

Buts de ce cours

- Introduire l'effet Aharonov-Bohm scalaire (relatif à des particules chargées interagissant avec un potentiel scalaire), et dégager ses propriétés physiques essentielles.
- Montrer que l'effet Aharonov-Bohm scalaire (ABS) est essentiel pour préserver la cohérence interne de la mécanique quantique. En effet, sans le déphasage associé à l'effet ABS, on pourrait imaginer des dispositifs expérimentaux permettant, dans une expérience d'interférométrie sur des particules chargées, de déterminer par quel chemin la particule passe sans perturber le système de franges.
- Décrire des expériences récentes réalisées sur des systèmes neutres possédant un moment magnétique (neutrons, atomes), où l'on retrouve certaines des propriétés importantes de l'effet ABS.

① Description de l'effet ABS (Refs [1], [2])

a) Problème physique considéré

- Paquet d'ondes de de Broglie arrivant sur une plaque P percée de 2 fentes S' et S'' et associé à une particule incidente de charge e .
- Après les 2 fentes, 2 paquets d'ondes légèrement divergents (diffraction) et qui vont finir par se recouvrir et donner naissance à un système de franges d'interférence

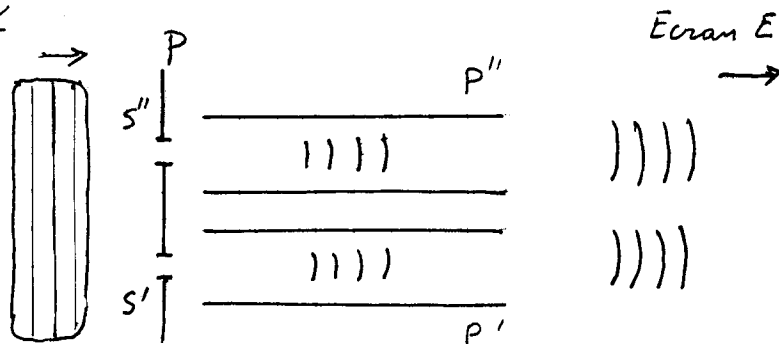


Fig.1 (utilisant les notations de la référence [2])

Sur un écran E placé suffisamment loin à droite.

- Juste après les 2 fentes, on place 2 cylindres conducteurs P'' et P' , à l'intérieur desquels passent les 2 paquets d'ondes issus de S'' et S' . On suppose les cylindres suffisamment longs pour que, pendant un certain intervalle de temps, les 2 paquets d'ondes issus de S' et S'' soient bien localisés au milieu de P' et P'' et bien éloignés des bords.
- Quand les paquets d'ondes entrent dans P' et P'' et quittent P' et P'' , P' et P'' et la plaque P sont tous au même potentiel, de sorte que la particule ne "voit" aucun champ électrique et aucune différence de potentiel.
- Quand les 2 paquets d'ondes sont arrivés bien au milieu de P' et P'' , on applique pendant un temps T une différence de potentiel entre P' et P'' . Par exemple P' est au potentiel 0, P'' au potentiel V . T est suffisamment court pour que les 2 paquets d'ondes restent éloignés des bords pendant T .
- Questions : Y a-t-il des modifications du système de franges observé sur E ? Comment ces modifications dépendent-elles de V et T ?

b) Calcul du déphasage

- A l'intérieur des cylindres, le potentiel est constant et le champ électrique est strictement nul. Aucune force n'agit donc sur les paquets d'ondes, aussi bien dans P' que P'' , pourvu que V soit appliqué au moment où les paquets d'ondes sont au milieu de P' et P'' . Donc l'impulsion $\vec{p}$ de la particule ne change pas et $\int \vec{p} \cdot d\vec{r}$ garde la même valeur le long des 2 chemins, que V soit nul ou non.
- Par contre, il faut, pour le chemin passant par P'' , ajouter à l'hamiltonien H l'énergie électrostatique eV , ce qui fait apparaître pour ce chemin un déphasage qui n'existe pas pour le chemin passant par P' et qui vaut

$$\Phi_{ABS} = -\frac{1}{\hbar} \int H dt = -\frac{1}{\hbar} eV T \quad (8.1)$$

Le système de franges observé sur l'écran E doit donc se déplacer d'un nombre de franges égal à $\Phi_{ABS} / 2\pi$.

