

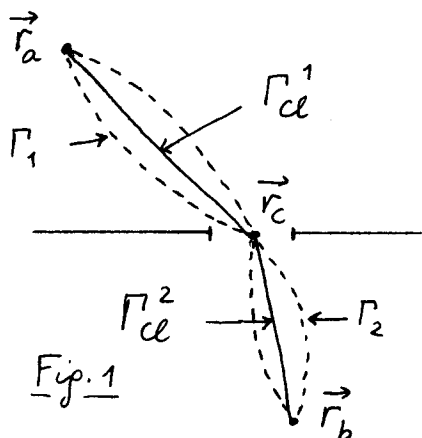
Diffraction d'ondes de de Broglie atomiques par des réseaux de fentes - Applications

Buts de ce cours

- Reprendre le problème de la diffraction d'une onde de de Broglie par une fente avec une méthode différente de celle suivie dans le cours 92-93. Au lieu de résoudre l'équation de Schrödinger, on calcule le propagateur de la particule par la méthode de Feynman.
- Analyser le fonctionnement des réseaux de transmissions pour ondes de de Broglie utilisant des réseaux de fentes et décrire des expériences récentes mettant en évidence des effets de diffraction.
- Décrire un interféromètre atomique réalisé au M.I.T. et utilisant 3 réseaux de transmissions.

① Diffraction par une fente - Approche de Feynman

Buts du calcul - Méthode suivie



- Une particule part à l'instant t_a d'un point $\vec{r}_a$ situé d'un certain côté d'une fente. On veut calculer l'amplitude de probabilité $K(\vec{r}_b t_b, \vec{r}_a t_a)$ de la retrouver à l'instant t_b en un point $\vec{r}_b$ de l'autre côté de la fente.
- Le Lagrangien est supposé quadratique en $\vec{r}$ et $\dot{\vec{r}}$ (par exemple, particule libre, dans un champ de pesanteur ou dans un référentiel tournant).
- On considère tous les chemins possibles, réels ou non, passant par un point $\vec{r}_c$ du plan de la fente à l'instant t_c et on étudie leur contribution à $K(b, a)$ dans l'intégrale de Feynman (1.2)

- On somme ensuite sur tous les instants t_c et sur tous les points $\vec{r}_c$ possibles dans le plan de la fente.

Contribution au propagateur des chemins passant par $\vec{r}_c t_c$

- Γ_1 chemin quelconque reliant $\vec{r}_a t_a$ à $\vec{r}_c t_c$ - Action S_{Γ_1} le long de Γ_1
- Γ_2 " " " " $\vec{r}_c t_c$ à $\vec{r}_b t_b$ - " S_{Γ_2} " " " Γ_2

D'après (1.2), on a, N étant une constante de normalisation :

$$K(\vec{r}_b t_b, \vec{r}_a t_a) = N \int d^2 r_c \int dt_c \sum_{\Gamma_1 \Gamma_2} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} (S_{\Gamma_1} + S_{\Gamma_2}) \right\} \quad (2.1)$$

- Commençons par calculer

$$\sum_{\Gamma_1 \Gamma_2} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} (S_{\Gamma_1} + S_{\Gamma_2}) \right\} = \left(\sum_{\Gamma_1} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} S_{\Gamma_1} \right\} \right) \left(\sum_{\Gamma_2} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} S_{\Gamma_2} \right\} \right) \quad (2.2)$$

Comme le Lagrangien est supposé quadratique en $\vec{r}, \dot{\vec{r}}$, on peut utiliser (1.12) pour calculer les sommes sur Γ_1 et Γ_2 de (2.2)

$$\sum_{\Gamma_1} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} S_{\Gamma_1} \right\} \sim \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} S_{cl}(\vec{r}_c t_c, \vec{r}_a t_a) \right\} \quad \sum_{\Gamma_2} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} S_{\Gamma_2} \right\} \sim \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} S_{cl}(\vec{r}_b t_b, \vec{r}_c t_c) \right\} \quad (2.3)$$

où $S_{cl}(\vec{r}_c t_c, \vec{r}_a t_a)$ est l'action classique calculée le long du chemin réel Γ_{cl}^1 reliant $\vec{r}_a t_a$ à $\vec{r}_c t_c$ - Idem pour $S_{cl}(\vec{r}_b t_b, \vec{r}_c t_c)$ (Traits pleins de la Fig. 1)

Finalement,

$$\sum_{\vec{r}_1 \vec{r}_2} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} (S_{\vec{r}_1} + S_{\vec{r}_2}) \right\} \sim \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} [S_{cl}(\vec{r}_b t_b, \vec{r}_c t_c) + S_{cl}(\vec{r}_c t_c, \vec{r}_a t_a)] \right\} \quad (2.4)$$

