

Buts de ce cours

- Appliquer les résultats du cours IV au cas d'une particule se propageant dans un champ de pesanteur.
- Calculer le déphasage entre les ondes de de Broglie (associées à un neutron) se propageant dans les 2 bras d'un interféromètre situés à des hauteurs différentes et interpréter les résultats de la 1^{re} expérience d'interférence entre ondes de matière mettant en évidence des effets sensibles au champ de pesanteur (effets sensibles à la fois à $\hbar$ et à g).

① Calcul du propagateur - Approche de Feynman

a) Lagrangien - Impulsion - Hamiltonien

- Energie potentielle associée à un champ de pesanteur parallèle à Oz et dirigé vers les $z < 0$ (g : accélération de la pesanteur)

$$V(z) = Mgz \quad (5.1)$$

- Lagrangien: $L(z, \dot{z}) = \frac{1}{2} M \dot{z}^2 - Mgz$ (5.2)

- Equation de Lagrange: $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = \frac{\partial L}{\partial z}$ (5.3)

$$M\ddot{z} = -Mg$$

- Solution de l'équation de Lagrange correspondant à $z(t_a) = z_a$, $\dot{z}(t_a) = v(t_a) = v_a$:

$$\begin{cases} v(t) = v_a - g(t-t_a) \end{cases} \quad (5.4.a)$$

$$\begin{cases} z(t) = z_a + v_a(t-t_a) - \frac{1}{2}g(t-t_a)^2 \end{cases} \quad (5.4.b)$$

- Position ^{et vitesse} de la particule à $t = t_b$: $z(t_b) = z_b$, $v(t_b) = v_b$

$$\begin{cases} z_b = z_a + v_a(t_b-t_a) - \frac{1}{2}g(t_b-t_a)^2 \end{cases} \quad (5.5.a)$$

$$\begin{cases} v_b = v_a - g(t_b-t_a) \end{cases} \quad (5.5.b)$$

Expression de v_a en fonction de z_a, t_a, z_b, t_b :

$$v_a = \frac{z_b - z_a}{t_b - t_a} + \frac{1}{2}g(t_b - t_a) \quad (5.6)$$

- Impulsion: $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = M\dot{z} = Mv$ (5.7)

- Hamiltonien: $H = p\dot{z} - L = M\dot{z}^2 - L = \frac{1}{2}M\dot{z}^2 + Mgz = \frac{p^2}{2M} + Mgz$ (5.8)

- b) Action $S_{cl}(z_b t_b, z_a t_a)$ correspondant au chemin réel:

$$S_{cl}(z_b t_b, z_a t_a) = \int_{t_a}^{t_b} \left[\frac{1}{2} M v^2(t) - Mgz(t) \right] dt \quad (5.9)$$

où $v(t)$ et $z(t)$ sont donnés par les équations (5.4). En effectuant l'intégrale et en utilisant (5.5), et (5.6) pour réexprimer v_a en fonction de z_a, t_a, z_b, t_b , on trouve:

$$S_{cl}(z_b t_b, z_a t_a) = \frac{M}{2} \frac{(z_b - z_a)^2}{T} - \frac{Mg}{2} (z_b + z_a)T - \frac{Mg^2}{24} T^3 \quad (5.10)$$

où l'on a posé: $T = t_b - t_a$ (5.11)

- On constate que $S_d(3_b t_b, 3_a t_a)$ est une fonction quadratique de 3_a et 3_b , ce qui permettra d'appliquer les résultats du § 3c du cours IV.
- Nous aurons besoin pour la suite du coefficient $C(t_b, t_a)$ introduit en (4.50).

$$C(t_b, t_a) = C(T) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial 3_a^2} S_d(3_b t_b, 3_a t_a) = \frac{M}{2T} \quad (5.12)$$

c - Expression du propagateur.

- L'utilisation de (4.44) et (5.10) donne :

$$K(3_b t_b, 3_a t_a) = F(T) \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \left\{ \frac{M}{2} \frac{(3_b - 3_a)^2}{T} - \frac{Mg}{2} (3_b + 3_a) T - \frac{Mg^2}{24} T^3 \right\} \right\} \quad (5.13)$$

La notation $F(T)$ pour $F(t_b, t_a)$ s'explique par l'invariance par translation dans le temps.

- Toute la dépendance en 3_a et 3_b de K est contenue dans l'exponentielle de (5.13). La détermination de la fonction $F(T)$ sera effectuée plus loin par comparaison avec les résultats de l'approche traditionnelle.

② Approche quantique traditionnelle.

a) Idee générale.

