

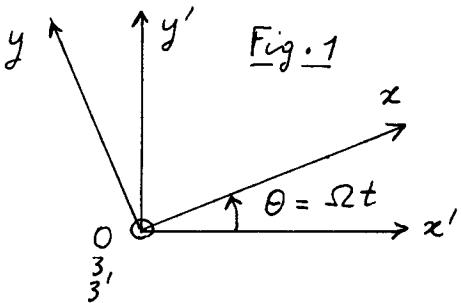
Propagation d'une particule dans un référentiel tournant

Buts de ce cours

- Appliquer les résultats du cours IV au cas d'une particule se propageant dans un référentiel tournant.
- Calculer le déphasage qui apparait entre les 2 bras d'un interféromètre lorsqu'on communique à cet interféromètre un mouvement de rotation par rapport à un référentiel galiléen.
- Décrire une expérience d'interférométrie effectuée sur des neutrons et mettant en évidence la rotation de la terre.
- Comparer la sensibilité à la rotation des interféromètres à ondes de matière et des interféromètres optiques (effet Sagnac).

① Lagrangien, Hamiltoniens et Actions. (Ref. 1)

a) - Référentiel galiléen et référentiel tournant.



- $Ox'y'z'$: Référentiel galiléen R'
 - $Oxyz$: Référentiel R tournant par rapport au précédent autour de $Oz = Oz'$ à la vitesse angulaire constante Ω
- $$\theta = \Omega t \tag{7.1}$$

- Lois de transformation des coordonnées

$$\begin{cases} x' = x \cos \Omega t - y \sin \Omega t \\ y' = x \sin \Omega t + y \cos \Omega t \end{cases} \tag{7.2}$$

$$\begin{cases} x = x' \cos \Omega t + y' \sin \Omega t \\ y = -x' \sin \Omega t + y' \cos \Omega t \end{cases} \tag{7.3}$$

- Loi de transformation des vitesses. Posons $\vec{\Omega} = \Omega \vec{e}_z$. Il vient:

$$\vec{v}' = \vec{v} + \vec{\Omega} \times \vec{r} \tag{7.4}$$

Vitesse dans R' = Vitesse dans R + Vitesse d'entraînement R/R'

b) - Lagrangien - Equations de Lagrange

- Dans R' , la particule est libre. Son lagrangien L' vaut donc:

$$L' = \frac{1}{2} M \vec{v}'^2 \tag{7.5}$$

- En reportant (7.4) dans (7.5), on obtient pour le Lagrangien L dans R :

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} M (\vec{v} + \vec{\Omega} \times \vec{r})^2 \\ &= \frac{1}{2} M \vec{v}^2 + M \vec{\Omega} \cdot (\vec{r} \times \vec{v}) + \frac{1}{2} M (\vec{\Omega} \times \vec{r})^2 \end{aligned} \tag{7.6}$$

L est bien une fonction quadratique de \vec{r} et \vec{v} .

- Equations de Lagrange : $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}}$

$$M \frac{d\vec{v}}{dt} = \underbrace{2M(\vec{v} \times \vec{\Omega})}_{\text{Force de Coriolis}} + \underbrace{M \vec{\Omega} \times (\vec{r} \times \vec{\Omega})}_{\text{Force centrifuge}} \tag{7.7}$$

Force de Coriolis Force centrifuge

c) - Impulsion

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = M \vec{v} + M \vec{\Omega} \times \vec{r} \quad (7.8)$$

- Dans R' , l'impulsion \vec{p}' vaut :

$$\vec{p}' = \frac{\partial L'}{\partial \vec{v}'} = M \vec{v}' \quad (7.9)$$

Elle coïncide avec la quantité de mouvement de la particule, contrairement à ce qui se passe dans R , où $\vec{p} \neq M \vec{v}$

- En utilisant (7.4), on voit que

$$\vec{p}' = \vec{p} \quad (7.10)$$

Un même mouvement est donc décrit par la même impulsion, \vec{p} ou \vec{p}' .

- L'équation (7.8) entraîne que

$$\frac{\vec{p}^2}{2M} = \frac{1}{2} M \vec{v}^2 + \frac{M}{2} (\vec{\Omega} \times \vec{r})^2 + M \vec{v} \cdot (\vec{\Omega} \times \vec{r}) \quad (7.11)$$