Intégrale sur t_c

- D'après (1.6.a) et (1.6.b),

$$\frac{\partial}{\partial t_c} S_{cl}(\vec{r}_c t_c, \vec{r}_a t_a) = -H_c^1 \quad (2.5.a) \quad \frac{\partial}{\partial t_c} S_{cl}(\vec{r}_b t_b, \vec{r}_c t_c) = H_c^2 \quad (2.5.b)$$

où H_c^1 (H_c^2) sont les Hamiltoniens à l'extrémité $\vec{r}_c$ de Γ_{cl}^1 (Γ_{cl}^2).

- En appelant

$$J(\vec{r}_c, t_c) = S_{cl}(\vec{r}_b t_b, \vec{r}_c t_c) + S_{cl}(\vec{r}_c t_c, \vec{r}_a t_a) \quad (2.6)$$

la somme qui apparaît dans la 2^{ème} exponentielle de (2.4), on obtient alors, compte tenu de (2.5)

$$J(\vec{r}_c, t_c + dt_c) = J(\vec{r}_c, t_c) + (H_c^2 - H_c^1) dt_c + \dots \quad (2.7)$$

- Nous supposons que les actions intervenant dans le problème sont très grandes devant $\hbar$. L'exponentielle $\exp \left\{ \frac{i}{\hbar} (H_c^2 - H_c^1) dt_c \right\}$ va donc osciller très vite avec dt_c et son intégrale sur dt_c va donner un résultat nul sauf si t_c est tel que

$$H_c^2 = H_c^1 \quad (2.8)$$

Ne vont donc contribuer de façon appréciable dans l'intégrale temporelle que les trajectoires classiques $\vec{r}_a t_a \rightarrow \vec{r}_c t_c \rightarrow \vec{r}_b t_b$ telles que l'énergie ne change pas quand on passe en $\vec{r}_c t_c$ de Γ_{cl}^1 à Γ_{cl}^2 . Si le mouvement est à énergie constante (L indépendant de t), l'énergie est donc constante tout au long de $\Gamma_{cl}^1 + \Gamma_{cl}^2$.

Intégrale sur $\vec{r}_c$

- Supposons donc t_c choisi de manière que l'égalité (2.8) soit satisfaite et prenons $\vec{r}_c$ au milieu de la fente. D'après (1.5.a) et (1.5.b)

$$\frac{\partial}{\partial \vec{r}_c} S_{cl}(\vec{r}_c t_c, \vec{r}_a t_a) = \vec{p}_c^1 = \hbar \vec{k}_c^1 \quad (2.9.a) \quad \frac{\partial}{\partial \vec{r}_c} S_{cl}(\vec{r}_b t_b, \vec{r}_c t_c) = -\vec{p}_c^2 = -\hbar \vec{k}_c^2 \quad (2.9.b)$$

où $\vec{k}_c^1$ ($\vec{k}_c^2$) est le vecteur d'onde de la particule à l'extrémité $\vec{r}_c$ de Γ_{cl}^1 (Γ_{cl}^2).

- On en déduit

$$J(\vec{r}_c + \vec{\xi}, t_c) = J(\vec{r}_c, t_c) + \hbar (\vec{k}_c^1 - \vec{k}_c^2) \cdot \vec{\xi} + \dots \quad (2.10)$$

En général, il n'y a aucune raison pour que $\vec{k}_c^1$ et $\vec{k}_c^2$ soient égaux, si $\vec{r}_a$ et $\vec{r}_b$ ne peuvent être reliés par une ligne droite passant par la fente. L'intégrale dans le plan de la fente de l'exponentielle du dernier terme de (2.10) fait apparaître la transformée de Fourier spatiale de la fente à la "fréquence" $\vec{k}_c^1 - \vec{k}_c^2$ correspondant au changement de vecteur d'onde de la particule quand elle traverse la fente le long du chemin classique $\vec{r}_a \rightarrow \vec{r}_c \rightarrow \vec{r}_b$. Finalement, on a :

$$K(\vec{r}_b t_b, \vec{r}_a t_a) \sim \underbrace{\exp \left\{ \frac{i}{\hbar} [S_{cl}(\vec{r}_b t_b, \vec{r}_c t_c) + S_{cl}(\vec{r}_c t_c, \vec{r}_a t_a)] \right\}}_{\text{avec } t_c \text{ tel que } E_c^2 = E_c^1} \times \int_{\text{fente}} e^{i(\vec{k}_c^1 - \vec{k}_c^2) \cdot \vec{\xi}} d^2 \xi \quad (2.11)$$

Le 1^{er} terme de (2.11) est le facteur de phase dû à la propagation le long du chemin classique d'énergie constante $\vec{r}_a t_a \rightarrow \vec{r}_c t_c \rightarrow \vec{r}_b t_b$. Le 2^{ème} terme de (2.11) décrit le phénomène de diffraction et peut être interprété comme l'amplitude de probabilité pour que la particule change de direction ($\vec{k}_c^1 \rightarrow \vec{k}_c^2$) quand elle traverse la fente.