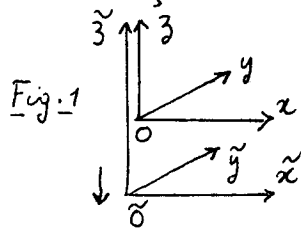
- Le but est de calculer l'opérateur d'évolution :

$$U(t) = e^{-iHt/\hbar} \quad (5.14)$$

où
$$H = \frac{P^2}{2M} + MgZ \quad (5.15)$$

est l'hamiltonien quantique correspondant à l'expression classique (5.8)

- Plaçons nous dans le référentiel $\tilde{O}\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$ tombant vers le bas avec l'accélération g par rapport à $Oxyz$ (voir Fig. 1), c'est à dire tel que



$$\tilde{z} = z + \frac{1}{2} g t^2 \quad (5.16)$$

Dans le référentiel $\tilde{O}\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$, la particule ne sera soumise à aucune force et pourra donc être considérée comme libre.

- Soit $T(t)$ la transformation unitaire associé au changement de référentiel de la figure 1, et qui sera calculée plus loin. On s'attend à ce que, dans la nouvelle représentation, l'évolution du nouveau vecteur d'état

$$|\tilde{\psi}(t)\rangle = T(t)|\psi(t)\rangle \quad (5.17)$$

soit gouvernée par l'hamiltonien $P^2/2M$ d'une particule libre, l'opérateur d'évolution correspondant étant $e^{-iP^2 t/2M\hbar}$. En appliquant la transformation inverse $T^\dagger(t)$, on doit être alors capable d'exprimer l'opérateur d'évolution (5.14) en fonction de $T(t)$ et $e^{-iP^2 t/2M\hbar}$.

- Notons que la possibilité d'éliminer un champ de gravitation par passage dans un référentiel accéléré avec une accélération g indépendante de la masse M , est une expression du principe d'équivalence.

b) Détermination de la transformation unitaire $T(t)$

- Cherchons d'abord comment se transforment, dans le changement de référentiel décrit par (5.16), les observables fondamentales Z et P .
- Soit $\tilde{\psi}(\tilde{z}, t)$ la nouvelle fonction d'onde décrivant, dans le nouveau référentiel, l'état de la particule, décrit par $\psi(z, t)$ dans l'ancien. On a :

$$\tilde{\psi}(\tilde{z}, t) = \psi(z, t) \quad (\text{et (5.17)}) \quad (5.18)$$

où $\tilde{z}$ et z sont reliés par (5.16). En utilisant (5.16), on obtient

$$\tilde{\psi}(z + \frac{1}{2}gt^2, t) = \langle z + \frac{1}{2}gt^2 | \tilde{\psi}(t) \rangle = \langle z + \frac{1}{2}gt^2 | T(t) | \psi(t) \rangle = \langle z | \psi(t) \rangle$$

d'où l'on déduit

$$T^+(t) |z + \frac{1}{2}gt^2\rangle = |z\rangle \quad (5.19)$$

c'est à dire encore

$$T^+(t) |z\rangle = |z - \frac{1}{2}gt^2\rangle \quad T(t) |z\rangle = |z + \frac{1}{2}gt^2\rangle \quad (5.20)$$

Faisons alors agir $T(t) Z T^+(t)$ sur $|z\rangle$. Il vient, compte tenu de (5.20)

$$\begin{aligned} T(t) Z T^+(t) |z\rangle &= T(t) Z |z - \frac{1}{2}gt^2\rangle = (z - \frac{1}{2}gt^2) T(t) |z - \frac{1}{2}gt^2\rangle \\ &= (z - \frac{1}{2}gt^2) |z\rangle = (Z - \frac{1}{2}gt^2) |z\rangle \end{aligned} \quad (5.21)$$

ce qui montre que

$$T(t) Z T^+(t) = Z - \frac{1}{2}gt^2 \quad (5.22)$$

- Passons maintenant à l'opérateur P . L'équivalent de (5.16) pour les vitesses est

$$\tilde{v} = v + gt \quad (5.23)$$

Si l'on admet momentanément, ce qui sera démontré plus loin, que $\tilde{p}$ est égal à $m\tilde{v} = m\tilde{v}$ dans le nouveau référentiel, on a

$$\tilde{p} = p + Mgt \quad (5.24)$$

Une démonstration analogue à la précédente donne alors pour les opérateurs P et $T(t) P T^+(t)$

$$T(t) P T^+(t) = P - Mgt \quad (5.25)$$

- Les équations (5.22) et (5.25) montrent que $T(t)$ effectue une translation, à la fois sur P et sur Z . En utilisant