La comparaison de (7.6) et (7.11) montre que

$$L = \frac{\vec{p}^2}{2M} \quad (7.12)$$

d) Hamiltonien

De (7.8), on déduit que

$$\vec{v} = \frac{\vec{p}}{M} - \vec{\Omega} \times \vec{r} \quad (7.13)$$

de sorte que, compte tenu de (7.12), on obtient

$$H = \vec{p} \cdot \vec{v} - L = \frac{\vec{p}^2}{2M} - \vec{\Omega} \cdot (\vec{r} \times \vec{p}) \quad (7.14)$$

qu'on peut encore écrire

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2M} - \vec{\Omega} \cdot \vec{L} = \frac{\vec{p}^2}{2M} - \Omega L_3 \quad (7.15)$$

où

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \quad (7.16)$$

est le moment cinétique de la particule.

e) Solution des équations du mouvement

- Solution plus simple à partir des équations de Hamilton-Jacobi

$$\dot{\vec{r}} = \frac{\partial H}{\partial \vec{p}} = \frac{\vec{p}}{M} - \vec{\Omega} \times \vec{r} \quad (7.17.a) \quad \dot{\vec{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \vec{r}} = -\vec{\Omega} \times \vec{p} \quad (7.17.b)$$

- Calcul de $\vec{p}(t)$ L'équation (7.17.b) donne

$$\dot{p}_x = \Omega p_y \quad \dot{p}_y = -\Omega p_x \quad (7.18)$$

qu'on peut encore écrire

$$\dot{p}_+(t) = -i\Omega p_+(t) \quad (7.19)$$

si l'on pose

$$p_+ = p_x + i p_y \quad (7.20)$$

On en déduit

$$p_x(t) + i p_y(t) = [p_x(0) + i p_y(0)] [\cos \Omega t - i \sin \Omega t] \quad (7.21)$$

c'est à dire encore

$$\begin{cases} p_x(t) = p_x(0) \cos \Omega t + p_y(0) \sin \Omega t \\ p_y(t) = -p_x(0) \sin \Omega t + p_y(0) \cos \Omega t \end{cases} \quad (7.22)$$

- On trouve ainsi que $\vec{p}(t)$ s'obtient à partir de $\vec{p}(0)$ par une rotation d'angle $-\Omega t$ autour de Oz . L'interprétation d'un tel résultat est la suivante. Dans R' , la particule est libre, et donc $\vec{p}'(t)$ reste constant. Or, d'après (7.10), $\vec{p}(t) = \vec{p}'(t)$. $\vec{p}(t)$ reste donc égal à un vecteur qui est fixe dans R' . Dans R , $\vec{p}(t)$ tourne donc à la vitesse angulaire $-\Omega$.

- Le raisonnement précédent et l'équation (7.12) montrent également que

$$\vec{p}^2(t) = \vec{p}^2(0) \tag{7.23}$$

$$L(t) = L(0) \tag{7.24}$$

- Calcul de $\vec{r}(t)$. L'équation (7.17.a) donne

$$\dot{x} = \frac{p_x}{m} + \Omega y \quad \dot{y} = \frac{p_y}{m} - \Omega x \tag{7.25}$$

c'est à dire encore, si l'on pose

$$r_+ = x + iy \tag{7.26}$$

$$\dot{r}_+(t) + i\Omega r_+(t) = \frac{p_+(t)}{m} = \frac{p_+(0)}{m} e^{-i\Omega t} \tag{7.27}$$

La solution de l'équation (7.27) s'écrit

$$r_+(t) = r_+(0) e^{-i\Omega t} + \frac{p_+(0)}{m} t e^{-i\Omega t} \tag{7.28}$$

ce qui donne pour $x(t)$ et $y(t)$

$$\begin{cases} x(t) = [x(0) + \frac{p_x(0)}{m} t] \cos \Omega t + [y(0) + \frac{p_y(0)}{m} t] \sin \Omega t \\ y(t) = -[x(0) + \frac{p_x(0)}{m} t] \sin \Omega t + [y(0) + \frac{p_y(0)}{m} t] \cos \Omega t \end{cases} \tag{7.29}$$

Interprétation : Dans R' , la particule, libre, part de $\vec{r}(0)$ avec la vitesse $\vec{p}(0)/m$ et arrive à l'instant t au point $\vec{r}'(t) = \vec{r}(0) + \frac{\vec{p}(0)}{m} t$. $\vec{r}(t)$ s'obtient à partir de $\vec{r}'(t)$ par une rotation d'angle $-\Omega t$ autour de Oz

f) - Action

- A partir de maintenant, nous allons nous limiter à des vitesses de rotation Ω et à des intervalles de temps t suffisamment faibles pour que

$$\Omega t \ll 1 \tag{7.30}$$

- Si la particule est en x_a, y_a à $t_a = 0$, avec une impulsion p_{xa}, p_{ya} , elle se trouve en x_b, y_b à $t_b = T$. L'inversion des équations (7.29) donne alors, à l'ordre 1 en ΩT :

$$x_a + \frac{p_{xa}}{m} T = x_b - y_b \Omega T \quad y_a + \frac{p_{ya}}{m} T = x_b \Omega T + y_b \tag{7.31}$$

d'où l'on déduit :

$$p_{xa} T / m = x_b - x_a - y_b \Omega T \quad p_{ya} T / m = y_b - y_a + x_b \Omega T \tag{7.32}$$

