

La théorie de Zurek. Règles de superselection induites par l'environnement

① Introduction - Idée générale

- Dans le cours IV, nous avons vu que l'introduction d'un nouveau système N interagissant avec l'appareil de mesure M permettait de résoudre 2 difficultés rencontrées dans l'analyse de la mesure d'un système S par un appareil M

(i) Ambiguïté sur la grandeur de S mesurée par M

En l'absence de N , des corrélations quantiques non séparables sont apparues entre S et M après l'interaction $S-M$. Ces corrélations se manifestent sur plusieurs bases corrélées de S et M : $\{|u_n\rangle\}$ de S et $\{|\varphi_n\rangle\}$ de M , ou $\{|v_y\rangle\}$ de S et $\{|\chi_y\rangle\}$ de M ...

Si l'interaction H_{M-N} est diagonale dans la base $\{|\varphi_n\rangle\}$ de M , H_{M-N} ne modifie pas les probabilités d'occupation des états $|\varphi_n\rangle$ de M . Par ailleurs, H_{M-N} n'agit pas sur S . Finalement, H_{M-N} ne perturbe pas les corrélations entre $|u_n\rangle$ et $|\varphi_n\rangle$, alors, que les corrélations entre $|v_y\rangle$ et $|\chi_y\rangle$ sont en général brouillées.

La forme de l'interaction H_{M-N} privilégie donc une base $\{|\varphi_n\rangle\}$ de M , et par suite, la base correspondante $\{|u_n\rangle\}$ de S .

(ii) Cohérences quantiques macroscopiques entre états de $S+M$.

En l'absence de N , des cohérences quantiques entre $|u_n\rangle \otimes |\varphi_n\rangle$ et $|u_{n'}\rangle \otimes |\varphi_{n'}\rangle$ apparaissent à l'issue de l'interaction $S-M$.

L'interaction H_{M-N} corréle les états $|\varphi_n\rangle$ et $|\varphi_{n'}\rangle$ de M à des états $|\Omega_n\rangle$ et $|\Omega_{n'}\rangle$ de N . Si la durée de l'interaction $M-N$ est convenablement choisie, les états $|\Omega_n\rangle$ et $|\Omega_{n'}\rangle$ sont orthogonaux, et la cohérence réduite de $S+M$ (après trace sur N) entre $|u_n\rangle \otimes |\varphi_n\rangle$ et $|u_{n'}\rangle \otimes |\varphi_{n'}\rangle$ se retrouve multipliée par $\langle \Omega_{n'} | \Omega_n \rangle = 0$.

- La situation étudiée dans le cours IV est cependant très peu réaliste. Le système N considéré a très peu de degrés de liberté (système à 2 états) et, surtout, l'interaction $M-N$ doit durer un temps τ' bien défini pour que les propriétés mentionnées plus haut soient valables. Pour d'autres valeurs de τ' , $|\Omega_n\rangle$ et $|\Omega_{n'}\rangle$ ne sont plus nécessairement orthogonaux et peuvent même coïncider.

- Dans ce cours V, nous allons remplacer N par un environnement E ayant un très grand nombre de degrés de liberté. (Nous verrons dans un cours ultérieur que, si M est macroscopique, il est pratiquement impossible d'isoler M de son environnement). De plus, l'interaction H_{M-E} sera toujours présente et non branchée pendant un certain temps. Nous allons montrer alors que les 2 propriétés mentionnées plus haut sont valables de manière beaucoup plus générale.

(i) - L'interaction H_{M-E} privilégie une base particulière de M , la base de l'aiguille ("pointer basis"), et lève donc l'ambiguïté sur la grandeur de S mesurée par M .

(ii) - Dans la base de l'aiguille, les cohérences quantiques réduites sont très rapidement détruites par interaction avec l'environnement E , ce qui fait apparaître des règles de superselection.

② Etude d'un modèle schématique n'utilisant que des systèmes à 2 états. IV-2

- Comme dans le § 1b du cours IV, S et M sont des systèmes à 2 états, $|S\uparrow\rangle$ et $|S\downarrow\rangle$ pour S , $|M\uparrow\rangle$ et $|M\downarrow\rangle$ pour M , avec $H_S = H_M = 0$, les états initiaux étant $a|S\uparrow\rangle + b|S\downarrow\rangle$ pour S et $|M\downarrow\rangle$ pour M (notations identiques à celles du cours IV).
- Par contre, on remplace le système N du § 3b du cours IV par un environnement E formé d'un très grand nombre N de systèmes E_k à 2 états $|k\uparrow\rangle$ et $|k\downarrow\rangle$. L'interaction $M-E$ est décrite par l'hamiltonien suivant généralisant (4.15)

$$H_{M-E} = \sum_{k=1}^N \hbar g_k [|M\uparrow\rangle\langle M\uparrow| - |M\downarrow\rangle\langle M\downarrow|] \otimes [|k\rightarrow\rangle\langle k\rightarrow| - |k\leftarrow\rangle\langle k\leftarrow|] \quad (5.1)$$

On suppose $H_E = 0$.

- On part de l'état initial

$$|\Psi(0)\rangle = (a|S\uparrow\rangle + b|S\downarrow\rangle) \otimes |M\downarrow\rangle \otimes |E(0)\rangle \quad (5.2)$$

où $|E(0)\rangle = \prod_{k=1}^N (\alpha_k |k\rightarrow\rangle + \beta_k |k\leftarrow\rangle) \quad (5.3)$

Chaque système E_k de E est dans une superposition de $|\rightarrow\rangle$ et $|\leftarrow\rangle$.