Intégrale sur la fonction d'onde initiale

D'après (1.18), il faut, pour avoir la fonction d'onde $\psi(\vec{r}_b, t_b)$ calculer l'intégrale $\int d^3r_a \psi(\vec{r}_a, t_a) K(\vec{r}_b t_b, \vec{r}_a t_a)$. Comme dans le cours I précédent, et si l'état initial est une onde plane $\vec{p}_0$, cette intégrale va privilégier les points de phase stationnaire, c-à-d. tels que la trajectoire classique (à énergie constante) $\vec{r}_a t_a \rightarrow \vec{r}_c t_c \rightarrow \vec{r}_b t_b$ ait l'impulsion $\vec{p}_0$ en $\vec{r}_a t_a$.

Récapitulation

Pour avoir la fonction d'onde en $\vec{r}_b t_b$, il faut donc déterminer le point $\vec{r}_a t_a$ tel que la trajectoire classique d'énergie constante $\vec{r}_a t_a \rightarrow \vec{r}_c t_c \rightarrow \vec{r}_b t_b$ ait l'impulsion $\vec{p}_0$ en t_a . Le déphasage entre $\psi(\vec{r}_b t_b)$ et $\psi(\vec{r}_a t_a)$ est alors donné par l'argument de (2.11)

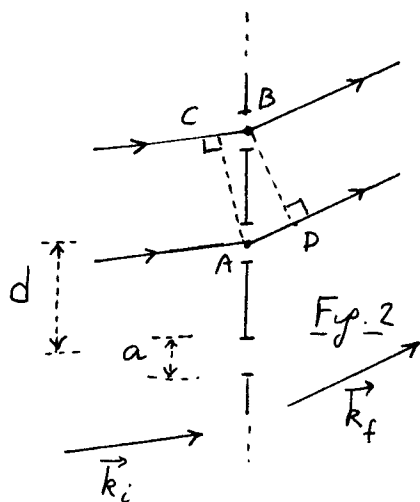
Comme $S_{cl} = \int (\vec{p} \cdot d\vec{r} - E dt)$ (voir Eq. (1.7)) et que E est constant $-\int E dt$ se réduit à $E(t_b - t_a)$. La contribution au déphasage due à la propagation et provenant de l'intégrale sur $\vec{r}$ vaut alors $\int_{\Gamma_{cl}} \frac{\vec{p} \cdot d\vec{r}}{\hbar} = \int_{\Gamma_{cl}} \frac{ds}{\lambda_{DB}}$ où ds est l'élément de longueur sur la trajectoire classique. Pour une particule libre λ_{DB} est indépendant de $\vec{r}$ (analogue avec une propagation optique dans le vide). Pour une particule dans un potentiel, la trajectoire classique n'est plus formée de lignes droites et λ_{DB} dépend de $\vec{r}$ (analogue avec une propagation optique dans un milieu d'indice variable).

② Diffraction par un réseau de fentes

Angles de diffraction

Calcul très analogue à celui des réseaux optiques

Réseau périodique de fentes de largeur a séparées par une distance d (Fig. 2)



$$|\vec{k}_i| = |\vec{k}_f| = k = \frac{2\pi}{\lambda_{DB}} \quad (2.12)$$

- Différence de marche entre 2 trajectoires passant par 2 fentes successives : $AD - BC$

$$\vec{AB} = \vec{d} \quad \vec{k}_f - \vec{k}_i = \vec{K} \quad (2.13)$$

$$AD - BC = \frac{(\vec{k}_f - \vec{k}_i) \cdot \vec{d}}{k} = \frac{\vec{K} \cdot \vec{d}}{k} \quad (2.14)$$

- Condition d'interférence constructive

$$AD - BC = n \lambda_{DB} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots \quad (2.15)$$

$$\hookrightarrow \vec{K} \cdot \vec{d} = 2n\pi \quad n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots \quad (2.16)$$

- Pour des incidences quasi-normales et pour des angles θ_n petits entre $\vec{k}_f$ et $\vec{k}_i$ ($\lambda_{DB} \ll d$)

$$\vec{K} \cdot \vec{d} \approx |\vec{K}| d \approx \theta_n k d = 2\pi \theta_n d / \lambda_{DB} \quad (2.17)$$

de sorte que (2.16) devient

$$\theta_n = n \lambda_{DB} / d \quad n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots \quad (2.18)$$

L'onde plane incidente est transformée en plusieurs ondes planes cohérentes entre elles et de directions différentes ("division d'amplitude").