$$e^{-i\lambda Z/\hbar} P e^{i\lambda Z/\hbar} = P + \lambda \quad e^{-i\mu P/\hbar} Z e^{i\mu P/\hbar} = Z - \mu \quad (5.26)$$

on voit qu'on peut choisir pour $T(t)$, l'expression suivante

$$T(t) = e^{i\alpha(t)} e^{-i\frac{gt^2}{2\hbar}} P e^{i\frac{Mgt}{\hbar}} Z \quad (5.27)$$

où $\alpha(t)$ est une fonction quelconque de t , qui sera choisie plus loin pour simplifier au maximum l'expression du nouvel hamiltonien. Les équations (5.22) et (5.23) sont alors satisfaites

c) Nouvel hamiltonien

- Comme $T(t)$ dépend explicitement du temps, l'équation de Schrödinger pour $|\tilde{\psi}(t)\rangle = T(t) |\psi(t)\rangle$ s'écrit :

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\tilde{\psi}(t)\rangle = H'(t) |\tilde{\psi}(t)\rangle \quad (5.28)$$

où

$$H'(t) = T(t) H T^+(t) + i\hbar \left(\frac{dT(t)}{dt} \right) T^+(t) \quad (5.29)$$

H étant l'hamiltonien (5.15) de l'ancienne représentation.

- En utilisant (5.22) et (5.25), on obtient alors

$$T(t) H T^\dagger(t) = \frac{1}{2M} (P - Mgt)^2 + Mg(Z - \frac{1}{2}Mgt^2) \quad (5.30)$$

Par ailleurs, d'après (5.27)

$$i\hbar \left(\frac{dT(t)}{dt} \right) T^\dagger(t) = -\hbar \dot{\alpha}(t) + gtP - Mg \underbrace{T(t) Z T^\dagger(t)}_{Z - \frac{1}{2}gt^2} \quad (5.31)$$

de sorte que, d'après (5.29)

$$H'(t) = \frac{P^2}{2M} + \frac{1}{2}Mg^2t^2 - \hbar \dot{\alpha}(t) \quad (5.32)$$

Il suffit alors de choisir

$$\alpha(t) = \frac{Mg^2t^3}{6\hbar} \quad (5.33)$$

et par suite

$$T(t) = e^{i \frac{Mg^2t^3}{6\hbar}} e^{-i \frac{gt^2}{2\hbar}} P e^{i \frac{Mgt}{\hbar}} Z \quad (5.34)$$

pour avoir

$$H' = \frac{P^2}{2M} \quad (5.35)$$

Vérifions en passant que dans la nouvelle représentation, et dans le point de vue de Heisenberg

$$\frac{dZ(t)}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [Z(t), H'] = \frac{P(t)}{M} \quad (5.36)$$

ce qui montre bien que l'impulsion p coïncide avec la quantité de mouvement mv .

Nous avons bien montré ainsi que le passage dans un référentiel accéléré supprimait le champ de pesanteur dans les équations quantiques du mouvement.

d) Expression de l'opérateur d'évolution de l'ancienne représentation

- Dans la nouvelle représentation, on a, compte tenu de (5.28) et (5.35)

$$|\tilde{\psi}(t)\rangle = e^{-i \frac{P^2}{2M} \frac{t}{\hbar}} |\tilde{\psi}(0)\rangle = e^{-i \frac{P^2}{2M} \frac{t}{\hbar}} |\psi(0)\rangle \quad (5.37)$$

puisque les 2 représentations coïncident à $t=0$. Par ailleurs,

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= U(t) |\psi(0)\rangle \\ &= T^\dagger(t) |\tilde{\psi}(t)\rangle = T^\dagger(t) e^{-i \frac{P^2}{2M} \frac{t}{\hbar}} |\psi(0)\rangle \end{aligned} \quad (5.38)$$

La comparaison de la 1^{ère} et 2^{ème} lignes de (5.38) donne alors

$$U(t) = T^\dagger(t) e^{-i \frac{P^2}{2M} \frac{t}{\hbar}} = e^{-i \frac{Mg^2t^3}{6\hbar}} e^{-i \frac{Mgt}{\hbar}} Z e^{i \frac{gt^2}{2\hbar}} P e^{-i \frac{P^2}{2M} \frac{t}{\hbar}} \quad (5.39)$$

- L'opérateur d'évolution de l'ancienne représentation peut être ainsi réexprimé en fonction d'exponentielles dont l'argument ne contient que Z , P ou P^2 à la fois, et non pas à la fois Z et P^2 , ce qui est le cas quand on reporte (5.15) dans (5.14).