- Dans une 1^{ère} étape, S et M interagissent pendant un temps τ très court, suffisamment court pour qu'on puisse négliger l'effet de H_{M-E} pendant ce temps. H_{S-M} et τ sont les mêmes que dans (4.8) et (4.9), de sorte que l'évolution de $S+M$ pendant cette 1^{ère} étape est donnée par (4.12). Comme E reste spectateur pendant ce temps, on peut décrire cette 1^{ère} phase par

$$|\Psi(0)\rangle \rightarrow |\Psi(0+)\rangle = (a|S\uparrow\rangle \otimes |M\downarrow\rangle + b|S\downarrow\rangle \otimes |M\uparrow\rangle) \otimes |E(0)\rangle \quad (5.4)$$

- Une fois que S et M ont fini d'interagir, c-à-d à $t=0+$, M et E interagissent et évoluent sous l'effet de (5.1), S restant spectateur. Etudions tout d'abord l'évolution de $a|S\uparrow\rangle \otimes |M\downarrow\rangle \otimes |E(0)\rangle$. Comme $|M\downarrow\rangle$ est état propre de H_{M-E} , on peut, pour étudier l'évolution de ce terme, remplacer le 1^{er} crochet de (5.1) par -1 . Les états $|k\rightarrow\rangle$ et $|k\leftarrow\rangle$ sont alors états propres de H_{M-E} avec des valeurs propres $-\hbar g_k$ et $+\hbar g_k$, et l'évolution de $|E(0)\rangle$ s'obtient simplement en multipliant $|k\rightarrow\rangle$ par $e^{ig_k t}$, $|k\leftarrow\rangle$ par $e^{-ig_k t}$. Il vient ainsi :

$$a|S\uparrow\rangle \otimes |M\downarrow\rangle \otimes |E(0)\rangle \rightarrow a|S\uparrow\rangle \otimes |M\downarrow\rangle \otimes |E_\downarrow(t)\rangle \quad (5.5)$$

avec $|E_\downarrow(t)\rangle = \prod_{k=1}^N (\alpha_k e^{ig_k t} |k\rightarrow\rangle + \beta_k e^{-ig_k t} |k\leftarrow\rangle) \quad (5.6)$

Un raisonnement analogue donne

$$b|S\downarrow\rangle \otimes |M\uparrow\rangle \otimes |E(0)\rangle \rightarrow b|S\downarrow\rangle \otimes |M\uparrow\rangle \otimes |E_\uparrow(t)\rangle \quad (5.7)$$

avec $|E_\uparrow(t)\rangle = \prod_{k=1}^N (\alpha_k e^{-ig_k t} |k\rightarrow\rangle + \beta_k e^{ig_k t} |k\leftarrow\rangle) \quad (5.8)$

Par superposition linéaire de (5.5) et (5.7), on obtient finalement pour l'état de $S+M+E$ à l'instant t

$$|\Psi(t)\rangle = a|S\uparrow\rangle \otimes |M\downarrow\rangle \otimes |E_\downarrow(t)\rangle + b|S\downarrow\rangle \otimes |M\uparrow\rangle \otimes |E_\uparrow(t)\rangle \quad (5.9)$$

- On constate d'abord sur (5.9) que les états $|m\uparrow\rangle$ et $|m\downarrow\rangle$ sont corrélés avec les états $|\mathcal{E}_\uparrow(t)\rangle$ et $|\mathcal{E}_\downarrow(t)\rangle$ de $\mathcal{E}$. Comme les probabilités d'occupation de $|m\uparrow\rangle$ et $|m\downarrow\rangle$ ne sont pas modifiées par $H_{M-\mathcal{E}}$ (qui est diagonal dans la base $|m\uparrow\rangle, |m\downarrow\rangle$) et que $H_{M-\mathcal{E}}$ n'agit pas sur $\mathcal{S}$, on voit clairement sur (5.9) que les corrélations introduites par $H_{\mathcal{S}-M}$ entre $|\mathcal{S}\uparrow\rangle$ et $|m\downarrow\rangle$ et entre $|\mathcal{S}\downarrow\rangle$ et $|m\uparrow\rangle$ ne sont pas modifiées par $H_{M-\mathcal{E}}$. Par contre, on vérifierait aisément, comme dans le cours IV, que dans l'état (5.9), l'état $|\mathcal{S}0\rangle$ de $\mathcal{S}$ n'est pas corrélé avec un état bien défini de M , comme c'est le cas en l'absence de $\mathcal{E}$. (voir la formule 4.15). Nous verrons en effet plus loin que, pour t suffisamment grand, les états $|\mathcal{E}_\uparrow(t)\rangle$ et $|\mathcal{E}_\downarrow(t)\rangle$ sont orthogonaux. L'interaction $H_{M-\mathcal{E}}$ a donc privilégié une base de M , la base de l'aiguille $\{|m\uparrow\rangle, |m\downarrow\rangle\}$.