- A partir des équations (7.32) on obtient, compte tenu de (7.12) et (7.23)

$$\frac{\vec{p}^2(t)}{2m} = \frac{\vec{p}^2(0)}{2m} = \frac{p_{xa}^2 + p_{ya}^2}{2m} = \frac{m}{2T^2} [(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2 + 2\Omega T (x_a y_b - x_b y_a)] \tag{7.33}$$

$$\begin{aligned} S_{cl}(x_b y_b T, x_a y_a 0) &= \int_0^T dt L(t) = \int_0^T dt \frac{\vec{p}^2(0)}{2m} = \frac{T}{2m} \vec{p}^2(0) \\ &= \frac{m}{2T} [(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2] + m\Omega (x_a y_b - y_a x_b) \end{aligned} \tag{7.34}$$

S_d est bien une fonction quadratique de x_a, y_a, x_b, y_b
 - On déduit également de (7.34) que

$$C = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 S_d}{\partial x_a^2} = \frac{M}{2T} \tag{7.35}$$

② Propagateur - Déphasage dû à la rotation

a) - Expression du propagateur

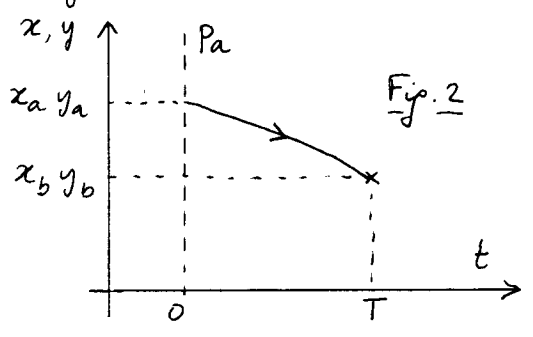
Comme L est quadratique en \vec{r} et \vec{v} , on a, d'après les résultats du cours IV

$$K(x_b, y_b, T, x_a, y_a, 0) = F(T) \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} S_d(x_b, y_b, T, x_a, y_a, 0) \right\} \tag{7.36}$$

où $S_d(x_b, y_b, T, x_a, y_a, 0)$ est donné en (7.34).

b) - Propagation de la fonction d'onde

À $t=0$, on a une onde plane d'impulsion P_a . Quelle est la fonction d'onde en x_b, y_b à l'instant T ?



Considérons la trajectoire classique arrivant en x_b, y_b à l'instant T et ayant l'impulsion P_a à $t=0$. Soient x_a et y_a les coordonnées du point par lequel passe cette trajectoire à $t=0$. D'après les résultats du cours IV

$$\Psi(x_b, y_b, T) = G(T) \Psi(x_a, y_a, 0) \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} S_d(x_b, y_b, T, x_a, y_a, 0) \right\} \tag{7.37}$$

où
$$G(T) = F(T) \sqrt{\frac{i\pi\hbar}{C(T)}} = F(T) \sqrt{\frac{2i\pi\hbar T}{M}} \tag{7.38}$$

c) - Calcul traditionnel

- L'hamiltonien quantique associé à (7.15) s'écrit :

$$H = \frac{P^2}{2M} - \Omega L_3 \tag{7.39}$$

L'opérateur $P^2/2M$, invariant par rotation, commute avec L_3 , de sorte que l'opérateur d'évolution $U(T)$ peut s'écrire :

$$U(T) = e^{-iHT/\hbar} = e^{+i\Omega L_3 T/\hbar} e^{-iP^2 T/2M\hbar} \tag{7.40}$$

- Le calcul du propagateur ne pose alors aucun problème. En particulier, on obtient pour la fonction d'onde en x_b, y_b à l'instant T , sachant qu'on est parti d'une onde plane P_a à $t=0$

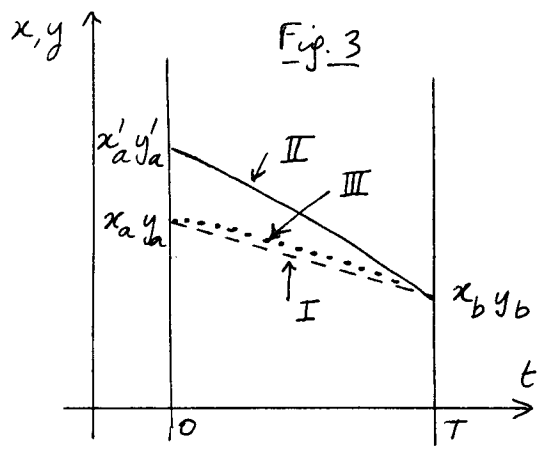
$$\begin{aligned} \Psi(x_b, y_b, T) &= \langle x_b, y_b | e^{-i\Omega L_3 T/\hbar} e^{-iP^2 T/2M\hbar} | P_a \rangle \\ &= \langle \tilde{x}_b, \tilde{y}_b | P_a \rangle e^{-iP_a^2 T/2M\hbar} \end{aligned} \tag{7.41}$$