e) Propagation de la fonction d'onde

- Supposons qu'à $t=t_a$, l'état de la particule soit un état propre $|p_a\rangle$ de P . Quelle est la valeur de la fonction d'onde en z_b à un instant ultérieur $t_b = t_a + T$?

$$\begin{aligned} \psi(z_b, t_b) &= \langle z_b | U(T) | p_a \rangle = e^{-i \frac{Mg^2T^3}{6\hbar}} \langle z_b | e^{-i \frac{MgT}{\hbar}} Z e^{i \frac{gT^2}{2\hbar}} P e^{-i \frac{P^2}{2M} \frac{T}{\hbar}} | p_a \rangle \\ &= \frac{e^{i p_a z_b / \hbar}}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-i \frac{Mg^2T^3}{6\hbar}} e^{-i \frac{MgT}{\hbar}} z_b e^{i \frac{gT^2}{2\hbar}} p_a e^{-i \frac{p_a^2}{2M} \frac{T}{\hbar}} \end{aligned} \quad (5.40)$$

- En utilisant (5.6) pour réexprimer $P_a = M v_a$ en fonction de $z_a, z_b, T = t_b - t_a$ et en utilisant (5.5.a) pour transformer la 1^{re} exponentielle de (5.40), on peut réécrire (5.40) sous la forme :

$$\psi(z_b, t_b) = \underbrace{\frac{e^{i P_a z_a / \hbar}}{\sqrt{2\pi \hbar}}}_{\psi(z_a, t_a)} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} S_{cl}(z_b t_b, z_a t_a) \right\} \quad (5.41)$$

où $S_{cl}(z_b t_b, z_a t_a)$ est l'action classique écrite en (5.10)

A partir de l'approche traditionnelle, il est ainsi possible d'obtenir le résultat simple exprimé par l'équation (4.55) du cours IV.

- Reportons dans l'équation (4.55) du cours IV l'expression (5.12) de $C(T)$. Cette formule peut être réécrite (après remplacement de z_0 et P_0 par z_a et P_a) :

$$\psi(z_b, t_b) = F(T) \sqrt{\frac{2\pi i \hbar T}{M}} \frac{e^{i P_a z_a / \hbar}}{\sqrt{2\pi \hbar}} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} S_{cl}(z_b t_b, z_a t_a) \right\} \quad (5.42)$$

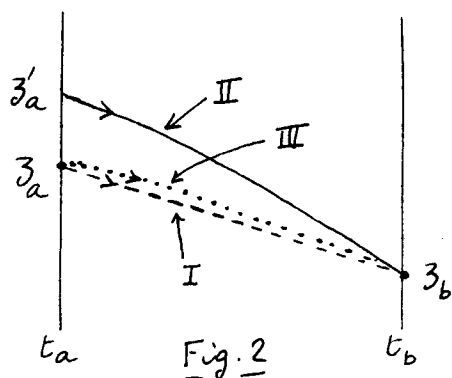
La comparaison de (5.41) et (5.42) donne alors l'expression de la fonction $F(T)$, que nous n'avons pas essayé de calculer par des intégrales de chemins :

$$F(T) = \sqrt{\frac{M}{2\pi i \hbar T}} \quad (5.43)$$

③ Cas où le champ de pesanteur est une petite perturbation

a) Buts de ce paragraphe

- Comme plus haut, on suppose que l'état initial de la particule à t_a est une onde plane P_0 et on considère plusieurs chemins réels arrivant en z_b à t_b (voir Fig. 2), avec $t_b - t_a = T$.



- Le premier chemin, noté I et représenté en traits tiretés sur la figure 2 est celui d'une particule libre, pour laquelle $g = 0$. Il part de z_a à t_a , z_a étant déterminé par le fait que $p(t_a) = P_0$.
- Le deuxième chemin, noté II, est dessiné en traits pleins, est celui d'une particule se déplaçant dans le champ de pesanteur (on a $g \neq 0$), arrivant en z_b à t_b et partant de z'_a à t_a , z'_a étant déterminé

par le fait que, comme pour le chemin I, $p(t_a) = P_0$. Les 2 courbes I et II de la figure partent donc avec la même tangente en t_a . Comme la courbe I est une ligne droite, et la courbe II une parabole, on a

$$z'_a - z_a = \frac{1}{2} g T^2 \quad (5.44)$$

- D'après (5.41), $\psi(z_b, t_b) = \psi(z'_a, t_a) e^{i S_{II} / \hbar}$ (5.45)

où S_{II} est l'action classique correspondant au chemin II.