② Propriétés physiques importantes d'un tel effet(i) Aucun déplacement, aucune distorsion des paquets d'ondes.

Aussi bien dans P' que dans P'' , la particule ne "voit" aucun champ électrique et ne ressent aucune force pendant le temps T d'application de V .

(ii) Facteur de phase global acquis par le paquet d'ondes soumis à V , indépendant de la vitesse.

- Les différents vecteurs d'onde du paquet d'ondes acquièrent le même facteur de phase (on suppose bien sûr que la vitesse est suffisamment faible pour que le paquet d'ondes reste au voisinage du milieu de P'' pendant T).
- Nature topologique de l'effet.
- Pour mettre en évidence un tel facteur de phase global, il faut nécessairement une expérience d'interférence, où l'on compare la phase globale du paquet d'ondes passant par P'' avec celle de l'autre paquet d'ondes qui n'a pas subi l'effet de V .

(iii) Insensibilité de l'effet d'interférence à la longueur de cohérence du paquet d'ondes.

- Comme le potentiel V appliqué pendant le temps T ne produit aucun déplacement et aucune distorsion du paquet d'ondes passant par P'' , le recouvrement avec l'autre paquet d'ondes parti par P' sera toujours parfait quand les 2 paquets d'ondes se rejoignent. L'état d'interférence sera déterminé uniquement par le facteur de phase global acquis par le paquet d'ondes parti par P'' .

- En particulier, Φ_{ABS} peut être beaucoup plus élevé que le déphasage maximal pouvant être observé dans une expérience ordinaire d'interférence, où l'on décale un paquet d'ondes par

rapport à l'autre et où les franges disparaissent dès que le déplacement d'un paquet d'ondes par rapport à l'autre devient supérieur à la longueur de cohérence (l'intégrale de recouvrement est alors nulle).

- (iv) Différence importante entre l'expérience décrite ici et celle qui utiliserait un potentiel V constant appliqué en permanence à P'' . Le paquet d'ondes arrivant dans P'' "verrait" alors une barrière ou un puits de potentiel, et serait retardé ou avancé par rapport à l'autre paquet d'ondes passant dans P' . Les franges d'interférence observables sur E se déplaceraient bien alors quand V augmente, mais leur contraste diminuerait également et elles disparaîtraient dès que V a atteint une valeur telle que le décalage entre les 2 paquets d'ondes est supérieur à leur longueur de cohérence. Par contre, pour l'effet ABS, le contraste des franges demeure le même quel que soit V .

En résumé, l'effet ABS se caractérise par le fait qu'il n'est pas dispersif et qu'il donne naissance à des effets d'interférence insensibles à la longueur de cohérence. Les mêmes remarques peuvent être faites pour l'effet Aharonov-Bohm vectoriel ABV (sensible au potentiel vecteur), qui sera étudié dans le cours IX.

③ Effet Aharonov-Bohm scalaire et complémentarité (Ref. [2])

a) Idee générale

Le schéma expérimental de la figure 1 suggère une expérience de pensée où l'on essaierait de mettre en évidence simultanément les aspects ondulatoire et corpusculaire de la particule incidente.

Au lieu d'appliquer pendant un temps T un voltage V à P'' , pourrait-on essayer d'utiliser les charges induites par les paquets d'ondes au milieu d'un cylindre ou de l'autre pour essayer de déterminer dans quel cylindre la particule se trouve ? Si l'on pense que les potentiels sont simplement des intermédiaires de calcul et que seuls les champs sont physiques, la particule ne devrait pas être perturbée par le dispositif mesurant la charge qu'elle induit puisque la particule ne "voit" aucun champ dans les cylindres. Ne pourrait-on pas alors savoir par quel cylindre la particule passe sans perturber le système de franges d'interférence sur E .

