'évolution de chaque système est bien sûr influencée par l'autre, mais il n'apparaît pas de corrélations quantiques non séparables entre eux : chaque oscillateur reste dans un état pur bien défini.
- Le résultat (7.56), établi à partir d'une étude perturbative, reste en fait valable à tout instant. En effet, l'hamiltonien (7.41) est suffisamment faible pour pouvoir être mis sous la forme

$$H = \hbar \omega_I a_I^\dagger a_I + \hbar \omega_{II} a_{II}^\dagger a_{II} \quad (7.57)$$

où a_I et a_{II} sont donnés par des superpositions linéaires de a_1 et a_2 décrivant 2 modes normaux de vibration des 2 oscillateurs. Il est clair alors que l'état initial (7.45) est un état cohérent $|\alpha_I, \alpha_{II}\rangle$ des 2 nouveaux oscillateurs I et II, α_I et α_{II} étant donnés par les mêmes superpositions linéaires de α_1 et α_2 que a_I et a_{II} en fonction de a_1 et a_2 . L'évolution due à (7.57) conserve ensuite le caractère d'état cohérent de $|\psi(t)\rangle$, aussi bien vis à vis de a_I et a_{II} que de a_1 et a_2 . L'état $|\psi(t)\rangle$ reste donc un état produit (sans corrélation quantique) à tout instant.

- L'exemple étudié ici est très simple dans la mesure où le système est linéaire. Nous allons le compliquer en remplaçant l'un des 2 oscillateurs par un système à 2 niveaux (qui a des non linéarités importantes) et l'autre par un réservoir d'oscillateurs harmoniques.

b- Atome à 2 niveaux couplé au champ de rayonnement

Hamiltonien

L'atome A, à 2 niveaux $|e\rangle$ et $|f\rangle$ séparés de $\hbar \omega_0$, est couplé aux divers modes i du champ de rayonnement R, de fréquences ω_i et d'opérateurs de création et d'annihilation $a_i^\dagger$ et a_i .

$$H = \hbar \omega_0 |e\rangle\langle e| + \sum_i \hbar \omega_i a_i^\dagger a_i + \sum_i \hbar g_i [|e\rangle\langle f| a_i + |f\rangle\langle e| a_i^\dagger] \quad (7.58)$$

g_i est une constante de couplage. On a fait l'approximation du "champ tournant" (consistant à négliger les termes $|e\rangle\langle f| a_i^\dagger$ et $|f\rangle\langle e| a_i$).

Cas où l'état initial du champ est un état de Fock

- L'état initial de A+R est

$$|\psi(0)\rangle = |f\rangle \otimes |N_1, \dots, N_i, \dots\rangle = |f; N_1, \dots, N_i, \dots\rangle \quad (7.59)$$

L'atome est dans f ; chaque mode i contient N_i photons

- On a alors

$$W|\psi(0)\rangle = \sum_i \hbar g_i \sqrt{N_i} |e; N_1, \dots, N_i-1, \dots\rangle \quad (7.60)$$

et le coefficient A donné en (7.40) vaut

$$\begin{aligned} A &= \langle \psi(0) | W (1_A - |f\rangle\langle f|) (1_R - |N_1, \dots, N_i, \dots\rangle\langle N_1, \dots, N_i, \dots|) W | \psi(0) \rangle \\ &= \langle \psi(0) | W^2 | \psi(0) \rangle = \sum_i g_i^2 N_i \end{aligned} \quad (7.61)$$

puisque $W|\psi(0)\rangle \propto |f\rangle$ et $|N_i\rangle$ tous 2 changés. On voit sur (7.61) que

chaque mode i contribue au coefficient A , proportionnellement au nombre N_i de photons dans ce mode.

Cas où l'état initial du champ est un état cohérent.