Discussion physique

- Avantages

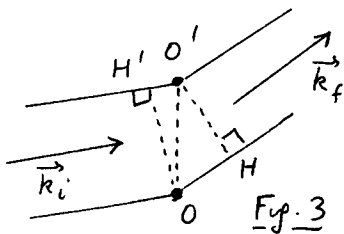
- Souplesse d'emploi : Structure qui fonctionne pour tout atome et toute molécule (ne nécessite pas l'excitation quasi-résonnante d'une raie atomique, comme la diffraction par une onde stationnaire)
- Angles de diffraction plus grands que pour la diffraction par une onde stationnaire : d peut être aussi petit que $0.1 \mu\text{m}$ (voir Ref. 2) alors que pour une onde stationnaire optique, $d \approx \lambda \approx 0.5 \mu\text{m}$.

- Inconvénients

- Perte d'atomes (coefficients de transmission ~ 0.3)
- Peu d'atomes dans le 1^{er} ordre de diffraction
- Dispersion très élevée : Θ_n dépend de λ_{DB} donc de l'énergie incidente. Nécessité de jets mono-énergétiques.

Effet d'une translation du réseau

(Calcul utile pour l'analyse de l'expérience décrite plus loin - § 4)



- Le réseau est traduit perpendiculairement à la direction des fentes. Une fente donnée passe de O à O' avec

$$\vec{OO'} = \vec{p} \quad (2.19)$$

- L'onde diffractée $\vec{k}_f$ (avec $\vec{k} = \vec{k}_f - \vec{k}_i$ satisfaisant (2.16)) prend une avance (calcul analogue à (2.14)) :

$$OH - OH' = \vec{k} \cdot \vec{p} / k \quad (2.20)$$

- Comme l'effet est le même pour toutes les fentes, l'onde diffractée dans la direction $\vec{k}_f$ est multipliée par le facteur de phase

$$e^{-2\pi i (OH - OH') / \lambda_{DB}} = e^{-i \vec{k} \cdot \vec{p}} \quad (2.21)$$

On vérifie bien que si $\vec{p} = \vec{d}$, ce facteur de phase vaut 1, compte tenu de (2.16) : le réseau est invariant dans une translation d

Etude expérimentale : réalisée par 2 groupes, l'un au M.I.T (Refs 1, 2) sur le sodium, l'autre à Constance (Ref. 3) sur l'hélium métastable.

- Fabrication des microstructures (réseaux de fentes) par des méthodes lithographiques (voir Refs 1, 2, 3 et refs in).

Feuille d'or d'épaisseur $0.5 \mu\text{m}$ (MIT) ou $0.1 \mu\text{m}$ (Constance) avec des espacements de fentes $d = 0.2 \mu\text{m}$ ou $0.1 \mu\text{m}$ (MIT) ou $0.5 \mu\text{m}$ (Constance)

