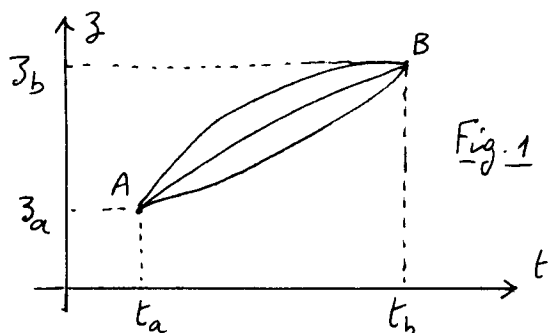


## Buts de ce cours

- Dans un interféromètre atomique, l'amplitude de probabilité de trouver la particule, en un point donné et à un instant donné à la sortie de l'interféromètre, est une somme de 2 amplitudes  $A_I$  et  $A_{II}$  correspondant aux 2 chemins possibles dans l'interféromètre. Comment calculer simplement  $A_I$  et  $A_{II}$  et, en particulier, le déphasage entre  $A_I$  et  $A_{II}$  dû à des champs extérieurs, inertiels ? Peut-on ramener ce calcul à des intégrales le long du chemin classique ?
- L'approche de Feynman, exprimant le propagateur quantique comme une intégrale fonctionnelle sur tous les chemins possibles, est très commode, car elle utilise le Lagrangien et l'action et se prête très bien à l'étude de la limite classique. Des résultats très simples peuvent être également obtenus à partir de cette approche pour des Lagrangiens quadratiques vis à vis des coordonnées et des vitesses, ce qui est le cas pour une particule dans un champ de pesanteur ou dans un référentiel en rotation. Nous utiliserons donc ici une telle approche, tout en nous appuyant, pour certains calculs, sur l'approche traditionnelle utilisant un Hamiltonien et un opérateur d'évolution.

## ① Rappels classiques (Ref. 1)

### a) - Chemins possibles et chemin effectivement suivi, ou réel



Particule classique, partant de  $z_a$  à  $t_a$  et arrivant en  $z_b$  à  $t_b$ .

Infinité de chemins possibles joignant les points A et B dans l'espace-temps (Fig. 1)

Comment caractériser le chemin réel, effectivement suivi par le système ?

### b) - Principe de moindre action

Le chemin réel est celui pour lequel une certaine quantité, fonction du chemin et appelé action, est extrémale.

Lagrangien  $L$ . Action  $S$

- Le Lagrangien  $L$  est une certaine fonction des coordonnées  $z$  et des vitesses  $\dot{z}$  de la particule. Pour une particule de masse  $M$ , dans un potentiel  $V(z)$ , on a

$$L(z, \dot{z}) = \frac{1}{2} M \dot{z}^2 - V(z) \quad (4.1)$$

- L'action  $S$  correspondant à un chemin donné, c.-à-d. à une fonction  $z(t)$  telle que  $z(t_a) = z_a$   $z(t_b) = z_b$  est l'intégrale de  $L$  le long de ce chemin

$$S = \int_{t_a}^{t_b} L(z(t), \dot{z}(t)) dt \quad (4.2)$$

## Equations de Lagrange

IV-2

Le chemin réel  $z(t)$  rend  $S$  extrême. Pour toute variation du chemin par rapport au chemin réel, définie par  $\delta z(t)$  avec

$$\delta z(t_a) = 0 \quad \delta z(t_b) = 0 \quad (4.3)$$

$S$  ne doit pas varier, au premier ordre en  $\delta z$ . Calculons  $\delta L$  et  $\delta S$

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial z} \delta z + \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \delta \dot{z} \quad (4.4)$$

$$\delta S = \int_{t_a}^{t_b} \left[ \frac{\partial L}{\partial z} \delta z(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \delta \dot{z}(t) \right] dt \quad (4.5)$$

En utilisant  $\delta \dot{z}(t) = \frac{d}{dt} \delta z(t)$  et en effectuant une intégration par parties, on obtient

$$\delta S = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \delta z(t) \Big|_{t_a}^{t_b} + \int_{t_a}^{t_b} \left[ \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \right] \delta z(t) dt \quad (4.6)$$

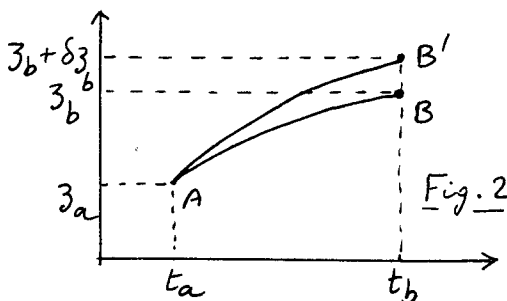
Le terme tout intégré est nul à cause de (4.3). En écrivant que le 2<sup>ème</sup> est nul, quel que soit  $\delta z(t)$ , on obtient

$$\frac{\partial L}{\partial z} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = 0 \quad (4.7)$$

qui sont les équations de Lagrange décrivant la dynamique du système

### c) - Variations de l'action entre 2 mouvements réels très voisins

Variations  $\delta z_a$  et  $\delta z_b$  de  $z_a$  et  $z_b$  - Impulsions



- 2 chemins réels reliant l'état  $z_a, t_a$  à 2 états finaux  $z_b, t_b$  et  $z_b + \delta z_b, t_b$ . Comment varie l'action quand on passe du chemin réel AB au chemin réel AB' ? (Fig. 2)