- l'atome est dans $|f\rangle$. Chaque mode i est dans un état cohérent $|\alpha_i\rangle$, état propre de a_i de valeur propre α_i :

$$|\psi(0)\rangle = |f\rangle \otimes |\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots\rangle = |f; \{\alpha_i\}\rangle \quad (7.62)$$

$$a_i |\{\alpha_i\}\rangle = \alpha_i |\{\alpha_i\}\rangle \quad \langle \{\alpha_i\} | a_i^\dagger = \alpha_i^* \langle \{\alpha_i\} | \quad (7.63)$$

- On a alors, compte tenu de (7.58) et (7.63)

$$W|\psi(0)\rangle = \sum_i \hbar g_i \alpha_i |e; \{\alpha_i\}\rangle \quad (7.64)$$

et par suite, comme $\langle e | (I_A - |f\rangle\langle f|) = \langle e |$

$$A = \left| \sum_i g_i \alpha_i \right|^2 \underbrace{\langle e; \{\alpha_i\} | (I_R - |\{\alpha_i\}\rangle\langle \{\alpha_i\}|) | e; \{\alpha_i\} \rangle}_{\langle e; \{\alpha_i\} | e; \{\alpha_i\} \rangle - \langle e | e \rangle} = 0 \quad (7.65)$$

Ainsi, quelle que soit l'amplitude moyenne α_i du champ dans chaque mode i , la vitesse d'apparition des corrélations quantiques entre atome et rayonnement est nulle quand l'atome, dans l'état $|f\rangle$, interagit avec un champ dans un état cohérent.

Cas où l'atome est initialement dans l'état excité e

- Si, au lieu d'être dans l'état $|f\rangle$, l'atome est initialement dans l'état excité $|e\rangle$, des calculs analogues aux précédents, utilisant en plus $[a_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij}$, montrent qu'il faut remplacer (7.61) et (7.65) par

$$|\psi(0)\rangle = |e; \{N_i\}\rangle \rightarrow A = \sum_i g_i^2 (N_i + 1) \quad (7.61)'$$

$$|\psi(0)\rangle = |e; \{\alpha_i\}\rangle \rightarrow A = \sum_i g_i^2 \quad (7.65)'$$

- L'examen de (7.61)' et (7.65)' montre que le terme $\sum_i \hbar^2 g_i^2$ représente la contribution des processus d'émission spontanée à l'apparition des corrélations entre A et R . Un tel processus est indépendant de l'état initial du champ et n'apparaît que pour un atome initialement excité.

Discussion physique

- Dans les traitements semiclassiques des interactions matière-rayonnement, le champ est décrit comme un champ classique, ayant une dépendance temporelle donnée. La résolution de l'équation de Schrödinger pour l'atome soumis à une telle perturbation dépendant du temps permet alors d'obtenir à chaque instant un vecteur d'état bien défini pour l'atome. L'état de l'atome reste donc pur à tout instant.

- Le résultat obtenu plus haut pour la vitesse d'apparition des corrélations quantiques entre l'atome et le champ, considérés tous deux comme des systèmes quantiques, permet de justifier de tels traitements semiclassiques. Nous avons vu en effet que, si le champ de rayonnement est initialement dans un état cohérent, les corrélations quantiques entre atome et rayonnement n'apparaissent que par suite du processus d'émission spontanée et peuvent donc être ignorées si un tel processus est négligeable.

Dans un tel cas, l'état de $A + R$ reste un état produit, et l'état de l'atome reste un état pur.

- Une autre démonstration peut être donnée du résultat précédent (voir références 3 et 4). On peut effectuer sur l'hamiltonien (7.58) une transformation unitaire revenant à traduire tous les opérateurs a_i du champ d'une quantité α_i . Le nouvel hamiltonien ainsi obtenu contient alors un terme décrivant l'interaction de l'atome avec un champ classique dans l'état décrit par les variables normales $\{\alpha_i\}$ et un autre terme décrivant l'interaction de l'atome avec le champ quantique dans un état initial vide de tout photon. Si l'émission spontanée est négligeable, ce dernier terme et peut être ignoré et l'hamiltonien restant se réduit alors à l'hamiltonien des théories semi-classiques.

Références

- (1) O. Kübler, H.D. Zeh *Annals of Physics* 76, 405 (1973)
- (2) E. Joos, H.D. Zeh *Z. Phys. B* 59, 223 (1985)
- (3) B.R. Mollow, *Phys. Rev.* A12, 1919 (1975)
- (4) C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, G. Grynberg
 "Processus d'interaction entre photons et atomes" Exercice 17
 Interéditions et Editions du CNRS, Paris 1988