où $|\tilde{x}_b, \tilde{y}_b\rangle$ se déduit de $|x_b, y_b\rangle$ par rotation. On trouve alors le même résultat qu'en (7.37) et on obtient la valeur de $G(T)$ qui vaut :

$$G(T) = 1 \tag{7.42}$$

d) - Déphasage dû à la rotation

- On suppose toujours qu'on a une onde plane P_a à $t=0$
- Comme dans le cours V, on considère 3 chemins (Fig. 3)



- Chemin I (en traits tiretés)
Réel pour $\Omega = 0$
Passe par x_b, y_b à T et a l'impulsion p_a en $t=0$. Passe par x_a, y_a à $t=0$
- Chemin II (en traits pleins)
Réel pour $\Omega \neq 0$
Passe par x_b, y_b à T et a l'impulsion p_a en $t=0$. Passe par x'_a, y'_a à $t=0$
- Chemin III (en pointillés)
Réel pour $\Omega \neq 0$
Passe par x_b, y_b à T et x_a, y_a à $t=0$

- D'après (7.28)
$$|\vec{r}_a - \vec{r}'_a| \sim \frac{p_a}{M} T \Omega T = \frac{p_a}{M} \Omega T^2 \quad (7.43)$$

- D'après les résultats du cours IV (voir Eq. (4.57)), si
$$|\vec{r}_a - \vec{r}'_a| \ll \sqrt{\frac{\hbar}{c(T)}} \sim \sqrt{\frac{\hbar T}{M}} \quad (7.44)$$

c'est à dire, compte tenu de (7.43), si
$$\frac{p_a}{M} \Omega T^2 \ll \sqrt{\frac{\hbar T}{M}} \quad (7.45)$$

on peut écrire
$$\begin{aligned} \Psi(x_b, y_b, T) &= \Psi(x'_a, y'_a, 0) \exp\left(\frac{i}{\hbar} S_{II}\right) \\ &\simeq \Psi(x_a, y_a, 0) \exp\left(\frac{i}{\hbar} S_{III}\right) \end{aligned} \quad (7.46)$$

où S_{II} et S_{III} sont les actions classiques (avec $\Omega \neq 0$) calculées le long des chemins II et III.

- Par ailleurs, comme les chemins I et III diffèrent par des termes d'ordre 1 en Ω , le principe de moindre action entraîne que, à l'ordre 1 inclus en Ω
$$S_I \simeq S_{III} \quad (7.47)$$

où S_I est l'action classique (avec $\Omega \neq 0$) calculée le long du chemin I

- Si Ω était nul, la fonction d'onde en x_b, y_b à l'instant T , $\Psi^{(0)}(x_b, y_b, T)$ vaudrait
$$\Psi^{(0)}(x_b, y_b, T) = \Psi(x_a, y_a, 0) \exp\left(\frac{i}{\hbar} S_I^{(0)}\right) \quad (7.48)$$

où $S_I^{(0)}$ est l'action classique (avec $\Omega = 0$) calculée le long du chemin I.

- Par définition de l'action, et à l'ordre 1 en Ω , on a, compte tenu de (7.6)

$$S_I = \int_0^T dt \left[\frac{1}{2} M \vec{v}(t)^2 + M \vec{\Omega} \cdot (\vec{r}(t) \times \vec{v}(t)) \right] \quad (7.49)$$

$$S_I^{(0)} = \int_0^T dt \left[\frac{1}{2} M \vec{v}^2(t) \right] \quad (7.50)$$

- La comparaison de (7.48) avec la 2^{ème} ligne de (7.46) et l'utilisation de (7.49) et (7.50) donnent alors

$$\begin{aligned} \Psi(x_b, y_b, T) &\simeq \Psi^{(0)}(x_b, y_b, T) \exp\left(\frac{i}{\hbar} (S_I - S_I^{(0)})\right) \\ &\simeq \Psi^{(0)}(x_b, y_b, T) \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} M \vec{\Omega} \cdot \int_0^T dt \vec{r}(t) \times \vec{v}(t) \right\} \end{aligned} \quad (7.51)$$

L'équation (7.51) montre que l'effet de la rotation en de fait apparaître un déphasage sur la fonction d'onde de la particule en $x_b y_b T$.