- On repart des équations (4.4), (4.5), (4.6). Mais maintenant, on a

$$\delta z(t_a) = 0 \quad \delta z(t_b) = \delta z_b \quad (4.8)$$

au lieu de (4.3). Par ailleurs, comme les chemins sont réels, l'équation (4.7) est satisfaite, de sorte que le 2<sup>ème</sup> terme de (4.6) est nul. On a alors

$$\delta S = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \delta z_b \quad (4.9)$$

Si l'on introduit l'impulsion  $p$  par l'équation

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \quad (4.10)$$

on obtient

$$\delta S = p_b \delta z_b \quad (4.11)$$

où  $p_b$  désigne l'impulsion en B correspondant au chemin réel AB

- La formule précédente se généralise aisément au cas où  $z_a$  et  $z_b$  sont tous les 2 variés  $z_a \rightarrow z_a + \delta z_a$ ,  $z_b \rightarrow z_b + \delta z_b$ .

$$\delta S = p_b \delta z_b - p_a \delta z_a \quad (4.12)$$

Variations  $\delta t_a$  et  $\delta t_b$  de  $t_a$  et  $t_b$  - Hamiltonien

- On considère maintenant 2 chemins réels reliant l'état  $z_a, t_a$  à 2 états finaux  $z_b, t_b$  et  $z_b, t_b + \delta t_b$  (Fig. 3)

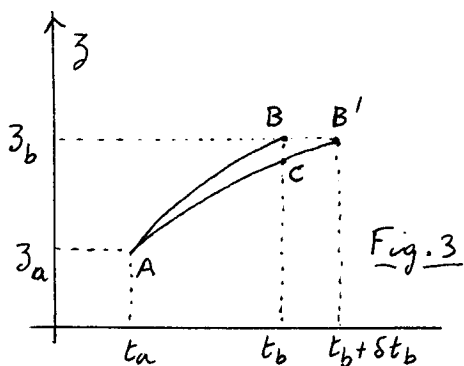


Fig. 3

- Soit C le point du chemin réel AB' ayant même abscisse que B. On a  $\overline{BC} \approx -\dot{z}_B \delta t_b \approx -\dot{z}_B \delta t_b = -\dot{z}_B \delta t_b$  (4.13)

- D'après le paragraphe précédent  $S_{AC} - S_{AB} = p_b \cdot \overline{BC} = -p_b \dot{z}_B \delta t_b$  (4.14)

- Par ailleurs  $S_{AB'} = S_{AC} + S_{CB'} \approx S_{AC} + L_b \delta t_b$  (4.15)

où  $L_b$  est la valeur du Lagrangien au point B du chemin réel AB.

- On en déduit, compte tenu de (4.14)

$$\delta S = S_{AB'} - S_{AB} = -(p_b \dot{z}_B - L_b) \delta t_b \quad (4.16)$$

Si l'on introduit l'hamiltonien H par l'équation

$$H = p \dot{z} - L \quad (4.17)$$

on obtient

$$\delta S = -H_b \delta t_b \quad (4.18)$$

et, de manière plus générale, lorsque  $t_a$  et  $t_b$  sont tous 2 variés

$$\delta S = -H_b \delta t_b + H_a \delta t_a \quad (4.19)$$

### Variations de l'action le long d'un chemin réel

- Considérons tous les chemins réels partant d'un point fixe A ( $z_a, t_a$ ) et aboutissant en un point M ( $z, t$ ) quelconque. L'action le long du chemin réel AM est une certaine fonction  $S(z, t)$  des coordonnées du point final. D'après les paragraphes précédents

$$dS = \frac{\partial S}{\partial z} dz + \frac{\partial S}{\partial t} dt = p dz - H dt \quad (4.20)$$

où p et H sont l'impulsion et l'Hamiltonien en M. On en déduit

$$p = \frac{\partial S}{\partial z} \quad (4.21.a) \quad H = -\frac{\partial S}{\partial t} \quad (4.21.b)$$

- L'action au point M ( $z, t$ ) peut donc être exprimée comme l'intégrale le long du chemin AB de  $p dz - H dt$

$$S = \int_{AM} (p dz - H dt) \quad (4.22)$$

## ② Propagateur quantique - Formulation de Feynman (Refs 2-4)

### a) Définition

Une particule quantique est, à un certain instant  $t_a$ , au point  $z_a$ . A un certain instant ultérieur  $t_b$ , elle a une certaine amplitude de probabilité d'être au point  $z_b$ . Cette amplitude est notée  $K(z_b t_b, z_a t_a)$ , ou encore plus simplement  $K(b, a)$ . C'est le propagateur quantique de la particule.

### b) Expression de Feynman pour le propagateur

- Il y a une infinité de chemins possibles reliant les points  $z_a t_a$  et  $z_b t_b$  (voir Fig. 1). Dans la formulation de Feynman,  $K(z_b t_b, z_a t_a)$  est exprimée comme une somme de contributions associées à chacun

des chemins possibles reliant  $z_a t_a$  à  $z_b t_b$ .

- Soit  $\Gamma$  un tel chemin. Le module de la contribution de  $\Gamma$  est indépendant de  $\hbar$ . Par contre, la phase de cette contribution dépend de  $\hbar$ . Plus précisément, Feynman postule qu'elle est égale à  $S_\Gamma / \hbar$ , où  $S_\Gamma$  est l'action correspondant au chemin  $\Gamma$ . On peut donc écrire

$$K(b, a) = \sum_{\text{tous les chemins } \Gamma} e^{i S_\Gamma / \hbar} \quad (4.23)$$

- La somme sur tous les chemins possibles  $\Gamma$  est une intégrale dans l'espace des chemins  $z(t)$ , pour laquelle il faudrait définir une "mesure"  $\mathcal{D}z(t)$

$$K(b, a) = \int_a^b e^{i S_\Gamma / \hbar} \mathcal{D}z(t) \quad (4.24)$$

$K(b, a)$  est donné par une intégrale fonctionnelle, ou encore intégrale de chemins. Nous n'aborderons pas ici le calcul de telles intégrales (Voir exemples simples de tels calculs dans les Refs. 2-4)

Nous nous contenterons de discuter toutes les propriétés simples que l'on peut déduire de la forme (4.23), notamment lorsque  $L$  est une fonction quadratique de  $\dot{z}$  et  $z$  (voir § 3), revenant à la formulation traditionnelle de la mécanique quantique lorsqu'un calcul précis de constante de normalisation est nécessaire.