- Exemple de montage expérimental

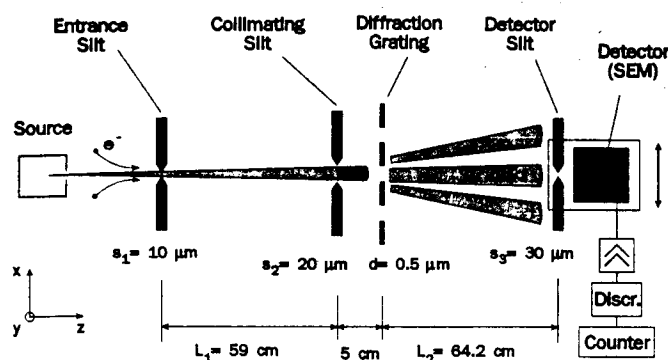
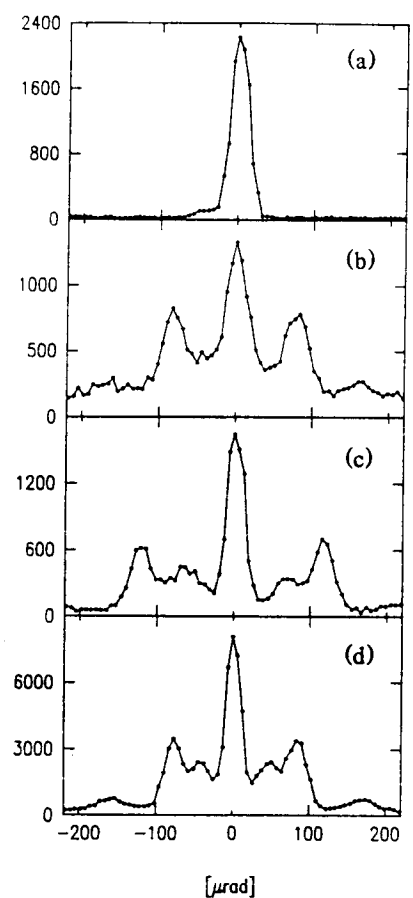
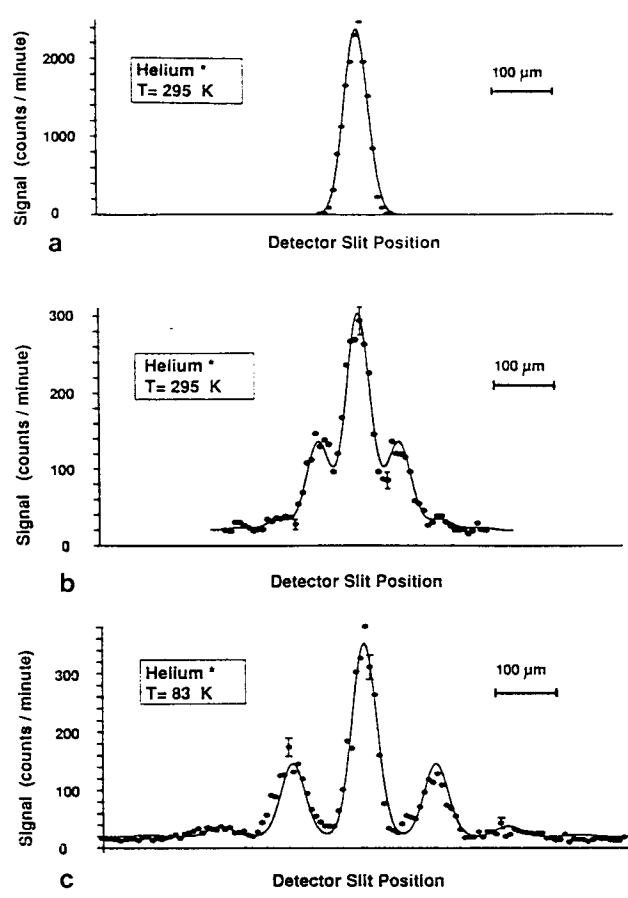


Fig. 4
(Extrait de [3])

- Exemple de résultats expérimentaux



Experimental profile of the Na beam. The y axes are the number of detected atoms; the counting time at each point is ~ 1 sec. The line through the points is only for visual effect. As explained in the text, (a) is the undiffracted beam, and (b)-(d) show the beam diffracted by transmission through the grating. In (c) the carrier gas is Xe, in the other cases it is Ar.



Experimental data. a Intensity distribution of the undiffracted beam in the detector plane, b diffraction pattern at a nozzle temperature $T = 295$ K ($\lambda_{dB} = 0.56$ Å), c diffraction pattern at $T = 83$ K ($\lambda_{dB} = 1.03$ Å)

Fig. 6 (extraite de [3])

Fig. 5 (extraite de [1]). Dans la courbe c, le gaz utilisé dans la détente supersonique pour entraîner Na est Xe, plus lourd que Ar, donc plus lent. La vitesse de Na est donc plus faible, donc λ_{dB} est plus grand et l'angle de diffraction θ , plus important. Les sous-structures apparaissant en (c) et (d) sont dues à des diffracts du réseau.

③ 1^{ère} application : Focalisation d'atomes par une lentille de Fresnel

Principe

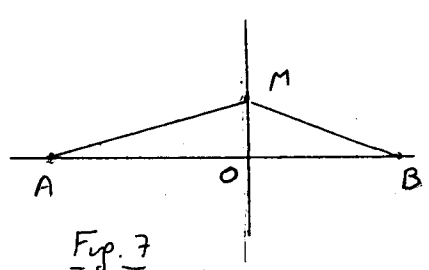


Fig. 7

- Plan $\perp$ en O à la droite AB. (Fig. 7)
- Pour OM petit, la différence de marche entre le trajet AMB et le trajet AOB varie en z^2 , où $z = OM$
- En fonction de z , $\cos\{2\pi(AMB-AOB)/\lambda\}$ va donc varier comme $\cos Az^2$ et va avoir des signes alternativement > 0 et < 0 dans des "zones de Fresnel" de rayon croissant comme $\sqrt{n}$
- Si on ne laisse passer les atomes que dans les zones de Fresnel correspondant à un signe donné, l'interférence va être constructive en B. On peut montrer alors que le système se comporte comme une lentille
- Intérêt en optique atomique : λ_{dB} très petit, donc focalisation très efficace, à condition toutefois d'avoir un jet très monocinétique.