- Si on ne s'intéresse qu'à $\mathcal{S}+M$, l'opérateur densité réduit de $\mathcal{S}+M$, obtenu en prenant la trace sur $\mathcal{E}$ de $|\Psi(t)\rangle\langle\Psi(t)|$ est égal à

$$\rho_{\mathcal{S}+M}(t) = \begin{pmatrix} |a|^2 \langle \mathcal{E}_\downarrow(t) | \mathcal{E}_\downarrow(t) \rangle & ab^* \langle \mathcal{E}_\uparrow(t) | \mathcal{E}_\downarrow(t) \rangle \\ a^*b \langle \mathcal{E}_\downarrow(t) | \mathcal{E}_\uparrow(t) \rangle & |b|^2 \langle \mathcal{E}_\uparrow(t) | \mathcal{E}_\uparrow(t) \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |a|^2 & ab^* z(t) \\ a^*b z^*(t) & |b|^2 \end{pmatrix} \quad (5.10)$$

On a utilisé

$$\langle \mathcal{E}_\uparrow(t) | \mathcal{E}_\uparrow(t) \rangle = \langle \mathcal{E}_\downarrow(t) | \mathcal{E}_\downarrow(t) \rangle = \prod_{k=1}^N (|\alpha_k|^2 + |\beta_k|^2) = 1 \quad (5.11)$$

qui découle de (5.6) et (5.8) et note

$$z(t) = \langle \mathcal{E}_\uparrow(t) | \mathcal{E}_\downarrow(t) \rangle = \prod_{k=1}^N [\cos 2g_k t + i(|\alpha_k|^2 - |\beta_k|^2) \sin 2g_k t] \quad (5.12)$$

Il apparaît sur (5.12) que $z(t)$ est le produit d'un très grand nombre N de facteurs, dont chacun a un module égal à $[1 - 4|\alpha_k|^2|\beta_k|^2 \sin^2 2g_k t]^{1/2}$, qui vaut 1 en $t=0$ (et $t = n\pi/2g_k$) et qui autrement est plus petit que 1. Il s'ensuit que, si les fréquences g_k sont réparties au hasard sur un certain intervalle de largeur Δ , le module de $z(t)$, partant de 1 en $t=0$, va tendre vers 0 au bout d'un temps de l'ordre de $1/\Delta$.

La figure 1 (extraite de la référence 1) montre par exemple l'évolution temporelle de $z(t)$ quand on prend $N=5, 10$ ou 15 , tous les $|\alpha_k|^2$ et $|\beta_k|^2$ étant pris égaux à $1/2$, et les g_k étant tirés au hasard dans l'intervalle $0,1$. On voit que $z(t)$ tend bien vers zéro d'autant mieux que N est plus grand. Le caractère discret des g_k est responsable des fluctuations résiduelles de z autour de 0 (variant en $1/\sqrt{N}$). Pour t suffisamment long (d'autant plus long que N est plus grand), le caractère discret des g_k peut également faire apparaître des "réurrences".

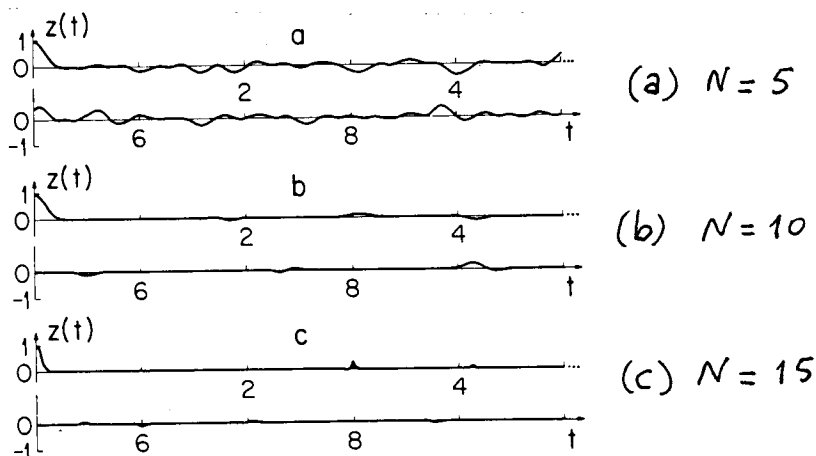


Fig. 1
(extraite de la référence 1)

③ Etude plus générale

a) Forme générale de l'hamiltonien - Hypothèse simplificatrice

- L'hamiltonien H du système $M+E$ s'écrit

$$H = H_M + H_E + H_{M-E} \quad (5.13)$$

où H_M et H_E sont les hamiltoniens propres de M et E , H_{M-E} l'hamiltonien d'interaction $M-E$

- Comme nous l'avons vu plus haut, la base privilégiée $\{|\varphi_a\rangle\}$ de M est déterminée par H_{M-E} qui est diagonal dans cette base. Nous pouvons donc écrire

$$H_{M-E} = \sum_a |\varphi_a\rangle \langle \varphi_a| \otimes W_a \quad (5.14)$$

où W_a est un opérateur de E , dépendant de a .

- Très souvent, on prend pour H_{M-E} la forme particulière suivante

$$H_{M-E} = V \otimes W \quad (5.15)$$

où V est un opérateur de M , W un opérateur de E . Comme H_{M-E} est diagonal dans la base $\{|\varphi_a\rangle\}$ de M , il en est de même de V qui peut s'écrire

$$V = \sum_a \lambda_a |\varphi_a\rangle \langle \varphi_a| \quad (5.16)$$

où λ_a est la valeur propre de V correspondant à l'état propre $|\varphi_a\rangle$. En reportant (5.16) dans (5.15) et en comparant l'expression ainsi obtenue avec (5.14), on voit que, si H_{M-E} est donné par (5.15)

$$W_a = \lambda_a W \quad (5.17)$$

- M ne peut quitter l'état $|\varphi_a\rangle$ sous l'effet de H_{M-E} . Par contre, l'hamiltonien propre H_M pourrait très bien faire transiter M de $|\varphi_a\rangle$ vers $|\varphi_b\rangle$ si $\langle \varphi_b | H_M | \varphi_a \rangle \neq 0$.

