

Buts de cours

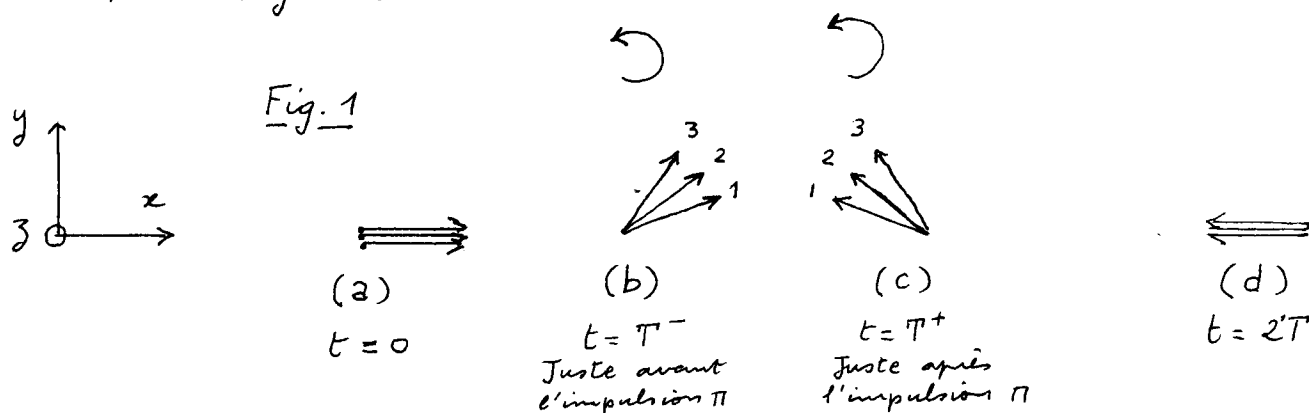
- Passer en revue un certain nombre d'expériences où un atome traverse successivement plusieurs ondes laser progressives et où le signal intéressant ne s'annule pas après moyenne sur les vitesses atomiques.
- Montrer que chacune de ces expériences peut être interprétée comme une expérience d'interférométrie atomique dans laquelle un paquet d'ondes atomique incident est séparé en 2 paquets d'ondes cohérents, ces 2 paquets d'ondes étant ensuite recombinés. Il existe donc un lien intéressant entre certaines expériences de spectroscopie laser à haute résolution sans effet Doppler et l'interférométrie atomique.

① Echos de photons à 2 ondes progressives.

a. Etude qualitative

- Rappel du principe des échos de photons en RMN (Réf. 1)

Des spins, placés dans un champ magnétique inhomogène ont des fréquences de Larmor autour de Oz variant d'un spin à l'autre. A $t=0$, ils pointent tous le long de la direction positive de Oz . Une impulsion $\pi/2$ très brève de radiofréquence les bascule tous le long de Ox (Fig. 1a). Les spins précessent alors librement autour de Oz , les plus rapides prenant une certaine avance sur les plus lents (Fig. 1b). A l'instant $t=T$, on applique une impulsion π très brève de radiofréquence autour de Oy , ce qui revient à placer chaque spin dans l'état symétrique par rapport à Oy (Fig. 1c). Les spins continuent alors à précesser dans le même sens autour de Oz , mais l'effet de l'impulsion π a été de replacer les plus rapides après les plus lents (comparer les figures 1.b et 1.c). Les plus rapides vont donc rattraper les plus lents, et à l'instant $t=2T$, les spins vont tous se retrouver en phase (Fig. 1d).



- Traversée de 2 ondes laser progressives parallèles produisant des impulsions $\pi/2$ et π . (Pour les échos de photons optiques, voir Réfs 2 et 3)
- Revenons aux expériences discutées dans le cours II. Un atome

traverse 2 ondes laser progressives parallèles, la 1^{ère} produisant une impulsion $\pi/2$, la 2^{ème} une impulsion π (Fig. 2)

III-2

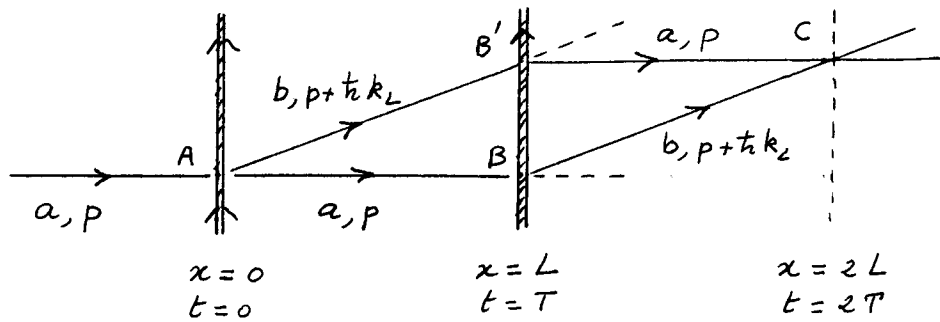


Fig. 2

Comme sur la figure 5 du cours II, l'atome arrive dans l'état $|a, p\rangle$. L'impulsion $\pi/2$ associée à la traversée de la 1^{ère} onde laser en $x=0$ (et $t=0$), transforme son état en une superposition linéaire de $|a, p\rangle$ et $|b, p+\hbar k_L\rangle$ avec des coefficients de même module ($1/\sqrt{2}$). 2 chemins différents AB et AB' peuvent alors être suivis par le système. L'impulsion π associée à la traversée de la 2^{ème} onde laser transforme l'état $|a, p\rangle$ du chemin AB en $|b, p+\hbar k_L\rangle$, et l'état $|b, p+\hbar k_L\rangle$ du chemin AB' en $|a, p\rangle$.