En fait, on va voir qu'un tel raisonnement est incorrect. Le dispositif permettant de mesurer la charge induite par la particule et de savoir par quel cylindre elle passe introduit une différence de potentiel V entre les 2 cylindres dont les fluctuations ΔV sont telles que les fluctuations correspondantes $\Delta \Phi_{ABS}$ du déphasage Φ_{ABS} brouillent complètement le système de franges. En

d'autres termes, les potentiels jouent un rôle physique important en mécanique quantique et le déphasage ϕ_{ABS} associé au potentiel scalaire est essentiel pour assurer la cohérence interne de la théorie.

b) Un résultat d'électrostatique utile pour la suite

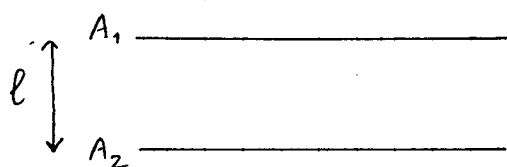


Fig. 2a

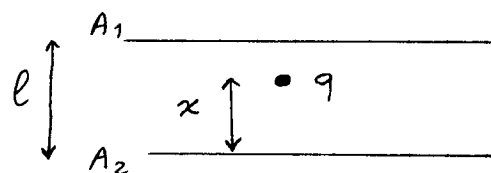


Fig. 2b

Condensateur, de capacité C , formé de 2 armatures A_1 et A_2 (suffisamment grandes), séparées par une distance l . Aucune charge sur A_1 et sur A_2 , différence de potentiel nulle (Fig. 2a)

Une charge q est introduite entre A_1 et A_2 , à une distance x de A_2 (Fig. 2b). La présence de cette charge fait apparaître une différence de potentiel entre A_1 et A_2 . On trouve (voir Appendice) :

$$V_1 - V_2 = \frac{q}{C} \left(\frac{x}{l} - \frac{1}{2} \right) \quad (8.2)$$

$V_1 - V_2$ est nulle quand q est à égale distance de A_1 et A_2 ($x = l/2$)

c) Schéma de l'expérience de pensée

- On revient au schéma de la figure 1, mais on relie maintenant les 2 cylindres P' et P'' aux 2 armatures A_1 et A_2 du condensateur de la figure 2. (Fig. 3)

- Supposons tout d'abord qu'il n'y a pas de charge test q entre A_1 et A_2 .

Si la particule incidente, de charge e , passe dans P' , elle va, lorsqu'elle se trouve au milieu de P' , induire une charge $-e$ à l'intérieur de P' . Comme l'ensemble $P' + A_1$ est isolé et initialement non chargé, une charge $+e$ va apparaître sur A_1 . Quant à P'' , il ne subit aucune influence et la charge de A_2 est nulle. Il va donc apparaître entre A_1 et A_2 une différence de potentiel

$$V_1 - V_2 = \frac{e}{2C} \quad (8.3)$$

(Superposition de 2 états d'équilibre : état (1) avec des charges $e/2$ sur A_1 et A_2 conduisant à $V_1 - V_2 = 0$ + état (2) avec une charge $e/2$ sur A_1 , $-e/2$ sur A_2 conduisant à (8.3), les charges dans l'état (1)+(2) sont $e/2 + e/2 = e$ sur A_1 , $e/2 - e/2 = 0$ sur A_2)

les mêmes raisonnements montrent que, si la particule passe

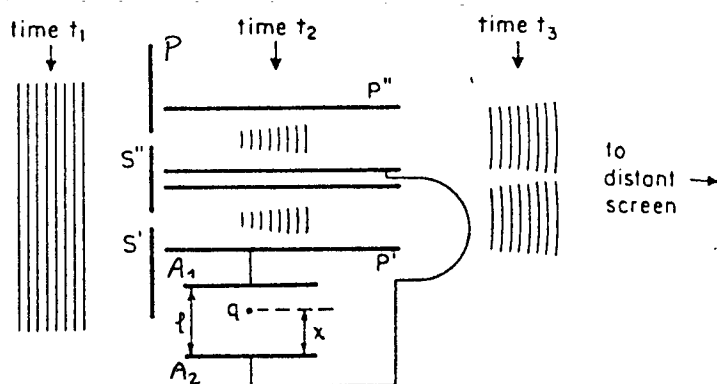


Fig. 3 (extrait de [2])

Dans P'' , il apparaît

$$V_1 - V_2 = -\frac{e}{2c} \quad (8.4)$$

Finalement, il apparaît entre A_1 et A_2 un champ électrique

$$E = \pm \frac{e}{2lc} \quad (8.5)$$

qui n'a pas le même signe suivant que la particule incidente passe dans P' ou dans P'' .