Pour simplifier la discussion et les calculs qui suivent, nous supposons ici que H_M est lui aussi diagonal dans la base $\{|\varphi_a\rangle\}$:

$$H_M = \sum_a E_a |\varphi_a\rangle \langle \varphi_a| \quad (5.18)$$

où E_a est l'énergie "non perturbée" de $|\varphi_a\rangle$. M ne peut donc quitter l'état $|\varphi_a\rangle$, ni sous l'effet de l'évolution propre (H_M), ni sous l'effet de l'interaction avec l'environnement E (H_{M-E}).

Une telle hypothèse simplificatrice entraîne que, dans la base $\{|\varphi_a\rangle\}$, la relaxation induite par E est uniquement du type T_2 . En contrepartie, l'absence de relaxation de type T_1 , va nous permettre de donner de la relaxation de type T_2 une théorie plus générale que celle trouvée dans d'autres traitements (basés par exemple sur l'équation pilote dans les conditions de rétrécissement par le mouvement).

- Nous reviendrons dans un cours ultérieur sur le cas où H_M a des éléments non diagonaux dans la base $\{|\varphi_a\rangle\}$ qui diagonalise H_{M-E} . Nous verrons comment l'interaction répétée avec E gèle progressivement les oscillations de Rabi entre $|\varphi_a\rangle$ et $|\varphi_b\rangle$ induites par H_M (paradoxe de Zénon quantique)

- A ce stade, nous ne ferons aucune hypothèse particulière sur H_E .

b. Lien avec l'opération de mesure - Buts du calcul

- Dans ce qui précède, nous n'avons considéré que M et E . En fait, il y a également le système S mesuré par M .

Juste avant l'instant $t=0$, S et M ont interagis pendant un temps très court, suffisamment court pour qu'on puisse ignorer toute interaction avec E pendant ce temps. L'interaction S - M a introduit des corrélations parfaites entre S et M , et l'état de $S+M+E$ à $t=0$ est donné par

$$|\Psi_{SM E}(0)\rangle = \left(\sum_a c_a |u_a\rangle \otimes |\varphi_a\rangle \right) \otimes |X(0)\rangle \quad (5.19)$$

où $|u_a\rangle$ est l'état de S corrélié avec l'état $|\varphi_a\rangle$ de M , $|X(0)\rangle$ l'état de E .

- Après $t=0$, S et M sont séparés et n'interagissent plus. On néglige d'autre part les interactions de S avec E (S est un système microscopique, beaucoup moins sensible à E que l'appareil macroscopique M). S restera donc "spectateur" après $t=0$, et l'évolution de $|u_a\rangle$ sera simplement donnée par $|u_a(t)\rangle = e^{-iH_S t/\hbar} |u_a\rangle$, où H_S est l'hamiltonien propre de S .

- Après $t=0$, on peut donc "oublier" S et considérer uniquement $M+E$ partant de l'état

$$|\Psi_{ME}(0)\rangle = \left(\sum_a c_a |\varphi_a\rangle \right) \otimes |X(0)\rangle \quad (5.20)$$

Comme ni H_M , ni H_{ME} , ne peuvent faire quitter l'état $|\varphi_a\rangle$ à M , l'état (5.20) devient à l'instant t

$$|\Psi_{ME}(t)\rangle = \sum_a c_a |\varphi_a\rangle e^{-iE_a t/\hbar} \otimes |X_a(t)\rangle \quad (5.21)$$

où $|X_a(t)\rangle$ est un état de E corrélié avec $|\varphi_a\rangle$. Le but de ce § 3 est de calculer les états $|X_a(t)\rangle$ ainsi que les produits scalaires $\langle X_b(t) | X_a(t) \rangle$ qui apparaissent comme des facteurs de réductions des cohérences réduites de M entre $|\varphi_a\rangle$ et $|\varphi_b\rangle$

$$\begin{aligned} \langle \varphi_a | (T_{2M} |\Psi_{ME}(t)\rangle \langle \Psi_{ME}(t)|) | \varphi_b \rangle &= c_a c_b^* e^{-i(E_a - E_b)t/\hbar} T_{2M} |X_a(t)\rangle \langle X_b(t)| \\ &= c_a c_b^* e^{-i(E_a - E_b)t/\hbar} \langle X_b(t) | X_a(t) \rangle \end{aligned} \quad (5.22)$$

- Ayant déterminé $|\Psi_{ME}(t)\rangle$ en (5.21), $|\Psi_{SM E}(t)\rangle$ s'en déduit immédiatement. Il suffit de multiplier chaque $|\varphi_a\rangle$ par $|u_a(t)\rangle$

$$|\Psi_{SM E}(t)\rangle = \sum_a c_a |u_a(t)\rangle \otimes |\varphi_a\rangle e^{-iE_a t/\hbar} \otimes |X_a(t)\rangle \quad (5.23)$$

Le facteur de réduction $\langle X_b(t) | X_a(t) \rangle$ est également celui qui réduit les cohérences quantiques de $S+M$ entre $|u_a(t)\rangle \otimes |\varphi_a\rangle$ et $|u_b(t)\rangle \otimes |\varphi_b\rangle$. Par ailleurs, il apparaît clairement sur (5.23) que les corrélations initiales présentes dans (5.19) entre $|u_a\rangle$ et $|\varphi_a\rangle$, $|u_b\rangle$ et $|\varphi_b\rangle$... ne sont pas détruites par interactions de M avec E . Ceci ne serait plus vrai dans toute autre base de M .