- Nous désirons montrer dans ce paragraphe que $\psi(z_b, t_b)$ peut être aussi approximativement exprimé comme le produit de $\psi(z_a, t_a)$ par une intégrale effectuée le long du chemin I correspondant à $g = 0$

- Pour établir un tel résultat, il sera commode d'introduire un 3^{ème} chemin, noté III et représenté en pointillés sur la figure 2. Ce chemin est celui d'une particule se déplaçant dans le potentiel de gravitation ($g \neq 0$), qui part de 3_a à t_a pour arriver en 3_b à t_b . Pour ce chemin, on a donc nécessairement $p(t_a) \neq p_a$.

b) Lien entre les fonctions d'ondes $\psi(3_b, t_b)$ et $\psi^{(0)}(3_b, t_b)$ correspondant à $g \neq 0$ et à $g = 0$

- Revenons au cours IV et en particulier à l'équation (4.57). Cette relation exprime que, si $|3_a - 3'_a|$ est suffisamment petit (voir plus loin), on peut écrire :

$$\psi(3_b, t_b) = \psi(3'_a, t_a) e^{iS_{II}/\hbar} \simeq \psi(3_a, t_a) e^{iS_{III}/\hbar} \quad (5.46)$$

où S_{II} et S_{III} sont les actions classiques correspondant respectivement aux chemins II et III (avec $g \neq 0$).

- La condition de validité de (5.46) a été donnée. Elle s'exprime par $|3'_a - 3_a| \ll \delta_3$, où δ_3 est donnée en (4.56). En utilisant l'expression (5.12) de C établie plus haut, on obtient, compte tenu de (5.44)

$$\frac{1}{2} g T^2 \ll \zeta_0 \quad (5.47)$$

où
$$\zeta_0 = \left(\frac{\hbar^2}{M^2 g} \right)^{1/3} \quad (5.48)$$

est la seule quantité ayant les dimensions d'une longueur que l'on peut former à partir de $\hbar$, g et M .

Nous supposons dans la suite la condition (5.47) remplie.

- Considérons maintenant les chemins I et III qui ont les mêmes extrémités $3_a t_a$ et $3_b t_b$.

Quand g est non nul, III est par définition le chemin réel, alors que I est un chemin possible différent du chemin réel III par des termes d'ordre 1 en g (I n'est un chemin réel que pour $g = 0$). D'après le principe de moindre action, comme III est le chemin réel, on a :

$$S_{III} = S_I + O(g^2) \quad (5.49)$$

où S_I est l'action calculée le long du chemin possible I (avec $\frac{\text{le Lagrangien correspondant à } g \neq 0}{\text{le Lagrangien correspondant à } g = 0}$)

L'équation (5.46) peut donc être réécrite, à l'ordre 1 inclus en g :

$$\psi(3_b, t_b) \simeq \psi(3_a, t_a) e^{iS_I/\hbar} \quad (5.50)$$

Le résultat énoncé plus haut, au § a, est donc bien démontré.

- Supposons maintenant la particule libre ($g = 0$) et affectons d'un indice 0 toutes les quantités relatives à une telle particule. $\psi^{(0)}(3_b, t_b)$ est la fonction d'onde en $3_b t_b$ de la particule libre ayant l'impulsion p_0 à $t = t_a$; S_I^0 est l'action calculée le long du chemin I, qui est réel pour $g = 0$, avec le Lagrangien correspondant à $g = 0$. En appliquant l'équation (5.41) avec $g = 0$, on a :

$$\psi^{(0)}(3_b, t_b) = \psi(3_a, t_a) e^{iS_I^0/\hbar} \quad (5.51)$$

L'état initial $\psi(3_a, t_a)$ est le même pour $g = 0$ et $g \neq 0$

- Comparons enfin (5.50) et (5.51). Il vient :

$$\psi(z_b, t_b) = \psi^0(z_b, t_b) e^{i(S_I - S_I^0)/\hbar} \quad (5.52)$$

Par ailleurs, d'après (5.2),

$$L(z, \dot{z}, g \neq 0) - L(z, \dot{z}, g=0) = -Mg z = -V(z) \quad (5.53)$$

de sorte que :

$$S_I - S_I^0 = - \int_{t_a}^{t_b} V(z(t)) dt = -Mg \int_{t_a}^{t_b} z(t) dt \quad (5.54)$$

où $z(t)$ correspond au chemin I, c'est à dire est donné par :

$$z(t) = z_a + \frac{z_b - z_a}{t_b - t_a} (t - t_a) \quad (5.55)$$

En reportant (5.54) dans (5.52), on obtient finalement :

$$\psi(z_b, t_b) = \psi^0(z_b, t_b) \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} Mg \int_{t_a}^{t_b} z(t) dt \right\} \quad (5.56)$$

c) Application au calcul du déphasage dû au champ de pesanteur dans un interféromètre atomique.