- Mettons maintenant une charge test q entre A_1 et A_2 . Fixons la au milieu de $A_1 A_2$ ($x = l/2$) quand la particule incidente entre dans les cylindres ou en sort, de manière à n'introduire aucune différence de potentiel entre P' et P'' quand la particule incidente entre ou sort.

Par contre, on lâche la charge test q pendant un temps T quand les paquets d'ondes sont au milieu de P' et P'' . En regardant dans quel sens elle va bouger, on saura si la particule est dans P' ou P'' .

- Pendant le temps T , la charge test q soumise au champ E donné en (8.5) va subir un changement d'impulsion $q|E|T$. Si l'on veut pouvoir détecter ce changement d'impulsion, il faut qu'il soit supérieur à l'incertitude Δp sur l'impulsion de la particule test

$$q|E|T > \Delta p \quad (8.6)$$

c'est à dire encore, compte tenu de (8.5)

$$\frac{qeT}{2lc} > \Delta p \quad (8.7)$$

- Or, la particule test obéit aux lois de la mécanique quantique. Elle a une incertitude Δx en position, telle que $\Delta x \Delta p > \hbar/2$, et par suite, d'après (8.2), la différence de potentiel qu'elle crée entre A_1 et A_2 a une incertitude ΔV donnée par

$$\Delta V = \frac{q}{lc} \Delta x \quad (8.8)$$

Multiplions alors, membre à membre, les 2 équations (8.7) et (8.8) et simplifions par q/lc . Il vient

$$\frac{eT\Delta V}{2} > \Delta x \Delta p > \frac{\hbar}{2} \quad (8.9)$$

c'est à dire encore, compte tenu de (8.1)

$$\frac{eT\Delta V}{\hbar} = |\Delta \phi_{\text{ABS}}| > 1 \quad (8.10)$$

Conclusion : Si l'on veut savoir si la particule incidente passe par P' ou P'' , il faut un Δp suffisamment petit. Mais alors Δx est grand et les fluctuations de la différence de potentiel induite par la charge test entre P' et P'' sont si

grandes que les fluctuations correspondantes du déphasage associé à l'effet ABS sont grandes devant 1, brouillant complètement le système de franges sur E. L'effet ABS empêche donc bien d'observer simultanément les aspects corpusculaire et ondulatoire de la particule incidente.

4) Généralisation de l'effet ABS à des particules neutres

a) Motivations de telles études

- L'effet ABS, tel qu'il est proposé dans [1] n'a pas été encore observé. Expérience très difficile : séparation très faible des faisceaux électro-magnétiques qui interfèrent ; vitesses très élevées des électrons ; difficultés de réaliser des micro-cylindres et d'appliquer des tensions variables à des fréquences très élevées, de l'ordre du GHz.
- Par contre, l'effet Aharonov-Bohm vectoriel (voir cours IX) a été observé. Mais les longueurs de cohérence des paquets d'ondes sont si grandes devant λ_{DB} qu'il n'a pas été possible de tester une propriété importante des effets AB : leur caractère non-dispersif.
- Récemment, de nouvelles expériences, généralisant l'effet ABS à des particules neutres ont été proposées et réalisées. Elles diffèrent de l'effet ABS dans la mesure où la particule se propage dans des régions où les champs sont non nuls (et non seulement les potentiels). Par contre, elles partagent avec l'effet ABS un certain nombre de propriétés : absence de force agissant sur le centre de masse, caractère non-dispersif, insensibilité des effets d'interférence à la longueur de cohérence. Il est donc intéressant de réaliser ces expériences pour essayer de tester ces propriétés importantes.

b) Proposition de Zeilinger (Ref. [3])

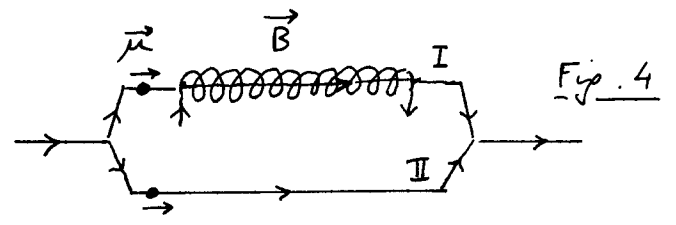
- Une des caractéristiques importantes de l'effet ABS est qu'on ajoute à l'hamiltonien de la particule, sur l'un des 2 chemins qui interfèrent, une énergie potentielle dépendant du temps et non de $\vec{r}$
$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(t) \right] \psi(\vec{r}, t) \quad (8.11)$$

de sorte que la phase du paquet d'ondes passant par ce chemin est globalement affectée par un facteur

$$\Phi = -\frac{1}{\hbar} \int dt V(t) \quad (8.12)$$

toutes les autres observables de la particule (en particulier, son impulsion $\vec{p}$) demeurant inchangées.