- Sur la figure 2, les segments de droite AB, AB', BC, B'C... sont des représentations diagrammatiques des vecteurs d'onde associés aux ondes de de Broglie planes de l'atome. Ce ne sont donc pas des trajectoires classiques. Plus loin, dans le § 3, nous reviendrons sur la possibilité d'associer à ces segments de droite des trajectoires suivies par le centre d'un paquet d'ondes atomique.

Il apparaît clairement sur la figure 2 que les segments de droite représentant les états possibles du système après traversée de la 2^{ème} onde se recoupent en un point C, d'abscisse $x=2L$ et correspondant donc à un temps $t=2T$. Est-il possible d'associer à ce point d'intersection C un phénomène d'écho analogue à celui de la figure 1 ?

- Avant d'associer au point C un phénomène de recombinaison entre 2 paquets d'ondes cohérents obtenus après traversée de la 1^{ère} lame (voir § 3), nous allons étudier ici le déphasage dû à l'évolution libre le long du chemin ABC et le long du chemin AB'C et montrer que les termes dépendant de $v = p/M$ se compensent pour $t=2T$.

Considérons donc un instant $t > T$ postérieur à l'instant de traversée de la 2^{ème} lame, et calculons les exponentielles d'évolution libre le long des 2 chemins entre $t=0$ et t .

$$\text{Chemin ABC} : e^{-i\omega_{a,p}T} e^{-i\omega_{b,p+\hbar k_L}(t-T)} \quad (3.1.a)$$

$$\text{Chemin AB'C} : e^{-i\omega_{b,p+\hbar k_L}T} e^{-i\omega_{a,p}(t-T)} \quad (3.1.b)$$

En utilisant les expressions (2.12.a) et (2.12.b) de $\omega_{a,p}$ et $\omega_{b,p+\hbar k_L}$, on obtient, pour les termes dépendant de $v = p/M$, dans les exponentielles d'évolution libre le long des 2 chemins

$$\text{Chemin ABC} : e^{-ik_L v (t-T)} \quad (3.2.a)$$

$$\text{Chemin AB'C} : e^{-ik_L v T} \quad (3.2.b)$$

Le déphasage dû à v entre les 2 amplitudes associées aux 2 chemins ABC et AB'C est donc égal à la différence entre les phases des 2 exponentielles (3.2.a) et (3.2.b)

$$\Phi = -k_L v (t - 2T) \quad (3.3)$$

On voit qu'il s'annule pour $t = 2T$. La moyenne sur les vitesses transverses v des atomes, ne fera donc plus disparaître les effets d'interférence entre les 2 chemins possibles du système, pour $t = 2T$. L'atome accumule un certain déphasage Doppler entre $t=0$ et $t=T$. L'impulsion π change le signe du déphasage Doppler et le nouveau déphasage accumulé entre $t=T$ et $t=2T$ compense le premier.

- Insensibilité au désaccord $\delta = \omega_L - \omega_A$

Entre $t=0$ et $t=T$, l'état a est associé au chemin inférieur AB, alors que l'état b est associé au chemin supérieur AB'. Les amplitudes des 2 chemins diffèrent donc à l'instant $t=T$ par un facteur de phase $e^{i(\delta - \omega_R)T}$ où δ et ω_R sont donnés en (2.18). Comme les états internes associés aux 2 chemins sont interchangés après l'impulsion π , le nouveau facteur de phase qui apparaît entre $t=T$ et $t=2T$ est $e^{-i(\delta - \omega_R)T}$. Il compense donc le premier, de sorte que le déphasage entre les 2 amplitudes en $t=2T$ ne dépend ni de v , ni du désaccord δ .

b - Comment apparaît le phénomène d'écho

Les 2 segments de droite qui se croisent en C correspondent à des états internes différents. Le phénomène résonnant apparaissant autour de $t=2T$ doit donc se manifester sur le moment dipolaire électrique $\vec{d}$ qui est sensible aux cohérences entre a et b (de même qu'en RMN le phénomène d'écho se manifeste sur l'aimantation transversale, sensible aux cohérences entre les états $|\uparrow\rangle$ et $|\downarrow\rangle$ du spin). Par ailleurs, les 2 segments de droite qui se croisent en C correspondent à des impulsions différentes p et $p + \hbar k_L$ le long de la direction Oz des ondes laser. Les grandeurs atomiques sensibles aux interférences entre les 2 chemins doivent donc présenter une modulation spatiale le long de Oz (conséquence d'une cohérence entre 2 états d'impulsions différentes). Ces 2 remarques nous conduisent donc à étudier comment varie, après $t=T$, la densité spatiale de polarisation associée à l'atome.