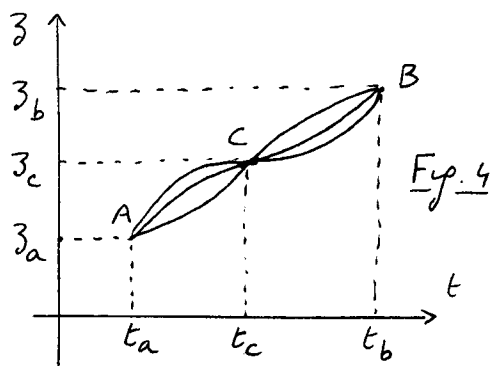
### c) Limite classique

- Les situations classiques sont celles pour lesquelles l'action  $S_\Gamma$  est très grande devant  $\hbar$ . Dans ce cas, la variation  $\Delta S_\Gamma$  de  $S$  entre 2 chemins différents voisins, même si elle est très petite en valeur relative ( $\Delta S_\Gamma / S_\Gamma \ll 1$ ), est en général beaucoup plus grande que  $\hbar$ . La phase de  $e^{i S_\Gamma / \hbar}$  varie alors très rapidement d'un chemin à l'autre et les contributions à  $K(b, a)$  de la plupart des chemins  $\Gamma$  se détruisent par interférence.

- Considérons maintenant le chemin  $\Gamma_0$  pour lequel l'action est extrémale ( $S$  ne varie pas, au 1<sup>er</sup> ordre, quand on passe du chemin  $\Gamma_0$  à un chemin infiniment voisin).  $\Gamma_0$  est le chemin réel classique, correspondant à la solution des équations classiques. L'amplitude  $e^{i S_{\Gamma_0} / \hbar}$  associé à  $\Gamma_0$  dans (4.23) interfère alors constructivement avec celle des chemins voisins de  $\Gamma_0$ , puisque cette fois leurs phases restent pratiquement égales. Pour calculer  $K(b, a)$ , on peut donc ignorer tous les chemins sauf  $\Gamma_0$  et les chemins infiniment voisins. L'expression (4.23) redonne ainsi le chemin réel classique à la limite  $\hbar \rightarrow 0$  (ou plus précisément  $S_\Gamma \gg \hbar$ ).

### d) Sommation sur les états intermédiaires

- Considérons un instant  $t_c$  intermédiaire entre  $t_a$  et  $t_b$ . Tout chemin possible reliant  $z_a t_a$  à  $z_b t_b$  passe nécessairement par un point  $z_c$  à l'instant  $t_c$ . Considérons alors l'ensemble de tous les chemins possibles passant par un point donné  $z_c$  à  $t_c$  (voir Fig. 4).



La somme sur tous les chemins possibles ACB de  $\exp(iS/\hbar)$  où  $S = S_{ACB} = S_{AC} + S_{CB}$  donne

$$K(z_b t_b, z_c t_c) K(z_c t_c, z_a t_a) = K(b, c) K(c, a) \quad (4.25)$$

(On rappelle que  $L$  ne dépend que de  $\dot{z}$  et  $z$ , et non de dérivées d'ordre supérieur

comme  $\ddot{z}, \dddot{z}, \dots$ , de sorte que l'équation  $S_{ACB} = S_{AC} + S_{CB}$  demeure valable même si  $\dot{z}$  est discontinu en C le long du chemin ACB)

En sommant (4.25) sur toutes les valeurs possibles de  $z_c$ , on obtient la somme de  $\exp(iS/\hbar)$  sur tous les chemins possibles reliant  $z_a t_a$  à  $z_b t_b$ . On peut donc écrire

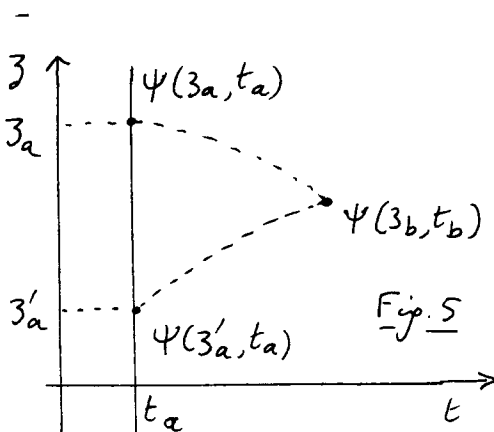
$$K(z_b t_b, z_a t_a) = \int dz_c K(z_b t_b, z_c t_c) K(z_c t_c, z_a t_a) \quad (4.26.a)$$

$$\text{ou encore} \quad K(b, a) = \int dz_c K(b, c) K(c, a) \quad (4.26.b)$$

qui est la règle bien connue de composition des amplitudes en mécanique quantique: ce sont les amplitudes relatives aux différents états intermédiaires possibles qu'il faut sommer et non les probabilités.