Dans ce qui suit, nous nous contenterons donc de calculer le passage de (5.20) à (5.21).

c. Niveaux d'énergie du système global $M+E$

- Comme tous les termes de l'hamiltonien (5.13) de $M+E$ sont diagonaux dans la base $\{|\varphi_a\rangle\}$, on peut diagonaliser H dans chaque sous-espace $|\varphi_a\rangle$. Revenant H_E sous la forme

$$H_E = \mathbb{I}_M \otimes H_E = \sum_a |\varphi_a\rangle \langle \varphi_a| \otimes H_E \quad (5.24)$$

et regroupant (5.14), (5.18) et (5.24), on peut écrire

$$H = H_m + H_E + H_{m-E} \\ = |a\rangle\langle a| \otimes (E_a + A) + |b\rangle\langle b| \otimes (E_b + B) + \dots \quad (5.25)$$

où $A, B, \dots$ sont des opérateurs de E dépendant de $a, b, \dots$ et donnés par

$$A = H_E + W_a \quad B = H_E + W_b \quad \dots \quad (5.26)$$

- Introduisons les états propres $|\alpha_i\rangle$ de A ($i=1,2,\dots$), de valeurs propres $E_{\alpha_i}^a$

$$A|\alpha_i\rangle = E_{\alpha_i}^a |\alpha_i\rangle \quad (5.27)$$

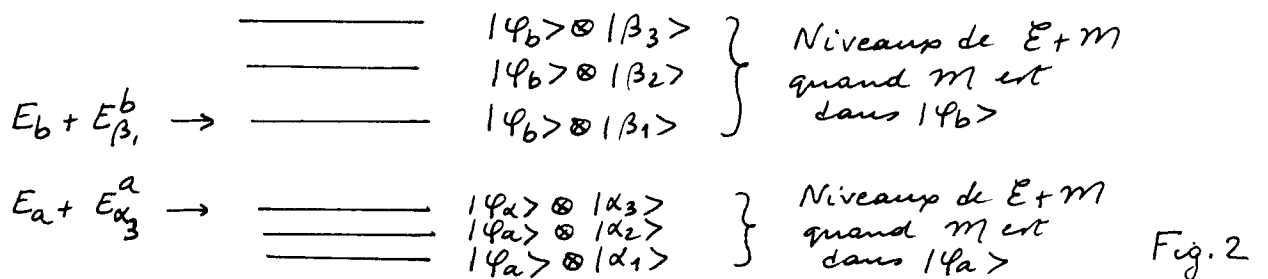
On déduit alors de (5.25) et (5.27) que

$$H|a\rangle \otimes |\alpha_i\rangle = (E_a + E_{\alpha_i}^a) |\alpha_i\rangle \quad (5.28)$$

Les états $|a\rangle \otimes |\alpha_i\rangle$ sont donc des niveaux d'énergie de $m+E$, pour lesquels m est dans $|a\rangle$, E dans $|\alpha_i\rangle$ ($i=1,2,\dots$) (voir Fig. 2). On peut de même introduire les états propres de B

$$B|\beta_j\rangle = E_{\beta_j}^b |\beta_j\rangle \quad (5.29)$$

conduisant à une autre multiplicité de niveaux d'énergie de $m+E$, pour lesquels m est dans $|\varphi_b\rangle$, E dans $|\beta_j\rangle$ (voir Fig. 2) et ainsi de suite.



- Montrons enfin qu'on peut donner une forme explicite des états $|\chi_a(t)\rangle$, $|\chi_b(t)\rangle$ apparaissant dans (5.21). Il suffit d'écrire

$$|\psi_{mE}(t)\rangle = e^{-iHt/\hbar} |\psi_{mE}(0)\rangle \quad (5.30)$$

et d'utiliser (5.20) et (5.25) pour obtenir, par comparaison avec (5.21)

$$|\chi_a(t)\rangle = e^{-iAt/\hbar} |\chi(0)\rangle \quad |\chi_b(t)\rangle = e^{-iBt/\hbar} |\chi(0)\rangle \quad \dots \quad (5.31)$$

Nous pouvons maintenant utiliser les états propres de A et B introduits plus haut pour calculer $\langle \chi_b(t) | \chi_a(t) \rangle$. Nous allons pour cela, comme dans la référence 2, distinguer 2 cas différents suivant que A et B commutent entre eux ou non.

d) Relaxation T_2 de type purement inhomogène

- Nous supposons tout d'abord que A et B commutent.

$$[A, B] = 0 \quad (5.32)$$

On peut alors trouver une base de vecteurs propres communs à A et B

$$\begin{cases} A|\alpha_i\rangle = E_{\alpha_i}^a |\alpha_i\rangle \\ B|\alpha_i\rangle = E_{\alpha_i}^b |\alpha_i\rangle \end{cases} \quad (5.33.a) \quad (5.33.b)$$

Notons cependant que les valeurs propres $E_{\alpha_i}^a$ et $E_{\alpha_i}^b$ de A et B corres-

pendant au même vecteur propre $|\alpha_i\rangle$ ne peuvent pas coïncider pour tout i . Si tel était le cas, on aurait alors $A=B$, et dans le sous-espace $\{|\varphi_a\rangle, |\varphi_b\rangle\}$, on pourrait écrire

$$H = (E_a + A) \otimes |\varphi_a\rangle\langle\varphi_a| + (E_b + A) \otimes |\varphi_b\rangle\langle\varphi_b| \\ = H_M + A \otimes (|\varphi_a\rangle\langle\varphi_a| + |\varphi_b\rangle\langle\varphi_b|) \quad (5.34)$$

Comme $|\varphi_a\rangle\langle\varphi_a| + |\varphi_b\rangle\langle\varphi_b|$ se réduit à l'opérateur unité de M , Π_M , dans le sous-espace $\{|\varphi_a\rangle, |\varphi_b\rangle\}$, on aurait alors, dans la restriction de H à ce sous-espace, aucun terme dépendant à la fois de M et de E , et susceptible donc de décrire une interaction entre M et E .