- Considérons tout d'abord une particule libre ($g=0$) pouvant

suivre 2 chemins ACB ou ADB pour aller de A en B (Voir Fig. 3)

Soit Φ_0 le déphasage entre les 2 fonctions d'onde en B associées à ces 2 chemins.

- Si g n'est plus nul, les fonctions d'onde en B sont perturbées et le déphasage devient $\Phi = \Phi_0 + \delta\Phi$.

D'après les résultats du paragraphe précédent,

$$\delta\Phi = -\frac{i}{\hbar} \int_{ACB} Mg z(t) dt + \frac{i}{\hbar} \int_{ADB} Mg z(t) dt = -\frac{i}{\hbar} \oint Mg z(t) dt \quad (5.57)$$

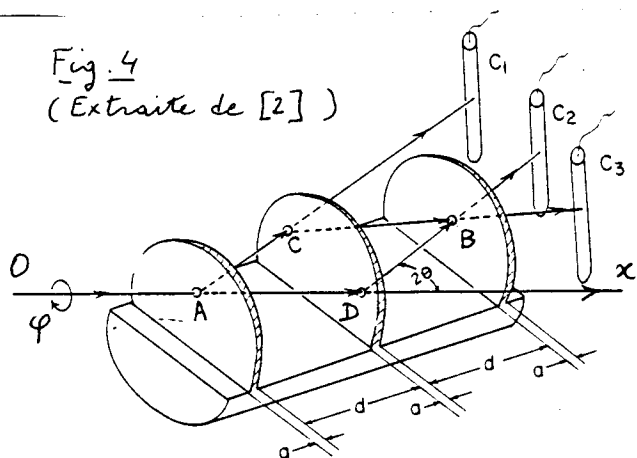
où $\oint$ désigne l'intégrale le long du contour fermé ACBDA.

④ Expérience de Colella, Overhauser, Werner (Refs 1-4).

a) - Principe de l'expérience

Fig. 4

(Extrait de [2])



- Interféromètre à neutrons formé de 3 lames parallèles découpées dans un monocristal de Silicium (Fig. 4)

- Faisceau de neutrons incident parallèle à Ox.

- Diffractions de Bragg en A, B, C, D

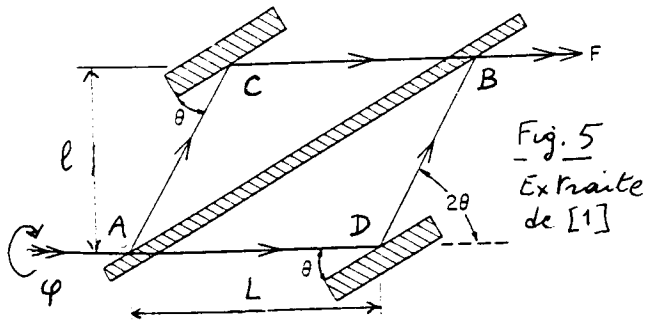
↳ Interféromètre avec 2 bras ACB et ADB. Les neutrons émergeant de B sont détectés par des compteurs à ^3He , C_2 et C_3 .

- On tourne l'interféromètre par rapport à l'axe Ox horizontal. Le plan ABCD initialement horizontal, tourne d'un angle φ par rapport à Ox.

- Dans le plan ABCD, la gravité effective est $g \sin \varphi$. Les trajets ACB et ADB s'effectuant à des hauteurs différentes, acquièrent des déphasages gravitationnels différents et les signaux d'interférence mesurés par C_2 et C_3 changent. On mesure la variation de ces signaux en fonction de φ .

b) Schématisation - Calcul du déphasage gravitationnel

- Une étude détaillée de la propagation des neutrons dans le monocristal sort du cadre de ce cours. Nous nous contenterons ici d'utiliser les résultats d'une telle étude qui sont essentiels pour la compréhension de l'expérience C.O.W.



Tout se passe comme si la face de chaque lame cristalline sur laquelle arrive le faisceau de neutrons avec un angle θ se comportait comme une lame semi-réfléchissante (Voir Fig. 5).

- Avant d'aller plus loin, il convient également de souligner que le phénomène de diffraction de Bragg est très sensible à l'énergie et à la direction des neutrons incidents.