#### e. Fonction d'onde et propagateur

- L'état quantique de la particule à l'instant  $t_a$  est connu si l'on connaît toutes les amplitudes de probabilité  $\psi(z_a, t_a)$  de trouver cette particule aux différents points  $z_a$ . La fonction  $\psi(z_a, t_a)$  est la fonction d'onde de la particule



Si la particule est en  $z_a t_a$ , avec une amplitude  $\psi(z_a, t_a)$ , l'amplitude de probabilité de la trouver en  $z_b$  à un instant ultérieur est le produit de l'amplitude  $\psi(z_a, t_a)$  par le propagateur  $K(z_b t_b, z_a t_a)$  (Voir Fig. 5)

Pour avoir l'amplitude de probabilité  $\psi(z_b, t_b)$  de trouver la particule

en  $z_b$  à  $t_b$ , quelle que soit sa position à  $t_a$ , il faut sommer  $K(z_b t_b, z_a t_a) \psi(z_a, t_a)$  sur toutes les positions possibles  $z_a, z'_a, \dots$  de la particule à  $t_a$ , ce qui donne

$$\psi(z_b, t_b) = \int dz_a K(z_b t_b, z_a t_a) \psi(z_a, t_a) \quad (4.27)$$

- L'équation (4.27) ressemble à un "principe de Huygens-Fresnel" dans l'espace-temps qui permettrait d'obtenir l'onde en  $z_b t_b$  comme résultant de la superposition d'ondelettes rayonnées par les différents points  $z_a$  de la surface d'onde à l'instant  $t_a$ .

f Lien avec la formulation traditionnelle

- Soit  $U(t_b, t_a)$  l'opérateur d'évolution entre  $t_a$  et  $t_b$ , qui est tout simplement égal à  $\exp\{-iH(t_b - t_a)/\hbar\}$  si l'hamiltonien  $H$  est indépendant du temps. L'amplitude de trouver la particule en  $z_b$  à  $t_b$  si elle est partie de  $z_a$  à  $t_a$  est tout simplement

$$K(z_b, t_b, z_a, t_a) = \langle z_b | U(t_b, t_a) | z_a \rangle \quad (4.28)$$

- L'opérateur d'évolution satisfait à la propriété importante

$$U(t_b, t_a) = U(t_b, t_c) U(t_c, t_a) \quad (4.29)$$

En insérant entre les 2 opérateurs  $U$  du membre de droite de (4.29) la relation de fermeture  $\int dz_c |z_c\rangle \langle z_c| = \mathbb{1}$  relative à l'opérateur position et prenant les éléments de matrice des 2 membres de (4.29) entre  $\langle z_b |$  et  $|z_a\rangle$ , on obtient

$$\langle z_b | U(t_b, t_a) | z_a \rangle = \int dz_c \langle z_b | U(t_b, t_c) | z_c \rangle \langle z_c | U(t_c, t_a) | z_a \rangle \quad (4.30)$$

qui n'est autre que (4.26), compte tenu de (4.28).

- Par définition même de  $U(t_b, t_a)$

$$|\psi(t_b)\rangle = U(t_b, t_a) |\psi(t_a)\rangle \quad (4.31)$$

En insérant la relation de fermeture  $\int dz_a |z_a\rangle \langle z_a| = \mathbb{1}$  entre  $U(t_b, t_a)$  et  $|\psi(t_a)\rangle$  et en projetant les 2 membres de (4.31) sur  $\langle z_b |$ , on obtient (4.27), compte tenu de (4.28) et de  $\langle z_b | \psi(t_b) \rangle = \psi(z_b, t_b)$ ,  $\langle z_a | \psi(t_a) \rangle = \psi(z_a, t_a)$ .

③ Cas simple des Lagrangiens quadratiques (Ref. 3).a) - Hypothèses

- On suppose que le Lagrangien est une fonction quadratique de  $z$  et  $\dot{z}$

$$L = a(t) \dot{z}^2 + b(t) \dot{z} z + c(t) z^2 + d(t) \dot{z} + e(t) z + f(t) \quad (4.32)$$

- Un premier exemple d'une telle situation est le Lagrangien d'une particule libre

$$L = \frac{1}{2} M \dot{z}^2 \quad (4.33)$$

ou celui d'une particule dans un champ de pesanteur dérivant du potentiel  $V(z) = Mgz$

$$L = \frac{1}{2} M \dot{z}^2 - Mgz \quad (4.34)$$

- Un autre exemple est celui d'une particule dans un référentiel tournant à la vitesse angulaire  $\vec{\Omega}$  par rapport à un référentiel galiléen. Nous montrerons dans un cours ultérieur que

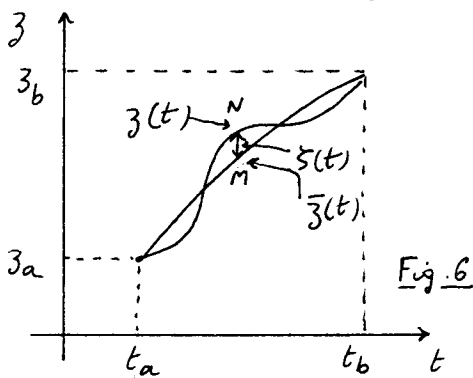
$$L = \frac{1}{2} M \dot{\vec{r}}^2 + M \vec{r} \cdot (\vec{\Omega} \times \vec{r}) + \frac{M}{2} (\vec{\Omega} \times \vec{r})^2 \quad (4.35)$$

b) Forme simple du propagateur - Dépendance en  $z_a$  et  $z_b$ 

- Pour calculer l'intégrale de chemin (4.24), nous allons repérer le chemin possible le plus général passant en  $z_a$  à  $t_a$  et en  $z_b$  à  $t_b$ , non pas par rapport à l'axe  $z=0$ , mais par rapport au chemin classique réel passant par les mêmes points

- Appelons donc  $\bar{z}(t)$  la solution des équations de Lagrange correspondant à  $\bar{z}(t_a) = z_a$  et  $\bar{z}(t_b) = z_b$  et posons

$$z(t) - \bar{z}(t) = \xi(t) \quad (4.36)$$



$\xi(t)$  représente l'écart entre l'ordonnée du point N d'un chemin quelconque reliant  $z_a$  à  $z_b$  et l'ordonnée du point M de même abscisse  $t$  que N situé sur le chemin réel (d'action extrême) reliant  $z_a$  à  $z_b$ .