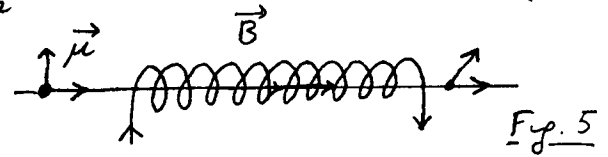
- Zeilinger propose, dans un interféromètre à neutrons, de faire passer l'un des 2 faisceaux dans un solénoïde (Fig. 4). Le solénoïde n'est pas alimenté et le champ magnétique $\vec{B}$ à l'intérieur est nul quand le paquet d'ondes entre dans le solénoïde et en sort. On applique $\vec{B}$ seulement pendant un intervalle de temps T au cours duquel le paquet d'ondes reste bien localisé au milieu du solénoïde. Si le neutron incident est polarisé et a son moment magnétique $\vec{\mu}$ parallèle à $\vec{B}$, il va apparaître, pendant l'intervalle T, une énergie potentielle supplémentaire $-\mu B(t)$, et par suite,



un facteur de phase ϕ affectant seulement le chemin I, et donné par

$$\phi = -\frac{1}{\hbar} \int -\mu B(t) dt \sim \mu \frac{BT}{\hbar} \quad (8.13)$$

- On peut aussi imaginer une expérience d'interférence de polarisation utilisant un seul faisceau, mais avec des neutrons polarisés dans une direction $\perp$ à celle de $\vec{B}$ (Fig. 5)



Là aussi, on applique $\vec{B}$ uniquement quand le paquet d'ondes est bien localisé à l'intérieur du solénoïde. Les déphasages différents sur les états de spin parallèle et anti-parallèle à $\vec{B}$ suivant lesquels on peut décomposer l'état de spin incident se traduisent par une rotation de la polarisation du neutron, proportionnelle à (8.13)

- Dans ces expériences, le neutron "voit" un champ magnétique (indépendant de $\vec{r}$) pendant un certain temps. Son spin subit même un couple dans l'expérience de la figure 5. (voir, par exemple, Ref. [4]), ce qui constitue une différence importante avec l'effet ABS où les champs sont toujours nuls.

Notons cependant que le centre de masse ne subit aucune force. Comme $\vec{B}$ est uniforme sur l'étendue du paquet d'ondes, $\vec{B}$ ne dépend pas de $\vec{r}$ et $d\vec{p}/dt = [\vec{p}, H]/i\hbar = \vec{0}$. Il n'y a donc aucun déplacement, ni aucune distorsion du paquet d'ondes sous l'effet de $\vec{B}$, et ϕ est un facteur de phase global, non dispersif.

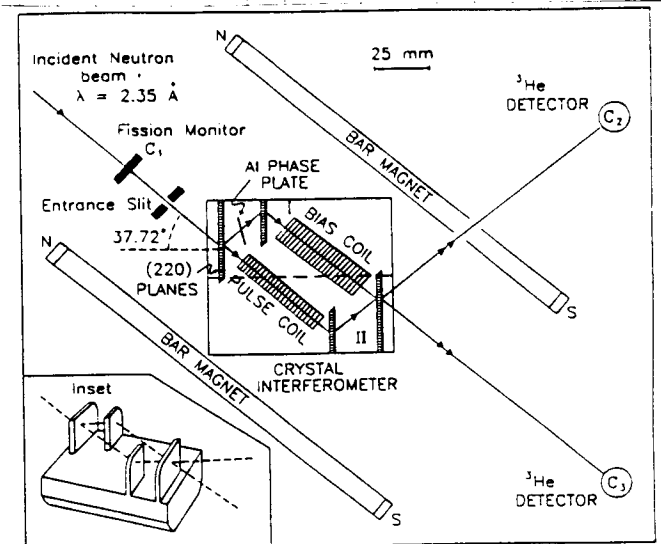
c) Réalisations expérimentales

(i) Première série d'expériences réalisées sur des neutrons (Refs [5], [6])

- Interféromètre à neutrons avec 2 bras comme sur la figure 4. Voir le schéma expérimental sur la Fig. 6 extraite de [5]
- Le déphasage observé sur les franges à la sortie de l'interféromètre est en bon accord avec (8.13).