- Notons bien que, dans (7.49), (7.50) et (7.51), $\vec{r}(t)$ et $\vec{v}(t)$ correspondent au chemin Γ , rectiligne entre $x_a y_a$ et $x_b y_b$ et parcouru avec une vitesse uniforme. Comme $\vec{v}(t) = d\vec{r}(t)/dt$ l'intégrale de (7.51) s'écrit $\int_0^T \vec{r}(t) \times d\vec{r}(t)$. On reconnaît

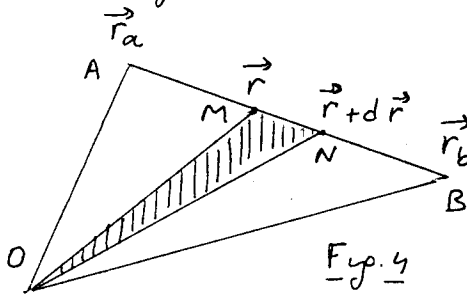


Fig. 4

en $\vec{r}(t) \times d\vec{r}(t)$ 2 fois l'aire du triangle OMN où M est le point \vec{r} et N le point $\vec{r} + d\vec{r}$ (Fig. 4). L'intégrale de (7.51) est donc égale à 2 fois l'aire du triangle OAB, A et B étant les points associés à \vec{r}_a et \vec{r}_b .

e) Déphasage dans un interféromètre (Fig. 5)

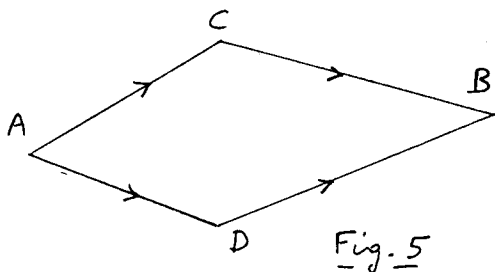


Fig. 5

- En l'absence de rotation ($\Omega = 0$), les 2 bras de l'interféromètre ACB et ADB sont constitués de segments de lignes droites, et sont supposés situés dans un même plan. Soit ϕ_0 le déphasage entre ces 2 bras.

- En présence de rotation, définie par le vecteur $\vec{\Omega}$, le déphasage

devient $\phi = \phi_0 + \delta\phi$. D'après les résultats du paragraphe précédent,

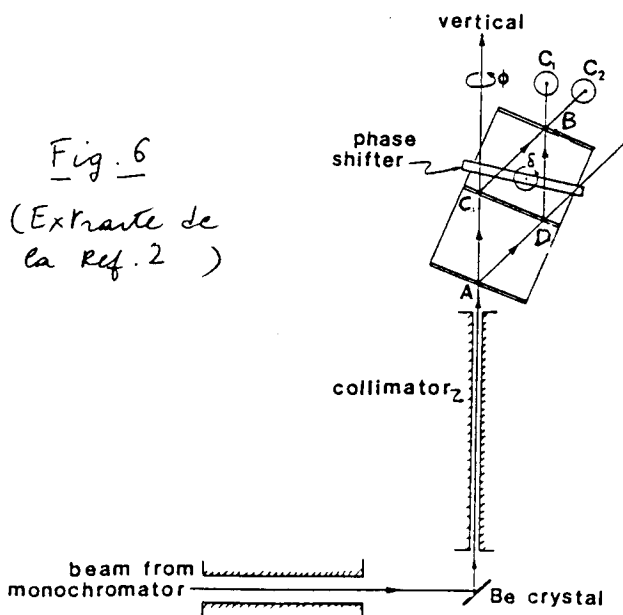
$$\delta\phi = \frac{2M}{\hbar} \vec{\Omega} \cdot \vec{S} \quad (7.52)$$

où \vec{S} est l'aire orientée du polygone ACBDA.

③ Expérience de Werner, Standenmann et Colella (Ref. 2)

a) Principe de l'expérience (Fig. 6)

Fig. 6
(Extrait de la Ref. 2)



- Interféromètre à neutrons analogue à celui décrit dans le cours V.

- On tourne maintenant d'un angle ϕ l'interféromètre autour d'un axe qui est vertical, au lieu d'être horizontal.

Le déphasage dû au champ de pesanteur ne change pas au cours d'une telle rotation.

Les variations avec ϕ du déphasage entre ACB et ADB ne sont pas sensibles à g

- Par contre, l'angle entre la normale au quadrilatère ABCD et le vecteur $\vec{\Omega}$ associé à la rotation de la terre change quand l'angle ϕ varie.