Il revient au même de varier  $z(t)$  ou de varier  $\xi(t)$ . On peut donc écrire

$$\begin{aligned} K(z_b t_b, z_a t_a) &= \int_a^b \exp\left\{\frac{i}{\hbar} S[z(t)]\right\} \mathcal{D}z(t) \\ &= \int_0^1 \exp\left\{\frac{i}{\hbar} S[\bar{z}(t) + \xi(t)]\right\} \mathcal{D}\xi(t) \end{aligned} \quad (4.37)$$

Les conditions aux limites en  $t_a$  et  $t_b$  sont bien sûr différentes pour  $z(t)$  et  $\xi(t)$ . Au lieu d'avoir

$$z(t_a) = \bar{z}(t_a) = z_a \quad z(t_b) = \bar{z}(t_b) = z_b \quad (4.38)$$

on a

$$\xi(t_a) = 0 \quad \xi(t_b) = 0 \quad (4.39)$$

- Reportons  $z(t) = \bar{z}(t) + \xi(t)$  dans l'expression (4.32) de  $L$ . Il vient

$$L = a(t) \left( \dot{\bar{z}}^2 + 2\dot{\bar{z}}\dot{\xi} + \dot{\xi}^2 \right) + \dots \quad (4.40)$$

de sorte que

$$S[\bar{z}(t) + \xi(t)] = \int_{t_a}^{t_b} [a(t) (\dot{\bar{z}}^2 + 2\dot{\bar{z}}\dot{\xi} + \dot{\xi}^2) + \dots] dt \quad (4.41)$$

- Considérons tous les termes indépendants de  $\xi$  et  $\dot{\xi}$  dans l'intégrand de (4.41). Leur contribution à (4.41) n'est autre que  $S[\bar{z}(t)]$ , c'est-à-dire l'action classique  $S_{cl}(z_b t_b, z_a t_a)$  correspondant au chemin réel classique reliant  $z_a$  à  $z_b$ .
- Considérons maintenant tous les termes linéaires en  $\xi$  ou en  $\dot{\xi}$ . Leur contribution à (4.41) n'est autre que la variation de l'action quand on passe du chemin  $\bar{z}(t)$  au chemin  $\bar{z}(t) + \xi(t)$ , cette variation étant calculée au 1<sup>er</sup> ordre en  $\xi(t)$  et en  $\dot{\xi}(t)$ . Comme  $\bar{z}(t)$  est par définition le chemin d'action extrême, cette variation est identiquement nulle.
- Restent les termes quadratiques en  $\xi$  et  $\dot{\xi}$  de (4.40) qui s'écrivent  $a(t)\dot{\xi}^2 + b(t)\dot{\xi}\xi + c(t)\xi^2$  et dont la contribution à (4.41) est égale à  $\int_{t_a}^{t_b} [a(t)\dot{\xi}^2 + b(t)\dot{\xi}\xi + c(t)\xi^2] dt$ .
- On a donc finalement

$$S[\bar{z}(t) + \xi(t)] = S_{cl}(z_b t_b, z_a t_a) + \int_{t_a}^{t_b} [a(t)\dot{\xi}^2 + b(t)\dot{\xi}\xi + c(t)\xi^2] dt \quad (4.42)$$

et par suite, compte tenu de (4.37) :

$$K(b, a) = \exp\left\{\frac{i}{\hbar} S_{cl}(b, a)\right\} \int_0^1 \exp\left\{\frac{i}{\hbar} \int_{t_a}^{t_b} [a(t)\dot{\xi}^2 + b(t)\dot{\xi}\xi + c(t)\xi^2] dt\right\} \mathcal{D}\xi(t) \quad (4.43)$$

## Conclusion

IV-8

Comme tous les chemins  $\mathcal{Z}(t)$  partent de  $\mathcal{Z}(t_a) = 0$  et aboutissent en  $\mathcal{Z}(t_b) = 0$  (voir Eqs. (4.39)), l'intégrale de chemins figurant dans (4.43) ne dépend que de  $t_a$  et  $t_b$ , et non de  $\mathcal{Z}_a$  et  $\mathcal{Z}_b$ . Nous noterons une telle intégrale de chemins  $F(t_b, t_a)$ , ce qui donne pour  $K(b, a)$

$$K(\mathcal{Z}_b t_b, \mathcal{Z}_a t_a) = \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} S_{cl}(\mathcal{Z}_b t_b, \mathcal{Z}_a t_a) \right\} F(t_b, t_a) \quad (4.44)$$

Lorsque le lagrangien est une fonction quadratique de  $\dot{\mathcal{Z}}$  et  $\mathcal{Z}$ , toute la dépendance en  $\mathcal{Z}_a$  et  $\mathcal{Z}_b$  du propagateur  $K(\mathcal{Z}_b t_b, \mathcal{Z}_a t_a)$  est donc contenue dans le facteur  $\exp \left\{ \frac{i}{\hbar} S_{cl}(\mathcal{Z}_b t_b, \mathcal{Z}_a t_a) \right\}$ . Pour calculer cette dépendance en  $\mathcal{Z}_a$  et  $\mathcal{Z}_b$ , il suffit donc de calculer l'action le long du chemin classique réel reliant  $\mathcal{Z}_a t_a$  à  $\mathcal{Z}_b t_b$ .