Etude expérimentale : réalisée par 2 groupes, l'un à Constance sur l'hélium métastable (Ref. 4) avec des zones de Fresnel circulaires (équivalent d'une lentille sphérique), l'autre au M.I.T. sur le sodium (Ref. 2) avec des fentes de Fresnel verticales (équivalent d'une lentille cylindrique)

- Exemple de lentille de Fresnel (Fig. 8 - extraite de [4])

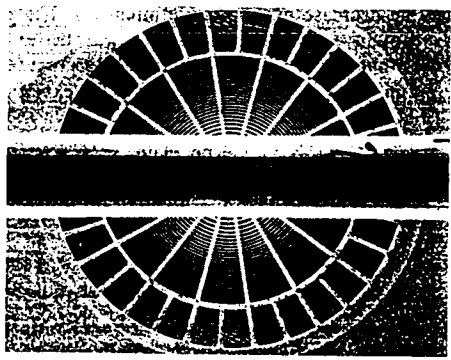


Fig. 8

A scanning electron microscope picture of the zone plate. The wire, 50 μm in diameter, blocks out the zeroth order to increase the contrast in the center of the image plane.

- Exemple de dispositif expérimental (Fig. 9 - Extraite de [4])

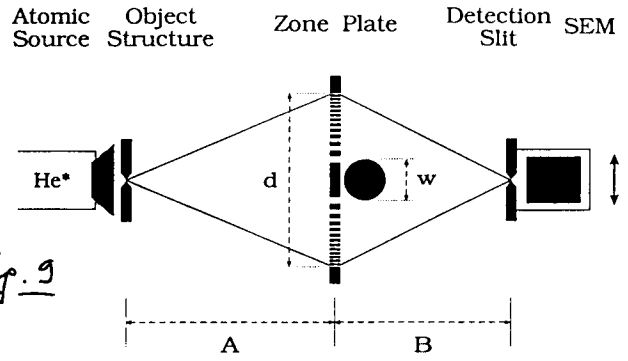


Fig. 9

A schematic of the experimental setup; the dimensions are $A=0.96\text{ m}$ and $B=0.84\text{ m}$, $d=210\text{ }\mu\text{m}$, wire diameter $w=50\text{ }\mu\text{m}$.

- Exemple de résultats expérimentaux (Fig. 10 - Extraite de [4])

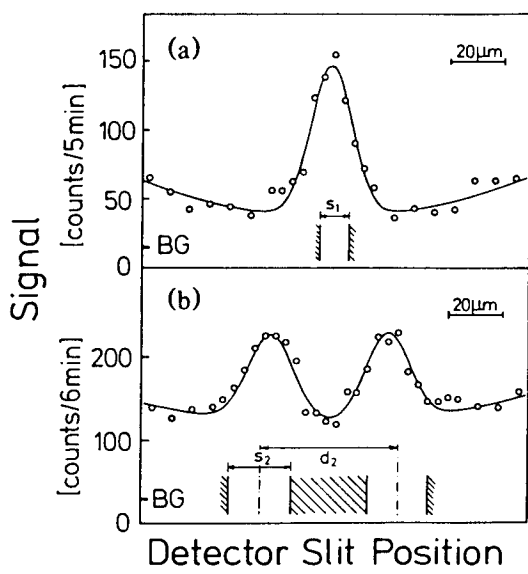


Fig. 10

Image of a single slit (a) and a double slit (b) at $T=20.5\text{ K}$. The dots represent the experimental data and the solid line is a fit through the data points. The slit dimensions, as shown in the insets, are $s_1=10\text{ }\mu\text{m}$ for the single slit and $d_2=49\text{ }\mu\text{m}$ and $s_2=22\text{ }\mu\text{m}$ for the double slit. BG denotes the detector background level. The two insets give the dimensions of the corresponding object structures (to scale).