Le module de $\vec{\Omega}, \vec{S}$ est maximal quand le plan ABCD est perpendiculaire au plan du méridien passant par le lieu de l'expérience. Il vaut alors $|\sin \theta_L|$, où θ_L est la "colatitude" du lieu de l'expérience (latitude mesurée par rapport au pôle Nord). Le module de $\vec{\Omega} \cdot \vec{S}$ est nul quand le plan ABCD coïncide avec le plan du méridien.

Les signaux mesurés par les détecteurs C_1 et C_2 doivent donc osciller, en opposition de phase, quand φ varie.

b) Ordres de grandeur

$S = 8,8 \text{ cm}^2$ $\theta_L = 51^\circ$ $M = 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ Kg}$ $\hbar \approx 10^{-34} \text{ Joule} \cdot \text{sec}$
 $\Omega = 2\pi/24 \text{ h} = 7.3 \cdot 10^{-5} \text{ rad./sec}$

On obtient pour $|\delta\Phi_{\max}| = 2 M \Omega S \sin \theta_L / \hbar \approx 91^\circ \approx \pi/2 \text{ rad}$
 ce qui correspond environs à 1/4 d'interfrange

- L'effet dû à la rotation est donc près de 40 fois plus petit que celui dû au champ de pesanteur (qui correspondait environs à 10⁻interfranges - voir Cours V)

- En prenant les mêmes valeurs que dans le cours V pour $P_a/M \approx 3 \cdot 10^3 \text{ m/s}$, $T \approx 10^{-5} \text{ sec}$, on trouve

$P_a \Omega T^2 / M \approx 2 \cdot 10^{-11} \text{ m}$ $\sqrt{\hbar T / M} \approx 0.7 \cdot 10^{-6} \text{ m}$

ce qui montre que la condition (7.45) est très largement vérifiée.

c) - Résultats

Pour avoir plus de précision, pour une valeur donnée de φ , on tourne d'un angle δ la lame cristalline de la figure 6, ce qui revient à faire varier le déphasage entre les 2 bras et donne les oscillations de la figure 7 sur les temps de comptage. On recommence la même expérience pour 2 valeurs différentes de φ . Le déphasage entre les 2 oscillations est dû à la rotation de la terre.

La figure 8 montre comment ce déphasage $\delta\Phi$ varie avec φ et donne des résultats en très bon accord avec les prévisions théoriques déduites de (7.52)

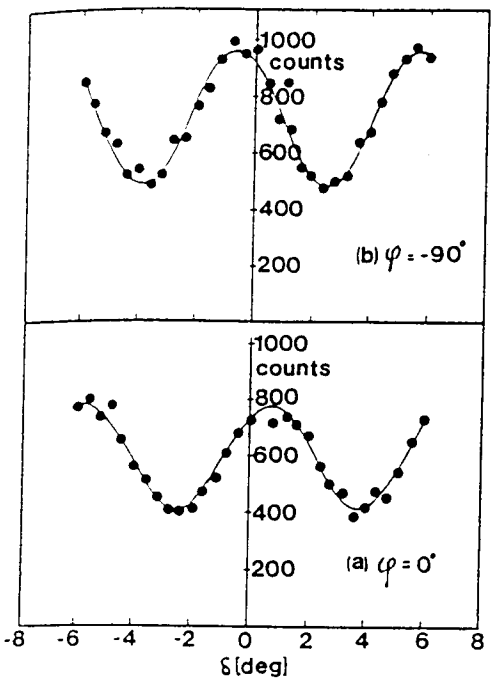


Fig. 7
(Extrait de 2)

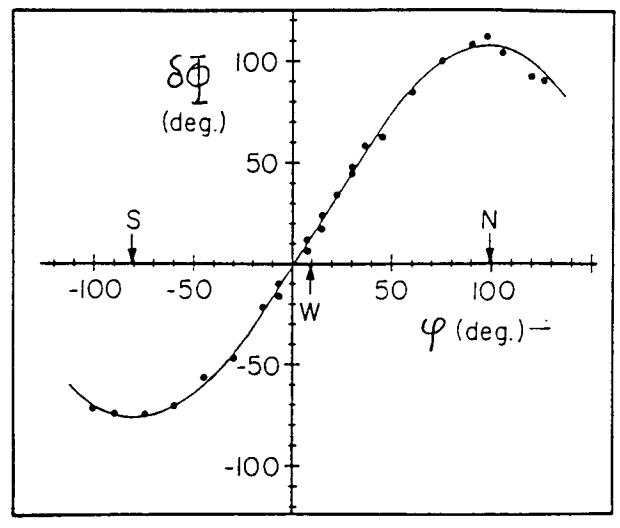


Fig. 8
(Extrait de 2)

④ Interféromètres optiques sensibles à la rotation.

a) - Effet Sagnac (Références 3 à 7)

Calcul élémentaire du déplacement des franges

- Dès 1913, Sagnac a montré qu'un interféromètre optique est sensible à la rotation, par rapport à un système galiléen, du référentiel dans lequel l'interféromètre est au repos (Ref. 3).