Seuls, les neutrons ayant la bonne énergie pour avoir une longueur d'onde de de Broglie satisfaisant la condition de Bragg sont réfléchis partiellement en A, B, C, D. Les autres traversent l'appareil sans être réfléchis et ne participent pas au signal d'interférence. Il se produit donc naturellement une sélection très étroite en vitesses, qui permet de considérer le faisceau incident comme étant monochromatique.

Il en est de même pour l'angle θ d'incidence qui doit être très bien défini pour que la réflexion se produise.

Si le temps de passage des neutrons dans l'interféromètre est suffisamment court, la variation d'énergie cinétique et la variation de l'angle θ dues à la gravité restent suffisamment petites pour que la diffraction de Bragg continue à se produire.

- Pour calculer le déphasage gravitationnel $\delta\Phi$ entre les 2 bras ACB et ADB, nous utilisons le résultat du § 3c précédent et calculons l'intégrale $\int z(t) dt$ le long des chemins ACB et ADB correspondant à $g=0$ et représentés sur la figure 5.

Les contributions du segment AC sur le 1^{er} chemin ACB, et celle du DB sur le 2^{ème} chemin ADB, sont égales et se compensent. Les valeurs de z restent constantes le long des segments CB et AB et diffèrent l'une de l'autre de $z_C - z_A = l \sin \varphi$ où l est la distance entre AD et CB (voir Fig. 5) et φ l'angle du plan ABCD avec le plan horizontal. Par ailleurs, le neutron arrivant à la vitesse v_0 , met un temps $t_B - t_C = CB/v_0 = L/v_0$ pour aller de C à B, ou encore de A à D. L'équation (5.57) donne alors :

$$\delta\Phi = -\frac{1}{\hbar} M g (z_C - z_A) (t_B - t_C) = -\frac{1}{\hbar} M g l \sin \varphi \frac{L}{v_0} \quad (5.58)$$

qu'on peut encore écrire :

$$\delta\Phi = - \frac{MgS}{\hbar v_0} \sin \varphi \quad (5.59)$$

où

$$S = L\ell \quad (5.60)$$

est la surface enfermée par les 2 bras de l'interféromètre. On peut encore introduire la longueur d'onde de de Broglie λ_0 des neutrons :

$$\lambda_0 = \frac{h}{Mv_0} \quad (5.61)$$

ce qui donne pour $\delta\Phi$:

$$\delta\Phi = - 2\pi \frac{M^2 g S \lambda_0}{\hbar^2} \sin \varphi \quad (5.62)$$

De (5.62), on peut enfin déduire le nombre de franges ΔN qui défilent quand on fait varier φ de $+\pi/2$ à $-\pi/2$:

$$\Delta N = \frac{2|\delta\Phi|}{2\pi} = 2 \frac{M^2 g S \lambda_0}{\hbar^2} \quad (5.63)$$

C) Discussion - Ordres de grandeur

— Les caractéristiques de l'interféromètre n'interviennent que par la surface S et la longueur d'onde de de Broglie λ_0 du neutron. Si l'on prend $S = 6 \text{ cm}^2$, $\lambda_0 = 1.4 \text{ \AA}$, on obtient (avec $g = 10 \text{ m/s}^2$, $M = 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$, $\hbar = 6.6 \cdot 10^{-34} \text{ Joule} \cdot \text{sec}$), $\Delta N \approx 10$, ce qui est tout à fait appréciable.

On peut encore écrire Φ donné en (5.58) sous forme d'un rapport entre 2 énergies

$$\Phi = - \frac{Mg\ell \sin \phi}{\hbar/T} \quad (5.64)$$

Le numérateur de (5.64) est la différence d'énergie potentielle de gravitation entre les bras CB et AD, le dénominateur est l'incertitude d'énergie associée au temps de traversée de l'appareil :

$$T = \frac{L}{v_0} \quad (5.65)$$

— Revenons à la condition de validité (5.47) des calculs du § 3 qui conduisent à (5.57).

Pour des neutrons, la longueur élémentaire ξ_0 donnée en (5.48) est de l'ordre de $7 \mu\text{m} = 7 \cdot 10^{-6} \text{ m}$. Pour $\lambda_0 \approx 1.4 \text{ \AA}$, la vitesse v_0 déduite de (5.61) est de l'ordre de $3 \cdot 10^3 \text{ m/s}$, ce qui donne pour le temps de traversée T écrit en (5.65) avec $L \approx 3 \text{ cm}$, un temps T de l'ordre de 10^{-5} sec . Pendant un tel temps, le neutron tombe de $\frac{1}{2}gT^2$, c'est à dire de l'ordre de $5 \text{ \AA} = 5 \cdot 10^{-10} \text{ m}$, ce qui est tout à fait négligeable devant ξ_0 .