Cependant, la diffraction de Bragg utilisée pour séparer en 2 le faisceau incident, puis pour recombiner les 2 faisceaux ainsi obtenus, nécessite une grande monochromaticité du faisceau incident, ce qui conduit à des longueurs de cohérence relativement grandes (de l'ordre de plusieurs λ_{DB})

Par ailleurs, les neutrons sont rapides, de sorte que T ne peut pas être très grand. Comme le moment magnétique des neutrons est faible et que les champs B en impulsions ne peuvent pas être très élevés, il n'est pas possible de réaliser des déphasages ϕ supérieurs à celui correspondant à la longueur de cohérence. Il n'est donc pas possible de tester ici le caractère non dispersif du déphasage.



Layout of AB experiment using a skew-symmetric single-Si-crystal neutron interferometer. Inset: An isometric view of the interferometer crystal.

Fig. 6 (extraite de [5])

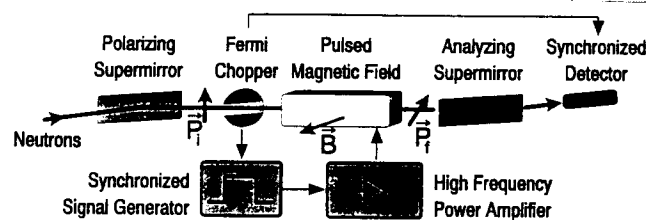
- Principe de l'expérience

- Expérience du type de celle de la figure 5, utilisant un seul faisceau (voir Fig. 7 extraite de [7])
- Utilise des neutrons très froids, avec des vitesses très faibles, de l'ordre de 40 m/s.

La monochromaticité des neutrons n'est pas essentielle comme dans l'expérience précédente, et la dispersion en énergie est assez élevée, conduisant à une longueur de cohérence très faible de l'ordre de 3.3 Å.

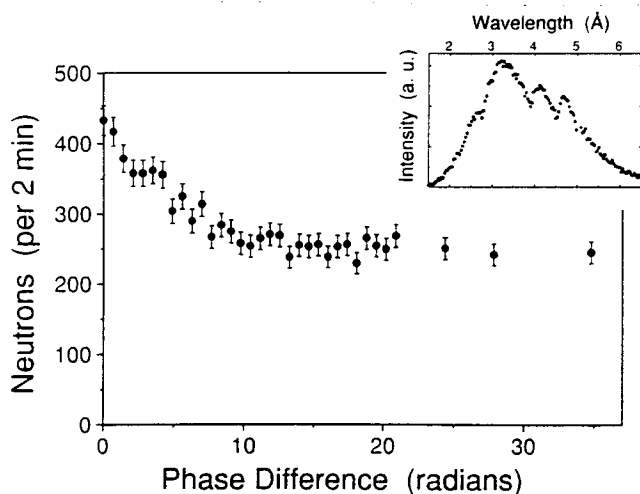
- Il est alors possible, avec des champs $\vec{B}$ relativement faibles, de réaliser, grâce aux valeurs élevées de T , des déphasages ϕ bien supérieurs à ceux correspondant à la longueur de cohérence.

- Expérience où le champ B est branché en permanence (voir Fig. 8 extraite de [7])



Sketch of the experimental setup: A rotating Fermi chopper imposes a time structure on the neutrons polarized through reflection from a supermirror. The subsequent magnetic field oriented in a direction orthogonal to the neutron polarization may either be constant in time or switched on and off while the neutrons are inside the field region. The detector then measures the intensity of the neutrons reflected by the analyzing supermirror.