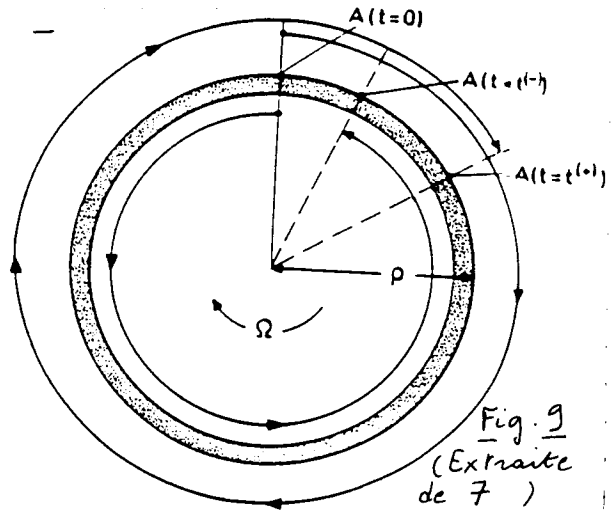


Fig. 9
(Extrait de 7)

Situation idéale d'un interféromètre circulaire (Fig. 9), de rayon ρ .

Analyse de l'expérience faite par un observateur G dans un référentiel galiléen par rapport auquel l'interféromètre tourne à la vitesse angulaire Ω .

- La lumière entre au point A et est séparée en 2 faisceaux cohérents tournant dans le sens direct et le sens inverse.

- Cas $\Omega = 0$. Les 2 faisceaux issus de A se recombinent au même point A après avoir fait chacun un tour qui dure un temps

$$t = \frac{2\pi\rho}{c} \tag{7.53}$$

- Cas $\Omega \neq 0$. Pour l'observateur G , la lumière va toujours à la vitesse c dans les 2 sens. Pour lui, le faisceau se propageant dans le même sens que le mouvement de rotation doit parcourir une distance plus grande pour retrouver le point A . Il doit donc mettre un temps plus long, t^+ , pour rattraper ce point. Ce temps t^+ est donné par l'équation

$$ct^+ = 2\pi\rho + \rho\Omega t^+ \tag{7.54}$$

Au contraire, l'autre faisceau met un temps plus court, t^- , pour rattraper le point A qui tourne en sens opposé et va à sa rencontre

$$ct^- = 2\pi\rho - \rho\Omega t^- \tag{7.55}$$

On en déduit

$$\Delta t = t^+ - t^- = \frac{2\pi\rho}{c} \left[\frac{1}{1 - \frac{\rho\Omega}{c}} - \frac{1}{1 + \frac{\rho\Omega}{c}} \right] \approx \frac{2\pi\rho}{c} \left[\frac{2\rho\Omega}{c} \right] = \frac{4\Omega S}{c^2} \tag{7.56}$$

où $S = \pi\rho^2$ (7.57)

est la surface de l'interféromètre.

- Pour calculer le déphasage $\delta\phi$ associé à Δt , il est plus simple de passer dans le référentiel tournant \mathcal{C} où tous les composants optiques de l'interféromètre sont fixes et où, par suite il n'y a aucun effet Doppler.

Comme le calcul conduisant à (7.56) est d'ordre 1 en $\Omega\rho/c$, l'expression (7.56) de Δt , établie dans \mathcal{G} , demeure valable dans \mathcal{C} [On ignore ici les corrections relativistes en $(\Omega\rho/c)^2$]. Si ω_0 est la fréquence de l'onde lumineuse dans \mathcal{C} , on en déduit que le déphasage $\delta\phi$ entre les 2 faisceaux qui se rencontrent en A est

$$\delta\phi = \omega_0 \Delta t = \frac{4S\Omega\omega_0}{c^2} \tag{7.58}$$

Le déplacement δN des franges d'interférence est donc

$$\delta N = \frac{\delta\phi}{2\pi} = \frac{4S\Omega}{\lambda_0 c} \tag{7.59}$$

où $\lambda_0 = 2\pi c/\omega_0$ est la longueur d'onde de la lumière

Calcul direct du déphasage dans le référentiel tournant [Ref. 4]

- Comme on se limite au 1^{er} ordre en $\Omega\rho/c$, on peut utiliser la transformation suivante simple pour passer de $\mathcal{G}(x', y', z', t')$ à $\mathcal{C}(x, y, z, t)$

$$x' = x \cos \Omega t - y \sin \Omega t \quad y' = x \sin \Omega t + y \cos \Omega t \quad z' = z \quad t' = t \tag{7.60}$$