④ 2^{ème} Application - Interféromètre atomique

Schéma de principe

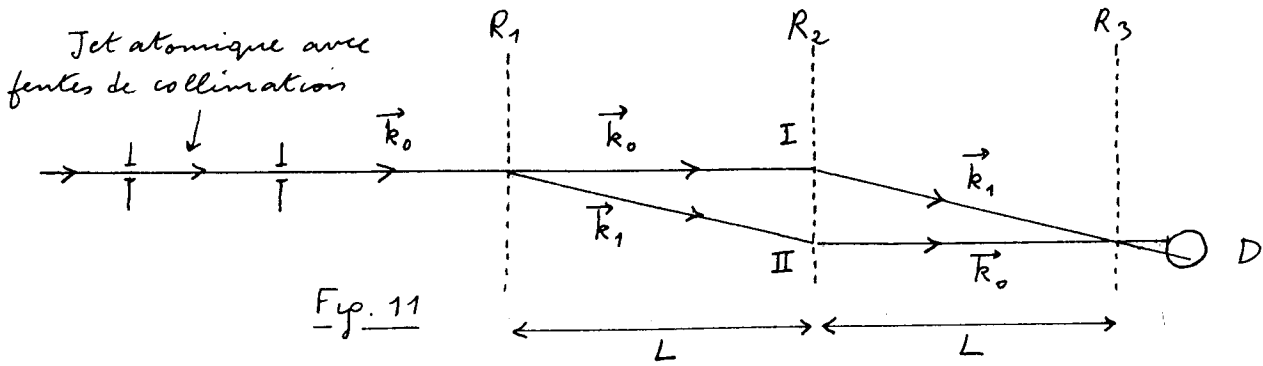


Fig. 11

- 3 réseaux équidistants R_1, R_2, R_3 , à une distance L l'un de l'autre avec des fentes de même espacement d .
- 2 chemins possibles I et II
 - I : Diffraction d'ordre 0 sur R_1 , puis d'ordre 1 sur R_2
 - II : Diffraction d'ordre 1 sur R_1 , puis d'ordre -1 sur R_2
- Les 2 ondes arrivant sur R_3 interfèrent et donnent des franges d'interférence, d'espacement d . Les atomes qui traversent R_3 sont détectés par un détecteur à fil chaud placé juste après R_3 . R_3 avec ses fentes d'espacement d sert de masque périodique pour observer le système de franges d'interférence d .
- On translate R_2 dans son plan perpendiculairement aux fentes. Vecteur déplacement $\vec{p}$. D'après (2.21), les 2 ondes arrivant sur R_2 subissent des déphasages valant, respectivement, $\exp\{-i(\vec{k}_1 - \vec{k}_0) \cdot \vec{p}\}$ pour I, $\exp\{-i(\vec{k}_0 - \vec{k}_1) \cdot \vec{p}\}$ pour II. Ces déphasages étant différents, le système de franges d'interférence sur R_3 se déplace et le signal enregistré par D présente des oscillations.

Propriétés importantes

- Système achromatique.
Une dispersion en énergie des atomes incidents ne brouille pas la frange centrale de l'oscillation détectée en D. Les 2 chemins I et II ont même longueur, quelle que soit l'énergie.
- Avec des valeurs suffisamment faibles de d et suffisamment grandes de L , la séparation des 2 faisceaux au niveau de R_2 peut être supérieure à la largeur des faisceaux, ce qui permet d'insérer une cloison (septum) entre les 2 faisceaux au niveau de R_2 , de manière à perturber ensuite les atomes sur l'un des 2 chemins et à détecter cette perturbation par un déplacement des franges.

Etude expérimentale

- Réalisé au M.I.T.
sur le Sodium
1^{re} publication (Ref [5])
Amélioration de l'expérience [6].
- Montage expérimental
Fig. 12 (extraite de [6])
- Nécessité d'avoir des réseaux parfaits sur des distances (de l'ordre de la séparation des faisceaux sur R_2) beaucoup plus grandes que pour les expériences de diffraction simple.