Fig. 7 (extraite de [7])

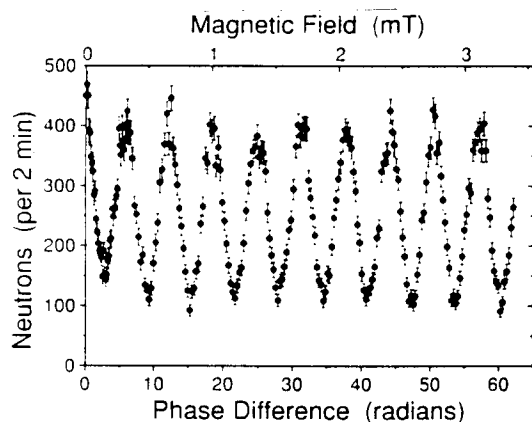


Neutrons counted after the second supermirror while a static magnetic field is on in the region between polarizer and analyzer. The horizontal axis displays the phase difference between the spin eigenstates as introduced by the magnetic field. The intensity decreases rapidly to a median value because the phase difference is accompanied by a relative displacement of the two eigenstates which exceeds the coherence length. The inset shows the neutron spectrum measured after transmission through the whole apparatus; the modulation is caused by the neutron guide tube leading to the experiment.

Fig. 8 (extraite de [7])

Les 2 paquets d'ondes, de spins opposés, suivant lesquels on peut se composer le paquet d'ondes incident, "voient" des potentiels opposés à l'entrée et à la sortie du solénoïde. Ils se décalent l'un par rapport à l'autre, d'une quantité qui dépasse très vite la longueur de cohérence de sorte qu'on ne voit même plus 1 seule frange d'interférence.

- Expérience où le champ B n'est branché que pendant un temps T (durant lequel le neutron est à l'intérieur de la région où B est appliqué)



As in Fig. 8 but now with the magnetic field switched on and off while the neutrons are inside the magnetic field region. The oscillations observed signify the fact that the relative phase shift between the two spin eigenstates in this case is not accompanied by a displacement of the wave packets. Note that the horizontal axis covers phase differences about twice as large as those of Fig. 8.

Fig. 9 (extraite de [7])

On voit alors apparaître des franges d'interférence dont le contraste ne diminue pas quand on augmente le déphasage. Pour obtenir le même déphasage maximal (≈ 60 radians) avec un déplacement des paquets d'ondes, il faudrait les déplacer de $40 \text{ \AA}$, soit d'une quantité plus de 10 fois supérieure à la longueur de cohérence ! On vérifie donc bien que cette longueur de cohérence ne joue aucun rôle dans le phénomène d'interférence étudié ici, ce qui démontre bien le caractère non dispersif de (8.13).

(iii) Expériences réalisées sur des atomes d'hydrogène (Ref. [8])

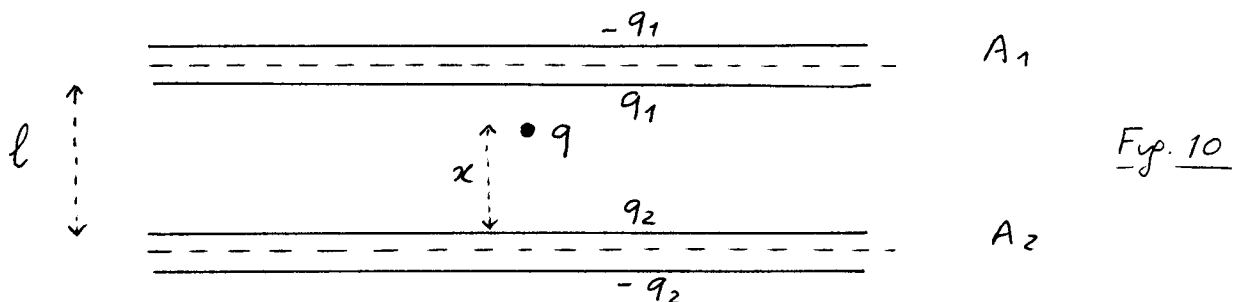
Des expériences, très analogues à celles de la référence [7] ont été réalisées très récemment sur des atomes d'hydrogène dans l'état métastable $2S_{1/2}$. Elles ont permis de montrer que le contraste des franges d'interférence était, comme pour la figure 9, indépendant de la vitesse de l'atome.