- Densité de polarisation $\vec{d}(z)$

Introduisons l'opérateur

$$\vec{d}(z) = \vec{d} |3\rangle \langle 3| \quad (3.4)$$

produit de l'opérateur interne $\vec{d}$ par l'opérateur externe $|3\rangle \langle 3|$ qui représente la densité atomique en z (et dont la valeur moyenne est la densité de présence de l'atome en z).

Nous allons calculer la valeur moyenne de $\vec{d}(z)$ dans l'état $|\psi(t)\rangle$ de l'atome après traversée des 2 ondes et voir si un phénomène résonnant apparaît sur cette valeur moyenne

- Calcul de l'état $|\psi(t)\rangle$ de l'atome après traversée des 2 lames

- Nous suivons la même méthode que dans le § 3 du cours II. A un instant t postérieur à la traversée de la 2^{ème} lame ($t > T$), nous pouvons écrire

$$|\psi(t)\rangle = c_a(t) |a, p\rangle + c_b(t) |b, p + \hbar k_L\rangle \quad (3.5)$$

où

$$\begin{cases} c_a(t) = [e^{-i\omega_{a,p}(t-T)}] [S_{ab}^{(2)} e^{i(\omega_L T + \varphi_2)}] [e^{-i\omega_{b,p+\hbar k_L} T}] [S_{ba}^{(1)} e^{-i(\omega_L \times 0 + \varphi_1)}] \\ c_b(t) = [e^{-i\omega_{b,p+\hbar k_L}(t-T)}] [S_{ba}^{(2)} e^{-i(\omega_L T + \varphi_2)}] [e^{-i\omega_{a,p} T}] [S_{aa}^{(1)}] \end{cases} \quad (3.6)$$

- Pour des impulsions $\frac{\pi}{2}$ et π , on a, compte tenu de (2.26)

$$\begin{cases} S_{aa}^{(1)} = S_{bb}^{(1)} = 1/\sqrt{2} & S_{ab}^{(1)} = S_{ba}^{(1)} = -i/\sqrt{2} \\ S_{aa}^{(2)} = S_{bb}^{(2)} = 0 & S_{ab}^{(2)} = S_{ba}^{(2)} = -i \end{cases} \quad (3.7)$$

Pour simplifier, nous supposons que les 2 ondes ont même phase

$$\varphi_1 = \varphi_2 = 0 \quad (3.8)$$

On en déduit

$$c_a(t) = -\frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\Delta T} e^{-i\omega_{a,p} t} \quad c_b(t) = -\frac{i}{\sqrt{2}} e^{-i\Delta T} e^{-i\omega_{b,p+\hbar k_L} t} \quad (3.9)$$

où Δ est défini en (2.16)

- Calcul de la valeur moyenne de la densité de polarisation $\vec{d}(z)$

$$\begin{aligned} \langle \psi(t) | \vec{d}(z) | \psi(t) \rangle &= c_a(t) c_b^*(t) \langle b, p + \hbar k_L | (\vec{d} | 3 \rangle \langle 3 |) | a, p \rangle + c.c. \\ &= \frac{1}{2\pi\hbar} \vec{D} e^{-ik_L z} c_a(t) c_b^*(t) + c.c. \end{aligned} \quad (3.10)$$

On a utilisé (2.3) et le fait que $\langle 3 | p \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{ipz/\hbar}$. Si l'on reporte (3.9) dans (3.10) et qu'on multiplie par $e^{i\omega_L t} e^{-i\omega_L t}$, on obtient

$$\langle \psi(t) | \vec{d}(z) | \psi(t) \rangle = \vec{A} e^{i(\omega_L t - k_L z)} + c.c. \quad (3.11)$$

où

$$\vec{A} = -\frac{i}{4\pi\hbar} \vec{D} e^{-i\Delta(t-2T)} = -\frac{i}{4\pi\hbar} \vec{D} e^{-i(\delta - \omega_R - k_L v)(t-2T)} \quad (3.12)$$

compte tenu de (2.17).

- Discussion physique

- Pour chaque valeur de v , il apparaît une onde de densité de polarisation de même vecteur d'onde k_L que les ondes laser.
- La moyenne sur v de $\vec{A}$ est en général nulle. Ceci signifie que les ondes de polarisation associées aux divers atomes de vitesses différentes v se brouillent.