- Développons l'état initial $|\chi(0)\rangle$ de E sur la base $\{|\alpha_i\rangle\}$

$$|\chi(0)\rangle = \sum_i \gamma_i |\alpha_i\rangle \quad (5.35)$$

On obtient alors, à partir de (5.31), (5.33) et (5.35)

$$|\chi_a(t)\rangle = \sum_i \gamma_i e^{-iE_{\alpha_i}^a t/\hbar} |\alpha_i\rangle \quad (5.36.a)$$

$$|\chi_b(t)\rangle = \sum_i \gamma_i e^{-iE_{\alpha_i}^b t/\hbar} |\alpha_i\rangle \quad (5.36.b)$$

et par suite, comme $\langle\alpha_j|\alpha_i\rangle = \delta_{ij}$

$$\langle\chi_b(t)|\chi_a(t)\rangle = \sum_i |\gamma_i|^2 e^{-i(E_{\alpha_i}^a - E_{\alpha_i}^b)t/\hbar} = \sum_i p_i e^{i\omega_i t} \quad (5.37)$$

où l'on a posé

$$p_i = |\gamma_i|^2 \quad \hbar\omega_i = E_{\alpha_i}^b - E_{\alpha_i}^a \quad (5.38)$$

Comme les γ_i sont les coefficients du développement d'un vecteur normé $|\chi(0)\rangle$ on a bien sur

$$0 \leq p_i \leq 1 \quad \sum_i p_i = 1 \quad (5.39)$$

- Il apparaît clairement sur (5.37) que, pour $t=0$, $\langle\chi_b(t)|\chi_a(t)\rangle = 1$. Puis, quand t augmente, et si un grand nombre de p_i sont non nuls avec des fréquences ω_i différentes les unes des autres, on voit que $\langle\chi_b(t)|\chi_a(t)\rangle$ tend vers zéro. Les diverses exponentielles $p_i e^{i\omega_i t}$ finissent en effet par se brouiller. Si le nombre de p_i non nuls est N et si les fréquences ω_i sont réparties au hasard, il subsiste des fluctuations de $\langle\chi_b(t)|\chi_a(t)\rangle$ autour de 0, de l'ordre de $1/\sqrt{N}$, et des récurrences peuvent apparaître aux temps très longs.

- Il est possible de donner de (5.37) une interprétation très simple, en termes de "largeur de raie inhomogène". On peut en effet recréer (5.37) sous la forme

$$z(t) = \langle\chi_b(t)|\chi_a(t)\rangle = \int f_{ba}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (5.40)$$

$$\text{où} \quad f_{ba}(\omega) = \sum_i |\gamma_i|^2 \delta\left[\omega - \frac{E_{\alpha_i}^b - E_{\alpha_i}^a}{\hbar}\right] \quad (5.41)$$

La fonction $z(t)$, qui décrit comment la cohérence réduite de M entre $|\varphi_a\rangle$ et $|\varphi_b\rangle$ décroît et tend vers zéro sous l'effet du couplage avec E (voir 5.22), apparaît ainsi sous la forme de la transformée d'une densité spectrale $f_{ba}(\omega)$ donnée en (5.41).

Pour interpréter $f_{ba}(\omega)$, considérons le problème "optique" suivant. Supposons $M+E$ dans un mélange statistique des états $|\varphi_a\rangle \otimes |\alpha_i\rangle$ avec des poids $p_i = |\gamma_i|^2$ et supposons que M absorbe de la lumière sur la transition $|\varphi_a\rangle \rightarrow |\varphi_b\rangle$. Comme les états $|\beta_j\rangle$ de E dans la multiplicité $|\varphi_b\rangle$ coïncident avec les états $|\alpha_i\rangle$ de E

dans la multiplicité $|\varphi_a\rangle$ (voir 5.33) et que $\langle\alpha_j|\alpha_i\rangle = \delta_{ij}$, la seule raie permise partant de $|\varphi_a\rangle \otimes |\alpha_i\rangle$ est celle qui aboutit à $|\varphi_b\rangle \otimes |\alpha_i\rangle$ (voir Fig. 3 avec $i=1,2,3$). Elle a une "force d'oscillateur" $\langle\alpha_i|\alpha_i\rangle = 1$, une intensité proportionnelle à la population P_i du niveau de départ (cercles en noir sur la figure 3) et une fréquence (par rapport à la fréquence $(E_b - E_a)/\hbar$ de M tout seul) égale à $(E_{\alpha_i}^b - E_{\alpha_i}^a)/\hbar$. La densité spectrale $f_{ba}(\omega)$ donnée en (5.41) n'est donc autre que le spectre

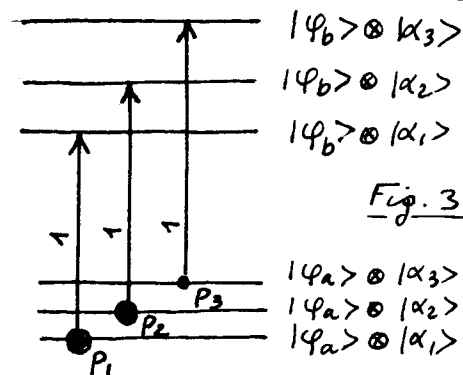


Fig. 3

d'absorption de M couplé à E et partant de l'état initial donné plus haut. La largeur spectrale d'un tel spectre est due au fait que les fréquences d'absorption ne sont pas les mêmes suivant l'état de départ $|\varphi_a\rangle \otimes |\alpha_i\rangle$. Pour cette raison, on peut considérer le spectre $f_{ba}(\omega)$ comme un spectre inhomogène et l'amortissement décrit par $\gamma(t)$ comme une relaxation de type T_2 inhomogène.