- L'invariant fondamental

$$ds^2 = c^2 dt'^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2 \tag{7.61}$$

s'écrit donc dans \mathcal{C} (à l'ordre 1 en Ω)

$$ds^2 = c^2 dt^2 - 2\Omega(x dy - y dx) dt - dl^2 \tag{7.62}$$

$$\text{où} \quad dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \tag{7.63}$$

- La propagation de la lumière est caractérisé par $ds^2 = 0$, c'est à dire par

$$c^2 dt^2 - 4\Omega dS dt - dl^2 \tag{7.64}$$

$$\text{où} \quad dS = \frac{1}{2}(x dy - y dx) \tag{7.65}$$

est la surface du triangle OMN, où $M = \{x, y, z\}$, $N = \{x+dx, y+dy, z\}$

- A l'ordre 1 en Ω , la solution de (7.64) est

$$dt = \frac{dl}{c} + \frac{2\Omega}{c^2} dS \tag{7.66}$$

Par intégration le long d'un contour fermé, on obtient

$$t_1 = \frac{l}{c} + \frac{2\Omega}{c^2} S \tag{7.67}$$

où S est l'aire du contour projeté sur un plan normal à $\vec{\Omega}$ et l le périmètre du contour. Pour le faisceau se propageant dans l'autre sens, on obtient

$$t_2 = \frac{l}{c} - \frac{2\Omega}{c^2} S \tag{7.68}$$

En soustrayant (7.68) de (7.67), on retrouve bien (7.56)

- L'avantage de la méthode précédente est tout d'abord de donner un résultat valable quel que soit la forme du contour. De plus,

on voit que la différence entre t_1 et t_2 dans \mathcal{C} est due au fait VII-10
que la rotation change le tenseur métrique $g_{\mu\nu}$: l'équation (7.62)
montre que g_{01} et g_{02} sont changés à l'ordre 1 en Ω .

Ordres de grandeur

- Dans l'expérience initiale de Sagnac, $S \approx 866 \text{ cm}^2$, $\Omega = 2 \text{ rad/sec}$
 $\lambda_0 = 486 \text{ nm}$, de sorte que $\delta N \approx 0,07$ interférences.
- Quelques années plus tard, Michelson et Gale ont détecté par
effet Sagnac la rotation de la Terre ($\Omega = 7.3 \cdot 10^{-5} \text{ rad/sec}$), au
moyen d'un interféromètre rectangulaire ayant des côtés égaux
à 640 m et 320 m ! (Voir réf. 6).
- Depuis l'apparition des lasers, on peut réaliser des lasers en
anneau oscillant avec des fréquences différentes suivant les 2
sens de rotation, à cause de l'effet Sagnac. La mesure de la fréquence
de battement des 2 lasers, proportionnelle à Ω , est à la base
du fonctionnement des gyromètres laser. (voir réf. 7)

b) - Comparaison avec les neutrons

- La comparaison de (7.52) et (7.58) montre que

$$\frac{(\delta\Phi)_{\text{neutrons}}}{(\delta\Phi)_{\text{photons}}} \sim \frac{Mc^2}{\hbar\omega_0} \gg 1 \quad (7.69)$$

- Le même résultat demeure valable pour des atomes neutres.
 M est encore plus grand ! On peut prévoir ainsi des gains
de sensibilité de l'ordre de 10^{10} (voir Ref. 8).

Il ne faut pas oublier cependant que la surface de
l'interféromètre peut être considérablement augmentée dans un
interféromètre optique par l'utilisation de fibres optiques. De
plus, les flux de photons sont considérablement plus élevés dans
un gyromètre laser, que dans un interféromètre à atomes neutres
(Bien meilleur rapport signal/bruit)

Références

- 1 - L. Landau et L. Lifschitz, Mécanique, 3^{ème} édition, Editions Mir, Moscou (1969)
- 2 - S.A. Werner, J.L. Standenmann, R. Colella
Phys. Rev. Lett. 42, 1103 (1979)
- 3 - G. Sagnac, Compt. Rend. Acad. Sci. 157, 708 et 1410 (1913)
- 4 - P. Langevin, Compt. Rend. Acad. Sci. 173, 831 (1921)
- 5 - E.J. Post, Rev. Mod. Phys. 39, 475 (1967)
- 6 - A.A. Michelson and H.G. Gale, Nature 115, 566 (1925)
et Astrophys. J. 61, 137 (1925)
- 7 - W.W. Chow, J. Gea-Banaraoche, L.M. Pedrotti, V.E. Sanders,
W. Schleich, M.O. Scully, Rev. Mod. Phys. 57, 61 (1985)
- 8 - J.F. Clauser, Physica B151, 262 (1988)