Ce brouillage ne se produit plus sur un intervalle de temps Δt très étroit autour de $t = 2T$, valeur de t pour laquelle l'argument de l'exponentielle de (3.12) s'annule. La largeur de cet intervalle de temps Δt est de l'ordre de l'inverse de la largeur Doppler $k_L \delta v$, δv étant la dispersion des valeurs de v autour de $\bar{v} = 0$. Après cette moyenne sur v , le facteur de phase qui subsiste dans (3.12), $\exp[-i(\delta - \omega_R)(t-2T)]$, est égal à 1

pour $t = 2T$ et ne dépend plus alors de δ . Pour $|t - 2T| \ll 1/k_L \delta v$, ce facteur de phase reste pratiquement égal à 1 tant que $\delta - \omega_R$ reste inférieur à $k_L \delta v$.

L'apparition transitoire de cette densité de polarisation moyenne en $e^{i(\omega_L t - k_L z)}$ autour de $t = 2T$ (c.-à-d. encore autour de $x = 2L$) entraîne que le milieu atomique peut émettre autour de $t = 2T$ une impulsion lumineuse dans la même direction que les 2 ondes laser. C'est le phénomène d'écho recherché.

- On pourrait également appliquer une 3^{ème} onde laser progressive, parallèle aux 2 autres, en $x = 2L$, et étudier comment cette onde échange de l'énergie avec la densité de polarisation qui apparaît à son emplacement. On trouverait qu'il apparaît, sur la probabilité P_b (P_a) de trouver l'atome dans l'état b (a) après traversée de la 3^{ème} onde, des effets d'interférence qui ne s'annulent pas après moyenne sur v et qui ne dépendent que très peu de δ .

② Franges de Ramsey à 4 ondes progressives (Réf. 4, 5)

a) - Problème physique étudié

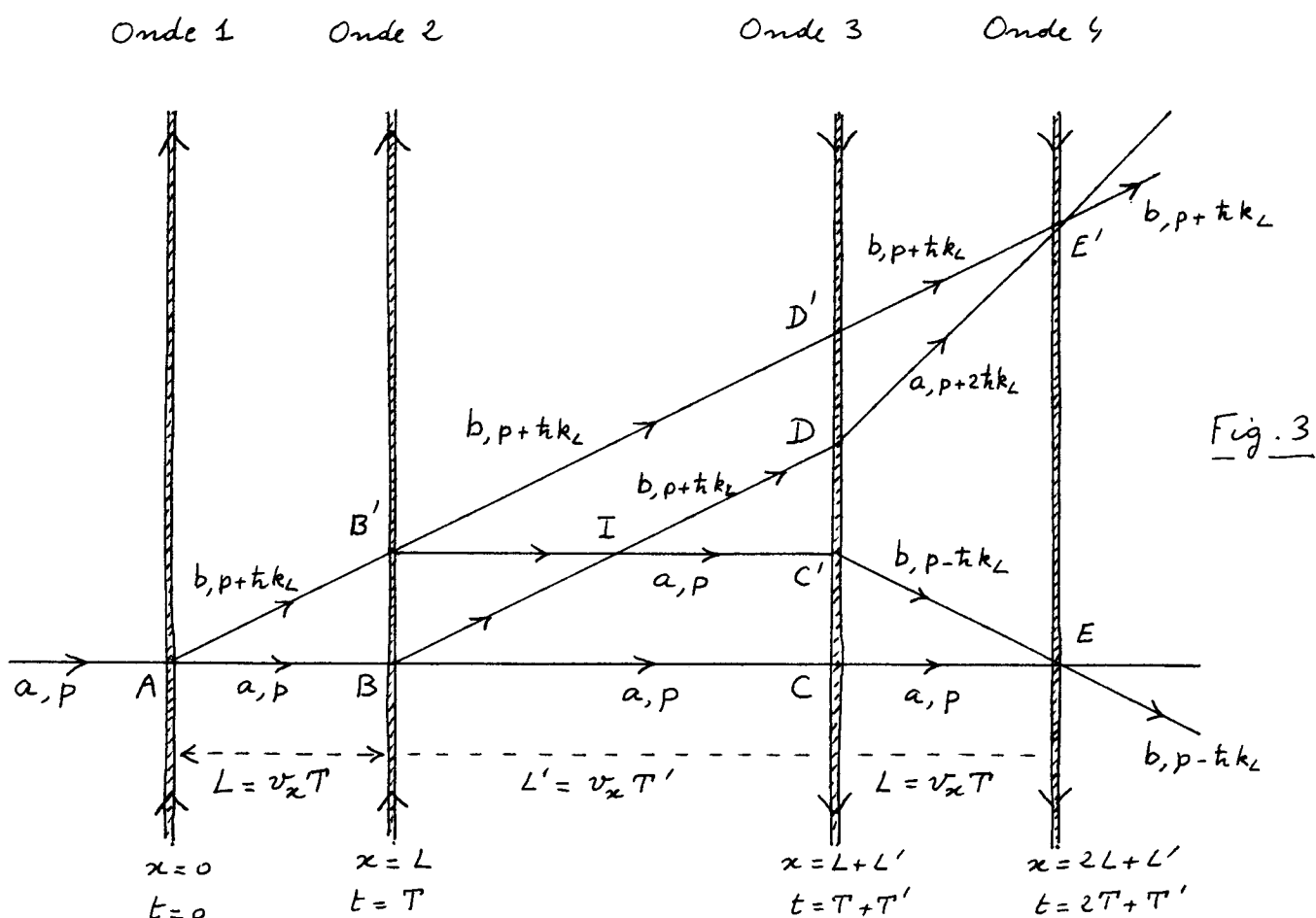


Fig. 3

L'atome traverse 2 paires d'ondes progressives se propageant dans des sens opposés (Voir Fig. 3). Il entre dans l'état $|a, p\rangle$ et on cherche la probabilité de le trouver dans l'état b après traversée des 4 ondes.