## c - Propagation de la fonction d'onde

### Problème physique

- Reprenons (4.44) dans (4.27). Il vient

$$\Psi(\mathcal{Z}_b, t_b) = F(t_b, t_a) \int_{-\infty}^{+\infty} d\mathcal{Z}_a \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} S_{cl}(\mathcal{Z}_b t_b, \mathcal{Z}_a t_a) \right\} \Psi(\mathcal{Z}_a, t_a) \quad (4.45)$$

Comme on connaît maintenant la dépendance en  $\mathcal{Z}_a$  du propagateur (4.44), on peut se demander si, dans l'intégrale sur  $\mathcal{Z}_a$  de (4.45), certaines valeurs de  $\mathcal{Z}_a$  vont contribuer de manière prédominante. En effet, selon que  $\Psi(\mathcal{Z}_a, t_a)$  et  $\exp \left\{ \frac{i}{\hbar} S_{cl}(\mathcal{Z}_b t_b, \mathcal{Z}_a t_a) \right\}$  oscillent en fonction de  $\mathcal{Z}_a$  au voisinage de  $\mathcal{Z}_a = \mathcal{Z}_0$  avec des périodes spatiales très voisines ou très différentes, l'intégrale sur  $\mathcal{Z}_a$  du produit de ces 2 fonctions va donner un résultat important ou négligeable, ce qui veut dire que les ondes arrivant en  $\mathcal{Z}_b t_b$  et provenant du voisinage de  $\mathcal{Z}_0 t_a$  vont interférer de manière constructive ou destructive.

- Pour déterminer les valeurs de  $\mathcal{Z}_a$  qui contribuent le plus à l'intégrale de (4.45), il faut au préalable préciser la dépendance spatiale en  $\mathcal{Z}_a$  du propagateur et de la fonction d'onde.

### Dépendance spatiale en $\mathcal{Z}_a$ du propagateur

- Au point  $\mathcal{Z}_b t_b$  arrivent une infinité de chemins réels classiques qui diffèrent les uns des autres par la valeur  $\mathcal{Z}_a$  de  $\mathcal{Z}(t)$  en  $t = t_a$ . Au lieu de paramétrer ces chemins réels par  $\mathcal{Z}_a$  et  $\mathcal{Z}_b$  (valeurs de  $\mathcal{Z}(t)$  en  $t = t_a$  et  $t = t_b$ ), on peut utiliser la valeur de l'impulsion  $p(t)$  en  $t = t_a$ ,  $p(t_a) = p_a$ , et celle de la position en  $t = t_b$ ,  $\mathcal{Z}(t_b) = \mathcal{Z}_b$ . Parmi tous les chemins réels passant par  $\mathcal{Z}_b t_b$ , il y en a en général un seul pour lequel  $p(t_a) = p_a$ .

- Considérons alors le chemin réel reliant  $(p'_a t_a)$  à  $(\mathcal{Z}_b t_b)$  et soit  $\mathcal{Z}'$  la valeur de  $\mathcal{Z}(t_a)$  pour un tel chemin

$$p(t_a) = p' \quad \mathcal{Z}(t_b) = \mathcal{Z}_b \quad \mathcal{Z}(t_a) = \mathcal{Z}' \quad (4.46)$$

Quand  $\mathcal{Z}$  varie de  $d\mathcal{Z}$  au voisinage de  $\mathcal{Z}'$ , on a, d'après (4.12)

$$dS_{cl}(\mathcal{Z}_b t_b, \mathcal{Z}' t_a) = -p' d\mathcal{Z} \quad (4.47)$$

de sorte que 
$$\frac{\partial S_{cl}(\mathcal{Z}_b t_b, \mathcal{Z}' t_a)}{\partial \mathcal{Z}'} = -p' \quad (4.48)$$

- Pour tous les lagrangiens quadratiques en  $\dot{\mathcal{Z}}$  et  $\mathcal{Z}$  que nous aurons à utiliser dans la suite du cours, l'action  $S_{cl}(\mathcal{Z}_b t_b, \mathcal{Z}_a t_a)$

est aussi une fonction quadratique de  $z_a$  et  $z_b$ . Au voisinage de  $z'$ , le développement de  $S_{cl}(z_b t_b, z_a t_a)$  en fonction de  $z_a - z'$  s'arrête donc au 2<sup>ème</sup> ordre et s'écrit, compte tenu de (4.48)

$$S_{cl}(z_b t_b, z_a t_a) = S_{cl}(z_b t_b, z' t_a) - p'(z_a - z') + C(t_b, t_a)(z_a - z')^2 \quad (4.49)$$

où

$$C(t_b, t_a) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial z'^2} S_{cl}(z_b t_b, z' t_a) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial z_a^2} S_{cl}(z_b t_b, z_a t_a) \quad (4.50)$$

ne peut dépendre que de  $t_b$  et  $t_a$  puisque  $S_{cl}$  est une fonction quadratique des positions des 2 extrémités du chemin

### Cas d'une onde plane incidente

- Supposons qu'à l'instant  $t = t_a$ , l'état de la particule soit une onde plane d'impulsion  $p_0$

$$\Psi(z_a, t_a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{i p_0 z_a / \hbar} \quad (4.51)$$