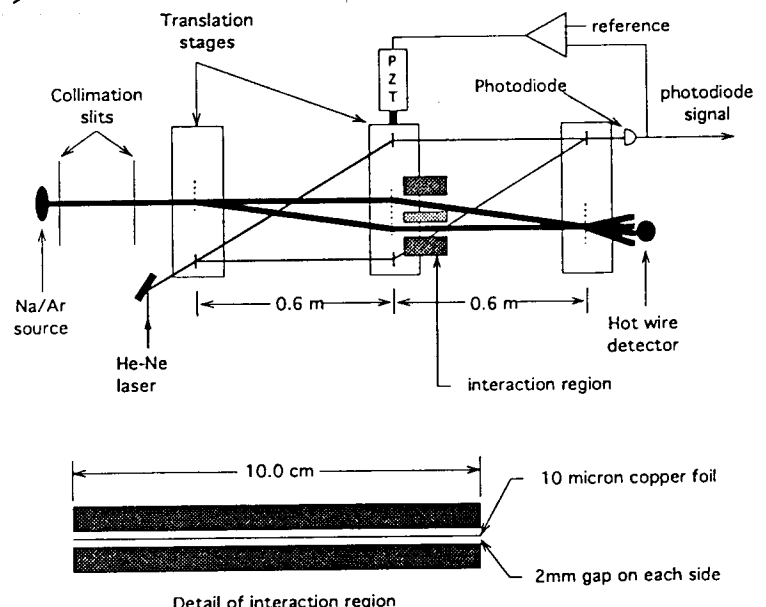


Fig. 12 (extraite de [6])

A schematic, not to scale, of our atom interferometer. The 10 μm copper foil is between the two arms of the interferometer (thick lines are atom beams). The optical interferometer (thin lines are laser beams) measures the relative position of the 200 nm period atom gratings (which are indicated by vertical dashed lines).

- Nécessité d'avoir des jointes // sur R_1, R_2, R_3 et de contrôler précisément les positions relatives de R_1, R_2, R_3 . Un interféromètre optique, construit sur les mêmes plaques que l'interféromètre atomique, permet une stabilisation active du montage.
- Dans l'expérience décrite dans [6], $d = 200 \text{ nm}$, la largeur des faisceaux atomiques $20 \mu\text{m}$, la séparation entre les 2 faisceaux au niveau de R_2 $55 \mu\text{m}$, soit près de 3 fois le diamètre de chaque faisceau, ce qui permet d'insérer une cloison entre les 2 faisceaux, et de les faire donc passer dans des régions bien séparées.
- Exemple de résultats expérimentaux

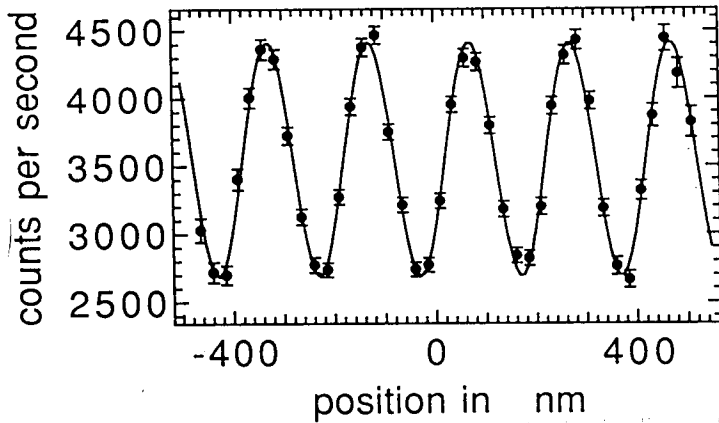


Fig. 13 (extraite de [6])

1 seconde par point

Incertitude sur la phase
 $17 \mu\text{rad}$

Un fond de 200 coups/sec
a été soustrait

Applications

- Mesure de la polarisabilité statique de l'état fondamental de l'atome de Na obtenue en appliquant un champ électrique statique sur l'un des 2 côtés de la cloison, et en mesurant le déphasage des franges résultant de ce champ.
- Mesure de la partie réelle de l'amplitude de diffusion vers l'avant lors de collisions avec un gaz rare introduit dans l'une des 2 régions séparées par la cloison. Cette amplitude est à l'origine de l'apparition d'un déphasage sur le chemin correspondant et déplace les franges.

Références

- [1] D.W. Keith, M.L. Shattenburg, Henry I. Smith, D.E. Pritchard
Phys. Rev. Lett. 61, 1580 (1988)
- [2] C.R. Ekstrom, D.W. Keith, D.E. Pritchard
Appl. Phys. B54, 369 (1992)
- [3] O. Carnal, A. Faulstich, J. Mlynek, Appl. Phys. B54, 88 (1991)
- [4] O. Carnal, M. Sigel, T. Sleator, H. Takuma, J. Mlynek
Phys. Rev. Lett. 67, 3231 (1991)
- [5] D.W. Keith, C.R. Ekstrom, P.A. Turchette, D.E. Pritchard
Phys. Rev. Lett. 66, 2693 (1991)
- [6] D.E. Pritchard, in Atomic Physics 13, Proc. 13th Int. Conf. on Atomic Physics, 1992, ed. by H. Walther, T.W. Hänsch, B. Neizert (A.I.P. New York, 1993).