b) Effets d'interférence pouvant donner des franges de Ramsey

- La figure 3 représente quelques "chemins" possibles du système. Comme les photons associés aux ondes 3 et 4 ont des impulsions $- \hbar k_L$, le passage de a à b (avec absorption d'un photon) au point C' ou au point E' diminue p de $\hbar k_L$, alors que le passage de b à a (avec émission d'un photon) en D augmente p de $\hbar k_L$.
- Effets d'interférence ne s'annulant pas après moyenne sur v .

Le même raisonnement que celui fait dans le § 1 plus haut montre que les chemins qui interfèrent doivent se croiser si l'on veut que la moyenne sur v des termes d'interférence ne s'annule pas. Les déphasages Doppler sur les 2 chemins doivent en effet être les mêmes et il ne peut en être ainsi qu'au voisinage d'un point de croisement.

Considérons par exemple les 2 chemins $AB'D'E'$ et $ABDE'$ qui conduisent tous les deux à l'état $b, p + \hbar k_L$. Entre $t=0$ et $t=T$, le déphasage Doppler est $-k_L v T$ sur le chemin du haut, 0 sur le chemin du bas. Entre $t=T$ et $t=T+T'$ les déphasages Doppler sont les mêmes. Enfin, entre $t=T+T'$ et $t=2T+T'$, le déphasage Doppler est $-k_L v T$ sur le chemin du haut, $-2k_L v T$ sur le chemin du bas. Le retard pris par le chemin du haut entre $t=0$ et $t=T$ est donc rattrapé entre $t=T+T'$ et $t=2T+T'$. Le même raisonnement est valable pour les 2 chemins $AB'C'E$ et $ABCE$ qui conduisent tous les deux à $b, p - \hbar k_L$ et se croisent en E .

- Effets d'interférence sensibles au déphasage

Revenons aux 2 chemins $AB'D'E'$ et $ABDE'$. Dans la partie centrale ($B'D'$ et BD), l'état interne est le même dans les 2 chemins. Il n'en est pas de même dans les 2 parties extrêmes (AB' et AB , $D'E'$ et DE'). Mais l'état interne b est toujours dans le chemin du haut alors que l'état interne a est toujours dans le chemin du bas. Les déphasages liés au désaccord $\delta = \omega_L - \omega_A$ entre AB' et AB d'une part, $D'E'$ et DE' d'autre part, s'ajoutent donc. L'interférence entre les 2 chemins fait donc apparaître un facteur de phase relatif en $\exp(2i\delta T)$ et doit donc pouvoir donner naissance à des franges de Ramsey. Le même raisonnement est valable pour les 2 chemins $AB'C'E$ et $ABCE$.

- On peut vérifier qu'il n'existe pas d'autres paires de chemins, autres que les 2 paires représentées sur la figure 3, qui, à la fois se croisent et sont sensibles au désaccord δ . Par exemple, on voit sur la figure 3 un croisement I qui correspond à l'écho de photons étudié au § 2, mais qui ne donne pas de franges de Ramsey.

c) Calcul de la probabilité de changer d'état interne après traversée des 4 ondes.

- Hypothèses simplificatrices. - On néglige tout processus dissipatif.

Toutes les phases sont supposées égales : $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \varphi_4 = 0$.

Chaque traversée est équivalente à une impulsion $\pi/2$. Toutes les matrices S sont égales à

$$(S) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -i/\sqrt{2} \\ -i/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

- Termes carrés

A chaque traversée d'onde, chaque chemin se sépare en 2, de sorte qu'après traversée de la 4^{ème} onde, il y a $2^4 = 16$ chemins, 8 correspondant à l'état interne b , et 8 à l'état a (la figure 3 ne représente que 8 de ces 16 chemins possibles, qui sont au nombre de 4 avant traversée de la 4^{ème} onde).

Par symétrie, les probabilités de ces 16 chemins sont égales au carré du module d'un produit de 4 éléments de matrice S , c'est à dire d'après (3.13) à $(1/2)^4 = 1/16$ (les exponentielles d'évolution libre et les exponentielles associées à l'absorption ou à l'émission d'un photon ont un module égal à 1 - Voir fin du § 2 du cours II).