- Revenons alors à (4.49). Dans cette expression,  $p'$  et par suite  $z'$  sont quelconques. Choisissons  $p' = p_0$ . En d'autres termes, parmi tous les chemins réels passant par  $z_b t_b$ , considérons celui pour lequel  $p(t_a) = p_0$  et soit  $z_0$  la valeur correspondante de  $z(t_a)$ :

$$p(t_a) = p_0 \quad z(t_b) = z_b \quad z(t_a) = z_0 \quad (4.52)$$

En remplaçant  $p'$  et  $z'$  par  $p_0$  et  $z_0$  dans (4.49), et en reportant l'expression ainsi obtenue de  $S_{cl}(z_b t_b, z_a t_a)$  dans (4.44), on obtient

$$\exp\left\{\frac{i}{\hbar} S_{cl}(z_b t_b, z_a t_a)\right\} = \exp\left\{\frac{i}{\hbar} S_{cl}(z_b t_b, z_0 t_a)\right\} \exp\left\{\frac{i}{\hbar} \left[-p_0(z_a - z_0) + C(t_b, t_a)(z_a - z_0)^2\right]\right\} \quad (4.53)$$

La comparaison de (4.51) et (4.53) montre que, au voisinage du point  $z_0$  défini par (4.52), les termes linéaires en  $z_a$  dans la phase des 2 fonctions de  $z_a$  qui figurent dans (4.53) se compensent, de sorte que la contribution du voisinage de  $z_0$  va être prédominante dans l'intégrale de (4.45).

- Plus précisément, reportons (4.51) et (4.53) dans (4.45) et utilisons <sup>(la relation</sup>

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i u^2} du = \sqrt{i\pi} \quad (4.54)$$

qui peut être démontrée par intégration dans le plan complexe de la fonction  $e^{-z^2}$  le long du contour de la figure 7. On obtient:

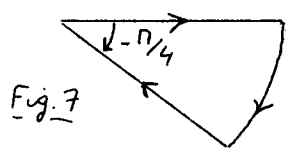


Fig. 7

$$\Psi(z_b, t_b) = F(t_b, t_a) \sqrt{\frac{i\pi\hbar}{C(t_b, t_a)}} \underbrace{\frac{e^{i p_0 z_0 / \hbar}}{\sqrt{2\pi\hbar}}}_{\Psi(z_0, t_a)} \exp\left\{\frac{i}{\hbar} S_{cl}(z_b t_b, z_0 t_a)\right\} \quad (4.55)$$

### Conclusion

Pour obtenir la fonction d'onde au point  $z_b$  à l'instant  $t_b$ , sachant qu'on est parti d'une onde plane d'impulsion  $p_0$  à l'instant  $t_a$ , on commence par déterminer la position  $z_0$  à l'instant  $t = t_a$  du chemin réel classique passant par  $z_b t_b$  et ayant une impulsion égale à  $p_0$  pour  $t = t_a$ . A une fonction de  $t_a$  et  $t_b$  près, on obtient alors  $\Psi(z_b, t_b)$  en multipliant  $\Psi(z_0, t_a)$  par l'exponentielle de  $i/\hbar$  fois l'action classique calculée le long du chemin réel reliant  $z_0 t_a$  à  $z_b t_b$ .

Dans des cours ultérieurs, nous verrons que le résultat obtenu en (4.55) peut être utilisé pour calculer simplement le déphasage dans un interféromètre atomique, même si l'état de l'atome incident n'est pas une simple onde plane comme en (4.51)

Remarque : L'expression (4.53) permet de calculer l'étendue du voisinage de  $z_0$  contribuant de manière significative à l'intégrale sur  $z_a$  de (4.45). En effet, le choix même de  $z_0$  entraîne que les termes linéaires en  $z_a$  dans les exponentielles de (4.51) et (4.53) se compensent. Reste le terme quadratique en  $(z_a - z_0)^2$  de (4.53) qui oscille très vite avec  $z_a - z_0$  dès que  $C(t_b, t_a)(z_a - z_0)^2/\hbar$  devient plus grand que 1. On en conclut que seuls les points situés à une distance de  $z_0$  inférieure à  $\delta z$  où

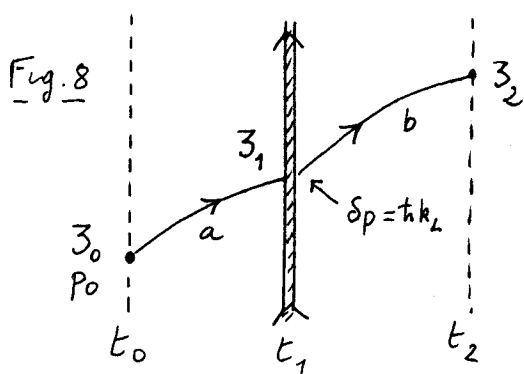
$$\delta z \approx \sqrt{\frac{\hbar}{K(t_b, t_a)}} \quad (4.56)$$

vont contribuer de manière importante. On peut dire encore que si  $|z'_0 - z_0| \ll \delta z$

$$e^{i p_0 z_0/\hbar} \exp\left\{\frac{i}{\hbar} S_d(z_b t_b, z_0 t_a)\right\} \approx e^{i p_0 z'_0/\hbar} \exp\left\{\frac{i}{\hbar} S_d(z_b t_b, z'_0 t_a)\right\} \quad (4.57)$$