- Une telle situation, correspondant à $[A, B] = 0$, est la seule qui ait été considérée par Zurek (qui ne conserve que la partie de H_{ME} diagonale dans la base diagonalisant HE - voir ref. 1 - On peut alors montrer aisément qu'une telle approximation entraîne $[A, B] = 0$). Elle a l'inconvénient d'être très particulière et de ne conduire à aucun amortissement des cohérences réduites de M si l'état initial de E est un état propre de A ou B . En effet, dans un tel cas, tous les P_i sont nuls sauf un qui vaut 1, et $|\gamma(t)|$ reste égal à 1 pour tout t (voir 5.37). C'est pourquoi la situation $[A, B] \neq 0$, étudiée dans le paragraphe suivant, est beaucoup plus réaliste.

e. Relaxation de type T_2 à la fois homogène et inhomogène.

- Nous considérons maintenant le cas beaucoup plus général où $[A, B] \neq 0$ et où les vecteurs propres de A et B sont donc différents (voir (5.27) et (5.29)). Commençons par considérer le cas où E est initialement dans un état $|\alpha_i\rangle$ bien défini

$$|X(0)\rangle = |\alpha_i\rangle \quad (5.42)$$

Nous allons montrer que, même dans ce cas, $\langle X_b(t) | X_a(t) \rangle$ tend bien vers 0 quand t croît (contrairement à ce qui se passe si $[A, B] = 0$ - voir fin du paragraphe précédent).

- En reportant (5.42) dans (5.31), et en utilisant (5.33), on obtient

$$|X_a(t)\rangle = e^{-iAt/\hbar} |\alpha_i\rangle = e^{-iE_{\alpha_i}^a t/\hbar} |\alpha_i\rangle \quad (5.43.a)$$

$$|X_b(t)\rangle = e^{-iBt/\hbar} |\alpha_i\rangle = \sum_j e^{-iE_{\beta_j}^b t/\hbar} |\beta_j\rangle \langle \beta_j | \alpha_i \rangle = \sum_j \langle \beta_j | \alpha_i \rangle e^{-iE_{\beta_j}^b t/\hbar} |\beta_j\rangle \quad (5.43.b)$$

de sorte que

$$\gamma(t) = \langle X_b(t) | X_a(t) \rangle = \sum_j |\langle \beta_j | \alpha_i \rangle|^2 e^{i(E_{\beta_j}^b - E_{\alpha_i}^a)t/\hbar} \quad (5.44)$$

$\gamma(t)$ apparaît comme une somme d'exponentielles oscillant à des fréquences différentes $(E_{\beta_j}^b - E_{\alpha_i}^a)/\hbar$, pondérées par des facteurs $|\langle \beta_j | \alpha_i \rangle|^2$. Si $|\alpha_i\rangle$ est non orthogonal à plusieurs $|\beta_j\rangle$ (comme c'est le cas en général si $[A, B] \neq 0$) et si les fréquences $(E_{\beta_j}^b - E_{\alpha_i}^a)/\hbar$ sont suffisamment différentes, $\gamma(t)$ tend vers 0 quand t croît.

- Comme dans le paragraphe précédent, on peut considérer que la fonction $z(t)$ écrite en (5.44) est la transformée de Fourier d'une densité spectrale

$$f_{ba}^i(\omega) = \sum_{\beta_j} |\langle \beta_j | \alpha_i \rangle|^2 \delta(\omega - \frac{E_{\beta_j}^b - E_{\alpha_i}^a}{\hbar}) \quad (5.45)$$

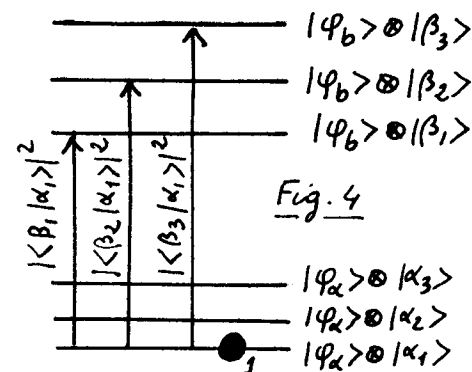


Fig. 4

qui peut être interprétée "optiquement" de la manière suivante. Le système global $M + E$ part de l'état $|\varphi_a\rangle \otimes |\alpha_i\rangle$ (voir Fig. 4 où $i=1$). Comme les états propres de E ne sont pas les mêmes si M est dans $|\varphi_a\rangle$ ou $|\varphi_b\rangle$, M peut, par absorption de lumière, passer de $|\alpha_i\rangle$ vers tous les $|\beta_j\rangle$, les "forces d'oscillateur" des diverses transitions étant $|\langle \beta_j | \alpha_i \rangle|^2$ et les fréquences $(E_{\beta_j}^b - E_{\alpha_i}^a)/\hbar$. La densité spectrale (5.45) peut donc être considérée comme donnant la forme de la raie d'absorption de M à partir d'un état $|\alpha_i\rangle$ bien défini. Il n'y a plus sommation sur plusieurs états $|\alpha_i\rangle$ (comme dans (5.41)). Le spectre (5.45) est donc un spectre homogène et l'amortissement $z(t)$ correspondant (5.44) décrit une relaxation de type T_2 homogène.