La contribution des termes carrés à la probabilité $P(b)$ d'énergie dans l'état b après traversée des 4 ondes est donc égale à

$$\text{Contribution des termes carrés à } P(b) = 8 \times \frac{1}{16} = \frac{1}{2} \quad (3.14)$$

- Interférences entre les 2 chemins $AB'D'E'$ et $ABDE'$

- Amplitude associée à $AB'D'E'$

En appliquant la règle donnée à la fin du § 2 du cours II, on trouve

$$\mathcal{A}_1 = \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \right] \left[e^{-i\omega_{b,p+\hbar k_L} T} \right] \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \right] \left[e^{-i\omega_{b,p+\hbar k_L} T'} \right] \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \right] \left[e^{-i\omega_{b,p+\hbar k_L} T} \right] \left[\frac{-i}{\sqrt{2}} \right] \quad (3.15.a)$$

- Amplitude associée à $ABDE'$

$$\mathcal{A}_2 = \left[\frac{-i}{\sqrt{2}} e^{-i\omega_L(2T+T')} \right] \left[e^{-i\omega_{a,p+2\hbar k_L} T} \right] \left[\frac{-i}{\sqrt{2}} e^{i\omega_L(T+T')} \right] \left[e^{-i\omega_{b,p+\hbar k_L} T'} \right] \left[\frac{-i}{\sqrt{2}} e^{-i\omega_L T} \right] \left[e^{-i\omega_{a,p} T} \right] \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \right] \quad (3.15.b)$$

- En utilisant les définitions de $\omega_{a,p}$, $\omega_{a,p+2\hbar k_L}$, $\omega_{b,p+\hbar k_L}$ (voir Eqs. 2.12), de même que les définitions (2.18) de δ , ω_D , ω_R , on obtient

$$\mathcal{A}_1 \mathcal{A}_2^* + \mathcal{A}_1^* \mathcal{A}_2 = -\frac{1}{8} \cos 2(\omega_L - \omega_A + \omega_R) T \quad (3.16)$$

On vérifie bien sur (3.16) que les termes d'interférence entre $AB'D'E'$ et $ABDE'$ sont indépendants de $\omega_D = \hbar k_L p / m = \hbar k_L v$, mais dépendent par contre de $\delta = \omega_L - \omega_A$.

- Interférences entre les 2 chemins $AB'C'E'$ et $ABCE'$

Si $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ sont les amplitudes associées à ces 2 chemins, un calcul analogue au précédent donne

$$\mathcal{B}_1 \mathcal{B}_2^* + \mathcal{B}_1^* \mathcal{B}_2 = -\frac{1}{8} \cos 2(\omega_L - \omega_A - \omega_R) T \quad (3.17)$$

- Récapitulation. En regroupant tous les résultats précédents, on trouve, pour la probabilité $P(b)$

$$P(b) = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} [\cos 2(\omega_L - \omega_A + \omega_R) T + \cos 2(\omega_L - \omega_A - \omega_R) T] \quad (3.18)$$

Si l'énergie de recul peut être négligée, l'expression précédente se simplifie pour donner

$$P(b) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \cos 2(\omega_L - \omega_A) T \quad (3.19)$$

d) Discussion physique

- L'expression (3.18) montre qu'il apparaît sur $P(b)$ 2 systèmes de franges de Ramsey centrés en $\omega_L = \omega_A + \omega_R$ et $\omega_L = \omega_A - \omega_R$. S'il existe une dispersion de vitesses δv_x sur la vitesse des atomes v_x perpendiculaire aux ondes laser (voir Fig. 1 du cours II), ceci entraîne une dispersion δT et $\delta T'$ des temps d'interaction T et T' . La moyenne

de (3.16) et (3.17) sur T atteinte beaucoup les franges autres que la frange centrale. L'allure de $P(b)$ est alors celle d'un doublet de 2 raies étroites (de largeur $1/\bar{T}$), centrées en $\omega_L = \omega_A \pm \omega_R$ (doublet de recul).

- On voit sur la figure 3 que, dans la région centrale (entre les ondes 2 et 3), l'état interne est le même sur les 2 chemins se croisant en E (état a), et différent de l'état interne correspondant aux 2 chemins se croisant en E' (état b). Si les durées de vie τ_a et τ_b des états a et b satisfont $\tau_a \gg T' + 2T$, $T' \gg \tau_b \gg T$, la contribution des 2 chemins se croisant en E' est éliminée, et $P(b)$ se réduit à (3.17).

- Des franges de Ramsey à 4 ondes progressives ont été observées sur des molécules SF_6 (Voir Réfs 4, 5 qui donnent également une interprétation des franges en termes de spin jectif et une représentation diagrammatique de calculs faite sur la matrice densité - Voir aussi Réfs. 6 et 7)

③ Lien avec l'interférométrie atomique (Voir Réfs 8 et 9)

a - Autre représentation possible de l'état atomique externe.

- Représentation utilisée jusqu'ici - Représentation 1

Mélange statistique d'états $|p\rangle$. Chaque état $|p\rangle$ du mélange correspond à une onde plane $e^{ipz/\hbar}$.