#### d - Propagation en présence d'ondes laser progressives

- Nous généralisons maintenant la formule (4.54) au cas où la particule, dont le mouvement est toujours supposé décrit par un lagrangien quadratique, traverse une (ou plusieurs) onde laser progressive.
- Comme plus haut, l'état de la particule à l'instant initial  $t_0$  est une onde plane d'impulsion  $p_0$  (Fig. 8)



Considérons la trajectoire classique associée au chemin réel partant de  $z_0$  à  $t_0$  avec l'impulsion  $p_0$  (Fig. 8). Cette trajectoire traverse à l'instant  $t_1$  une onde laser, de fréquence  $\omega_L$ , de vecteur d'onde  $k_L$  et de phase  $\varphi$ . La traversée se faisant au point  $z_1$ . On suppose que l'atome, initialement dans l'état interne  $a$

absorbe un photon et passe dans l'état  $b$ , ce qui augmente en  $z_1$  son impulsion de  $\delta p = \hbar k_L$ . La trajectoire classique arrive enfin en  $z_2$  à l'instant  $t_2$ . Comment relier  $\psi_b(z_2, t_2)$  à  $\psi_a(z_0, t_0)$ ?

- La largeur de l'onde laser est supposée suffisamment faible pour qu'on puisse négliger l'effet des champs extérieurs ou inertiels pendant la durée  $\tau$  de la traversée. Pour passer de l'état de la particule à l'instant  $t_1^- < t_1$  à son état à  $t_1^+ > t_1$ , avec  $t_1 - t_1^- \gg \tau$  et  $t_1^+ - t_1 \gg \tau$  ( $t_1^+ - t_1^-$  étant cependant suffisamment faible pour qu'on puisse négliger l'effet des champs extérieurs et inertiels pendant  $t_1^+ - t_1^-$ ), on peut appliquer les résultats du cours II. Si l'état de la particule avant traversée est un état d'impulsion  $p$ , son état après traversée est un état d'impulsion  $p + \hbar k_L$ , multiplié par

$S_{ba} e^{-i(\omega_L t_1 + \varphi)}$ . Au voisinage du point  $3, t_1$  de la figure 8, la fonction d'onde après traversée s'obtient à partir de la fonction d'onde avant traversée par multiplication par le facteur  $\exp i[k_L z_1 - \omega_L t_1 - \varphi]$ .

- Dans tous les cas que nous étudierons par la suite, nous verrons que si l'état initial de la particule a une impulsion bien définie  $p_0$ , il reste ensuite état propre de  $P$  à tout instant ultérieur. L'état de la particule, avant et après traversée de l'onde laser, est donc toujours une onde plane, et on peut donc également appliquer le résultat (4.55) pour relier  $\psi_b(z_2, t_2)$  à  $\psi_b(z_1, t_1^+)$ . Nous remplacerons également les évolutions libres entre  $t_1^-$  et  $t_1$  et entre  $t_1$  et  $t_1^+$  (voir cours II) par les évolutions en présence des champs extérieurs et virtuels. Finalement, l'équation reliant  $\psi_b(z_2, t_2)$  à  $\psi_a(z_1, t_1)$  s'écrit

$$\begin{aligned} \psi_b(z_2, t_2) = & \left[ G(t_2, t_1) \exp \frac{i}{\hbar} S_d(z_2, t_2, z_1, t_1) \right] \times e^{-iE_b(t_2 - t_1)/\hbar} \\ & \times \left[ S_{ba} \exp i[k_L z_1 - \omega_L t_1 - \varphi] \right] \times \\ & e^{-iE_a(t_1 - t_0)/\hbar} \times \left[ G(t_1, t_0) \exp \frac{i}{\hbar} S_d(z_1, t_1, z_0, t_0) \right] \psi_a(z_0, t_0) \end{aligned} \quad (4.58)$$

où nous avons posé, pour simplifier l'écriture

$$G(t_2, t_1) = F(t_2, t_1) \sqrt{\frac{i\pi\hbar}{C(t_2, t_1)}} \quad (4.59)$$

Si la particule traverse l'onde laser sans changer d'état  $a$  (ou  $b$ ), il faut remplacer la 2<sup>ème</sup> ligne de (4.58) par  $S_{aa}$  (ou  $S_{bb}$ ). Si elle émet un photon et passe de  $b$  à  $a$ , il faut remplacer cette 2<sup>ème</sup> ligne par  $S_{ab} \exp \{-i[k_L z_1 - \omega_L t_1 - \varphi]\}$ .

- La formule (4.58) généralise donc celles utilisées jusqu'ici et basées sur la règle établie dans le cours II. Elle repose sur la forme simple du propagateur quantique pour des lagrangiens quadratiques, qui fait intervenir l'action calculée le long de la trajectoire classique du chemin réel. Son utilité apparaîtra dans les cours suivants.

- Tout le formalisme développé dans ce § 3 peut être étendu à des potentiels non quadratiques, mais variant suffisamment lentement avec  $z$  pour que les termes d'ordre supérieur à 2 dans le développement de  $V(z)$  aient un effet très petit. On peut ainsi retrouver les principaux résultats de l'approximation W.K.B.

### References

- (1) L. Landau et E. Lifschitz, Mécanique, 3<sup>ème</sup> édition, Editions Mir, Moscou (1969).
- (2) R.P. Feynman, Rev. Mod. Phys. 20, 367 (1948)
- (3) R.P. Feynman and A.R. Hibbs, Quantum Mechanics and Path Integrals, Mc Graw Hill, New York (1965)
- (4) C. Cohen-Tannoudji, Cours de 2<sup>ème</sup> année de 3<sup>ème</sup> cycle Polycopié (Paris, 1966). Notes de cours rédigées par S. Harsche.