- Evidemment, si plusieurs états $|\alpha_i\rangle$ sont initialement peuplés, il faut sommer tous les spectres homogènes $f_{ba}^i(\omega)$ pondérés par les probabilités d'occupation p_i des états $|\alpha_i\rangle$. Si les centres des différents spectres $f_{ba}^i(\omega)$ avec $i=1, 2, \dots$ ne coïncident pas, il y aura en plus une contribution inhomogène à la densité spectrale $f_{ba}(\omega)$ et bien sûr une contribution inhomogène à la relaxation de type T_2 . Le centre $\bar{\omega}_i$ du spectre $f_{ba}^i(\omega)$ (par rapport à $(E_b - E_a)/\hbar$) s'obtient en pondérant les positions des transitions $|\alpha_i\rangle \rightarrow |\beta_j\rangle$ (i fixe, j variable) par leurs probabilités $|\langle \beta_j | \alpha_i \rangle|^2$

$$\begin{aligned} \hbar \bar{\omega}_i &= \sum_{\beta_j} (E_{\beta_j}^b - E_{\alpha_i}^a) |\langle \beta_j | \alpha_i \rangle|^2 = \sum_{\beta_j} \langle \alpha_i | \beta_j \rangle E_{\beta_j}^b \langle \beta_j | \alpha_i \rangle - E_{\alpha_i}^a \sum_{\beta_j} \langle \alpha_i | \beta_j \rangle \langle \beta_j | \alpha_i \rangle \\ &= \langle \alpha_i | B | \alpha_i \rangle - E_{\alpha_i}^a = \langle \alpha_i | (B - A) | \alpha_i \rangle \end{aligned} \quad (5.46)$$

Si $\hbar \bar{\omega}_i$ ne dépend pas de i , il n'y a pas de contribution inhomogène à T_2 .

f - Limite des faibles couplages - Liens avec l'équation pilote

- Montrons tout d'abord qu'une autre interprétation peut être donnée de l'expression (5.44) de $z(t)$.

Considérons pour cela un système quantique d'hamiltonien $\hbar = B$ et d'états propres d'énergie $|\beta_j\rangle$. Supposons qu'à l'instant $t=0$ ce système soit dans l'état $|\alpha_i\rangle$ qui ne coïncide pas avec les états propres $|\beta_j\rangle$ de $\hbar = B$

$$|\psi(0)\rangle = |\alpha_i\rangle \quad (5.47)$$

Un instant t après, l'état du système est devenu

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iBt/\hbar} |\psi(0)\rangle = \sum_{\beta_j} e^{-iE_{\beta_j}^b t/\hbar} |\beta_j\rangle \langle \beta_j | \alpha_i \rangle \quad (5.48)$$

et $z(t)$ peut alors être interprété comme

$$z(t) = \langle \alpha_i | e^{-iBt/\hbar} | \alpha_i \rangle \quad (5.49)$$

c'est à dire comme l'amplitude de probabilité pour que le système, partant de l'état $|\alpha_i\rangle$ à $t=0$, soit resté dans l'état $|\alpha_i\rangle$ à l'instant t .

- L'état initial $|\alpha_i\rangle$, état propre de A , peut être considéré comme un état propre d'un hamiltonien "non perturbé" $\hbar_0 = A$. Sous

l'effet du couplage $v = h - h_0$, qui est égal à $B - A = W_b - W_a$ (voir (5.26)), cet état va se désintégrer vers le quasicontinuum formé par les autres états propres de h_0 , et $z(t)$ est l'amplitude qui décrit cette désintégration.

- Si le couplage $v = h - h_0 = B - A$ est assez faible, c-à-d si H_{M-E} est assez faible (puisque W_b et W_a sont reliés à H_{M-E} - voir (5.14)), les conditions d'application de la règle d'or de Fermi sont remplies et on peut définir une probabilité de désintégration par unité de temps, proportion au carré d'un élément de matrice de v et à une densité d'états finals, et $z(t)$ va décroître exponentiellement. On peut montrer que le résultat obtenu pour $z(t)$ coïncide avec celui fourni par l'équation pilote qui prédit que les cohérences réduites de M s'amortissent exponentiellement sous l'effet du couplage avec E qui apparaît comme un réservoir (voir cours 88-89, appendice du cours VIII et références in). Le traitement présenté ici est cependant plus général que l'équation pilote. L'expression générale (5.44) obtenue pour $z(t)$ peut contenir des corrections non markoviennes (décroissance non exponentielle). Il y a aussi une contribution inhomogène à la relaxation T_2 . La valeur moyenne de $v = B - A$ dans l'état $|\alpha_i\rangle$ (voir (5.46)) peut en effet être non nulle et varier avec α_i , contrairement à ce qui est supposé en général dans l'établissement de l'équation pilote.

- Dans le cas particulier où $H_{M-E} = V \otimes W$ (voir (5.15)), on a $v = B - A = (\lambda_b - \lambda_a) W$ où λ_a et λ_b sont les valeurs propres de l'opérateur V de M apparaissant dans H_{M-E} (voir (5.17) et (5.16)). Le temps de destruction de la cohérence réduite de M entre $|\varphi_a\rangle$ et $|\varphi_b\rangle$ sera donc, à la limite des faibles couplages, proportionnel à $(\lambda_a - \lambda_b)^2$ puisqu'il fait intervenir alors le carré des éléments de matrice de v . On retrouve que la cohérence réduite entre les 2 états $|\varphi_a\rangle$ et $|\varphi_b\rangle$, états propres de l'observable V de M apparaissant dans l'hamiltonien d'interaction H_{M-E} , décroît proportionnellement au carré de la distance entre les 2 valeurs propres

Références

- (1) W. Zurek Phys. Rev. D 26, 1862 (1982)
- (2) T. Endo. Journ. of. the Phys. Soc. of Jap. 57, 71 (1988)
T. Endo " " " " " " " 56, 1684 (1987)