Dispersion $\delta p = M \delta v$ des valeurs possibles de p

- Autre représentation possible - Représentation 2

Un même opérateur densité peut être associé à plusieurs mélanges statistiques différents.

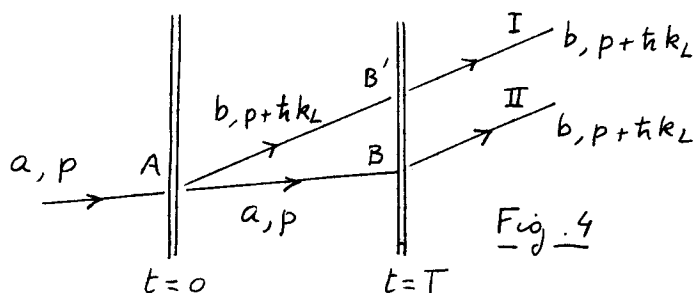
Un mélange statistique d'états $|p\rangle$ est équivalent à un mélange statistique de paquets d'ondes

La largeur Δz en z de chaque paquet d'ondes est supérieure ou égale à la longueur de cohérence ξ le long de l'axe z .

$$\xi = \frac{\hbar}{\delta p} = \frac{\hbar}{M \delta v} \quad (3.20)$$

b - Autre interprétation possible du brouillage des signaux par moyenne sur v .

- Retour aux franges de Ramsey à 2 ondes progressives



2 chemins possibles pour passer de l'état interne a à l'état interne b . Le photon peut être absorbé, soit dans la 1^{ère} onde (chemin I : AB') soit dans la 2^{ème} (chemin II : AB)

• La figure 4 est dessinée en prenant des états externes d'impulsion bien définie. Chaque segment de droite correspond à une onde plane, p ou $p + \hbar k_L$.

• Si l'état entrant externe est un état quelconque $|\psi\rangle$, décrit par le paquet d'ondes $\psi(z)$ (juste avant $t=0$), on peut suivre l'évolution

de l'état externe le long de chaque chemin. L'absorption d'un photon est décrite par l'action de l'opérateur $e^{ik_L Z}$ (opérateur de translation de l'impulsion, d'une quantité $\hbar k_L$ correspondant à l'impulsion du photon absorbé); l'évolution libre pendant un intervalle de temps T est décrite par l'action de l'opérateur $e^{-iP^2 T / 2M \hbar}$ où P est l'opérateur impulsion. On en déduit que les états externes $|\Psi_I\rangle$ et $|\Psi_{II}\rangle$ correspondant aux 2 chemins I et II sont donnés (juste après $t=T$) par les expressions

$$\begin{cases} |\Psi_I(t+T)\rangle = e^{-i\frac{P^2}{2M}\frac{T}{\hbar}} e^{ik_L Z} |\Psi\rangle & (3.21.a) \\ |\Psi_{II}(t+T)\rangle = e^{ik_L Z} e^{-i\frac{P^2}{2M}\frac{T}{\hbar}} |\Psi\rangle & (3.21.b) \end{cases}$$

- Dans la représentation 2, les segments de droite de la figure 4 peuvent être interprétés comme étant les trajectoires suivies par le centre du paquet d'ondes incident. P doit être alors compris comme l'impulsion moyenne du paquet d'ondes incident. BB' représente l'écart spatial entre les centres des 2 paquets d'ondes obtenus après traversée de la première lame. On a

$$BB' = \frac{\hbar k_L}{M} T = v_{rec} T \quad (3.22)$$

où $v_{rec} = \hbar k_L / M$

est la vitesse de recul associée à l'absorption d'un seul photon. Notons que BB' est indépendant de P .

- Intégrale de recouvrement des 2 paquets d'ondes sortants

- C'est le produit scalaire $\mathcal{R}$ des 2 états externes sortants

$$\mathcal{R} = \langle \Psi_{II}(t+T) | \Psi_I(t+T) \rangle \quad (3.23)$$

Notons que ce produit scalaire n'évolue plus après $t=T$, car une évolution unitaire ne change pas le produit scalaire

- Pour calculer $\mathcal{R}$, nous utiliserons

$$e^{-ik_L Z} P e^{ik_L Z} = P + \hbar k_L \quad (3.24)$$

qui découle de $[P, Z] = -i\hbar$. On obtient alors

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= \langle \Psi_{II}(t+T) | \Psi_I(t+T) \rangle = \langle \Psi | e^{i\frac{P^2}{2M}\frac{T}{\hbar}} e^{-ik_L Z} e^{-i\frac{P^2}{2M}\frac{T}{\hbar}} e^{ik_L Z} | \Psi \rangle \\ &= \langle \Psi | e^{i\frac{P^2}{2M}\frac{T}{\hbar}} e^{-i\frac{(P+\hbar k_L)^2}{2M}\frac{T}{\hbar}} | \Psi \rangle = e^{-i\frac{\hbar k_L^2}{2M} T} \langle \Psi | e^{-i v_{rec} T P / \hbar} | \Psi \rangle \quad (3.25) \end{aligned}$$