De même, la variation de vitesse verticale, $\delta v = gT$ est de l'ordre de 10^{-4} m/s , ce qui conduit à des variations angulaires $\delta\theta \approx \delta v/v_0$, de l'ordre de $3 \cdot 10^{-8}$, suffisamment faibles pour que la diffraction de Bragg ne soit pas bloquée.

— Evaluons un ordre de grandeur du déphasage que l'on obtient en remplaçant les neutrons par des photons.

La fréquence d'un photon change très légèrement quand il change d'altitude dans un champ de pesanteur. Pour $\varphi = \pi/2$, la variation de fréquence quand on passe du bras CB au bras AD

est de l'ordre de $\delta\omega/\omega = g\ell/c^2$. On en déduit que le déphasage $\delta\Phi_{\text{photon}}$ pour un photon se propageant dans les 2 bras de l'interféromètre de la figure 5 est de l'ordre de

$$\delta\Phi_{\text{photon}} \approx \delta\omega \frac{L}{c} = \frac{g\ell}{c^2} \omega \frac{L}{c} = \frac{gSL\omega}{c^3} \quad (5.66)$$

En comparant $\delta\Phi_{\text{photon}}$ à $\delta\Phi_{\text{neutron}}$ donné en (5.58), on obtient

$$\frac{\Phi_{\text{photon}}}{\Phi_{\text{neutron}}} \approx \frac{\hbar\omega}{Mc^2} \frac{v_0}{c} \ll 1 \quad (5.67)$$

les photons sont beaucoup moins sensibles que les neutrons aux effets gravitationnels.

La propriété précédente est d'ailleurs mise à profit pour déterminer, au moyen d'interférences observées sur des rayons X, les variations très faibles de longueur qui résultent des contraintes mécaniques apparaissant lorsqu'on tourne l'interféromètre.

d) Exemple de résultats expérimentaux

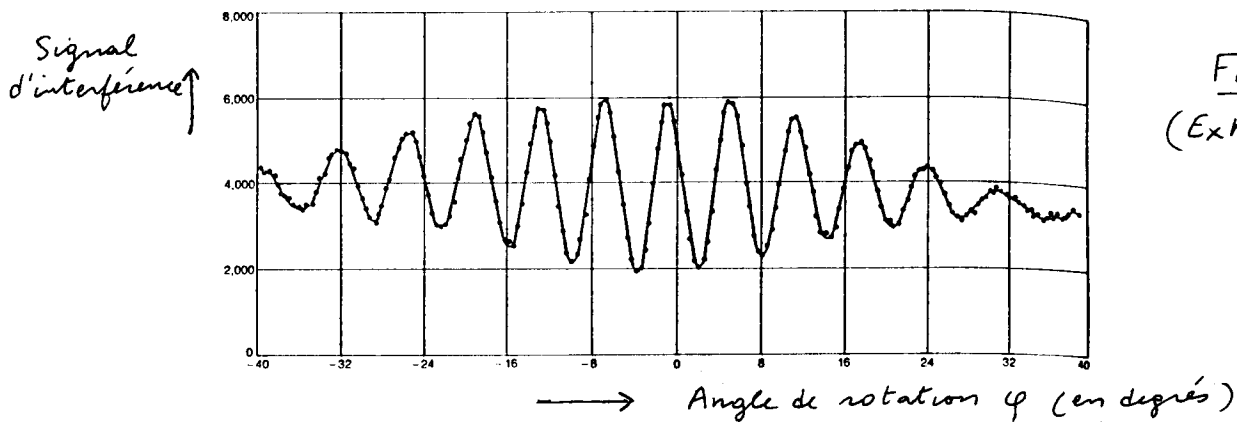


Fig. 6
(Extrait de [4])

La diminution de contraste des franges quand ϕ augmente est interprétée par les auteurs de l'expérience comme étant due à un gauchissement de l'interféromètre dû aux contraintes mécaniques apparaissant quand on tourne l'appareil.

Références

- (1) A.W. Overhauser and R. Colella, Phys. Rev. Lett. 33, 1237 (1974)
- (2) R. Colella, A.W. Overhauser and S.A. Werner, Phys. Rev. Lett. 34, 1472 (1975)
- (3) J.L. Standenmann, S.A. Werner, R. Colella and A.W. Overhauser Phys. Rev. A21, 1419 (1980)
- (4) D.M. Greenberger and A.W. Overhauser Scientific American, 242, 54 (1980)