- Calcul de $\langle \Psi | e^{-i v_{rec} T P / \hbar} | \Psi \rangle$ en représentation position

En utilisant le fait que $e^{iaP/\hbar}$ est un opérateur de translation de la position

$$e^{iaP/\hbar} |z\rangle = |z-a\rangle \quad (3.26)$$

on obtient pour $\mathcal{R}$, compte tenu de $\omega_R = \hbar k_L^2 / 2M$

$$\mathcal{R} = e^{-i\omega_R T} \int dz \Psi^*(z + v_{rec} T) \Psi(z) \quad (3.27)$$

L'intégrale de (3.27) est l'intégrale de recouvrement de 2 paquets d'ondes identiques au paquet d'ondes incident et décalés l'un par rapport à l'autre de $v_{rec} T = BB'$ (voir 3.22). Cette intégrale peut être encore considérée comme la cohérence spatiale globale du paquet d'ondes incident à une distance donnée $v_{rec} T$ (somme des cohérences spatiales entre tous les couples de points z et z' séparés par une distance donnée $z-z' = v_{rec} T$)

- Calcul de $\langle \psi | e^{-i v_{\text{rec}} T} P / \hbar | \psi \rangle$ en représentation impulsion

En introduisant la base $\{|p\rangle\}$ des états propres de P et la fonction d'onde $\langle p | \psi \rangle = \tilde{\psi}(p)$ en représentation p , on obtient

$$\mathcal{R} = e^{-i \omega_R T} \int dp |\tilde{\psi}(p)|^2 e^{-i v_{\text{rec}} T p / \hbar} = e^{-i \omega_R T} \mathcal{F}(u = v_{\text{rec}} T) \quad (3.28)$$

où

$$\mathcal{F}(u) = \int dp \mathcal{P}(p) e^{-i u p / \hbar} \quad (3.29)$$

est la transformée de Fourier de la distribution d'impulsion $\mathcal{P}(p) = |\tilde{\psi}(p)|^2$.

- Conclusion : Comme la largeur de $\mathcal{P}(p)$ est $\delta p = M \delta v$, la largeur de $\mathcal{F}(u)$ n'est autre que la longueur de cohérence ξ donnée en (3.20). Les états extrêmes sortants seront orthogonaux et ne pourront donc plus interférer si leur séparation $v_{\text{rec}} T$ est très grande devant la longueur de cohérence ξ

$$\text{Brouillage des interférences} \iff \text{Séparation } v_{\text{rec}} T \text{ des centres des 2 paquets d'ondes} \gg \text{Longueur de cohérence } \xi \text{ du paquet incident} \quad (3.30)$$

L'analyse précédente donne ainsi une nouvelle interprétation de la condition de brouillage Doppler $k_L \delta v T \gg 1$ du cours II qui est équivalente à $\hbar k_L T / M \gg \hbar / M \delta v$, c-à-d à $v_{\text{rec}} T \gg \xi$

- Notons que le produit scalaire des 2 paquets d'ondes peut être nul même s'ils se recouvrent, c-à-d même si $\Delta z > v_{\text{rec}} T$ où Δz est la largeur spatiale. Ne pas confondre largeur spatiale Δz et longueur de cohérence ξ qui peut être très inférieure à Δz

C - Comment éliminer le brouillage des effets d'interférence.

Les centres des 2 paquets d'ondes sortants doivent être ramenés l'un vers l'autre, à une distance inférieure à ξ , pour que leur produit scalaire redevienne de l'ordre de 1

On reinterprète ainsi les figures 2 et 3 comme représentant les trajectoires des centres de 2 paquets d'ondes cohérents qui sont formés à partir du même paquet d'onde incident après traversée de la 1^{re} onde et qui sont ensuite recombinés. Une telle situation correspond effectivement à un interféromètre atomique.

Références

- (1) A. Abragam, The Principles of Nuclear Magnetism, Oxford 1961
- (2) T.W. Mossberg, R. Kachru, S.R. Hartmann, A.M. Flusberg
Phys. Rev. A20, 1976 (1979)
- (3) T.W. Mossberg, S.R. Hartmann, Phys. Rev. A23, 1271 (1981)
- (4) C. Salomon, Thèse Paris 1984.
- (5) C.J. Bordé, C. Salomon, S. Avrillier, A. Van Lerberghe, C. Bréant, D. Banni, S. Scolès, Phys. Rev. A30, 1836 (1984)
- (6) C. Bordé, Advances in Laser Spectroscopy, ed. by F.T. Arecchi, F. Schemm, H. Walther (Plenum, 1983) p. 1
- (7) C. Bordé, Revue du Cethedec, Ondes et Signal NS83-1 (1983)
- (8) C. Bordé, Physics Letters A140, 10 (1989)
- (9) C. Bordé, in Laser Spectroscopy X, ed. by M. Ducloy, E. Ginebrous, G. Grynberg, World Scientific 1992, p. 239.