Références

- [1] Y. Aharonov, D. Bohm, Phys. Rev. 115, 485 (1959)
- [2] W.H. Furry, N.F. Ramsey, Phys. Rev. 118, 623 (1960)
- [3] A. Zeilinger, J. Physique (Paris), Colloq. 45, C3-213 (1984)
- [4] M. Peschkin, Phys. Rev. Lett. 69, 2017 (1992)
- [5] B.E. Allman, A. Cimmino, A.G. Klein, G.I. Opat, H. Kaiser, S.A. Werner Phys. Rev. Lett. 68, 2409 (1992)
- [6] Mêmes auteurs que pour [5], Phys. Rev. A 48, 1799 (1993)
- [7] G. Badurek, H. Weinfurter, R. Gähler, A. Kollmar, S. Wehinger, A. Zeilinger Phys. Rev. Lett. 71, 307 (1993)
- [8] S. Nic Chormaic, Ch. Miniatura, O. Gorceix, B. Vizaris de Leseqno, J. Robert, S. Feron, V. Lorent, J. Reinhardt, J. Baudon, K. Rubin Preprint, 1993. A paraitre (Phys. Rev. Lett. 72, 1 (1994)).

Appendice : Démonstration de l'équation (8.2)

- Condensateurs avec 2 armatures A_1, A_2 , initialement isolées et non chargées (dont on a représenté l'épaisseur sur la figure 10. Distance entre les 2 faces internes : l . On place une charge q entre A_1 et A_2 à une distance x au dessus de l'armature interne de A_2



- q induit une charge q_1 sur la face interne de A_1 , q_2 sur la face interne de A_2 . L'application du théorème de Gauss sur une surface, délimitée par les 2 plans passant dans les armatures et représentés en traits tiretés, donne (comme le champ est nul sur ces 2 surfaces) :

$$q = -q_1 - q_2 \quad (A.1)$$

Nous allons montrer tout d'abord que $q_1 = q_2 = -q/2$.

- A_1 et A_2 étant initialement non chargées, il apparaît une charge $-q_1$ ($-q_2$) sur la face externe de A_1 (A_2)

Or, le champ créé à l'extérieur de la surface enfermée par les 2 plans en traits tiretés de la figure 10 et produit par les charges à l'intérieur de ce volume est nul. Donc les charges $-q_1$ et $-q_2$ sur les surfaces externes de A_1 et A_2 sont libres et se répartissent uniformément sur ces surfaces. Si q_1 et q_2 étaient différents, ces répartitions uniformes de charge créeraient un champ non nul à l'intérieur des conducteurs, ce qui est impossible. On a donc nécessairement

$$q_1 = q_2 = -q/2 \quad (A.2)$$

- Soit V le volume délimité par la surface S des armatures internes de A_1 et A_2 . Le théorème de Green (voir Jackson, Classical Electrodynamics, p.15) donne, pour 2 champs scalaires ψ et ϕ quelconques

$$\int_V (\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi) d^3x = \oint_S [\phi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \phi}{\partial n}] da \quad (A.3)$$

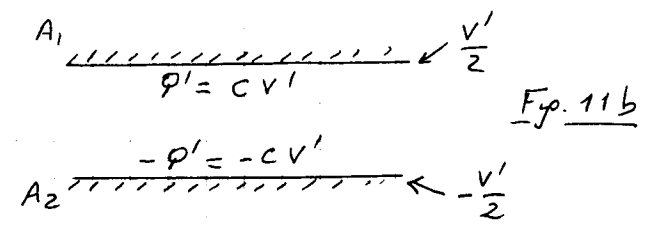
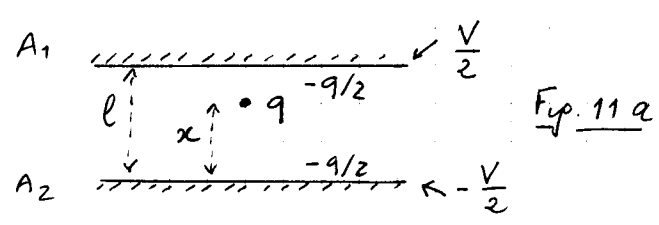
où $\partial \psi / \partial n$ est la dérivée normale de ψ sur la surface S , d'élément de surface da .

Prenons maintenant $\phi = V$, $\psi = V'$, V et V' étant les potentiels électrostatiques créés par 2 distributions de charge quelconques caractérisées par les distributions de charges volumiques et surfaciques ρ et σ pour la 1^{ère}, ρ' et σ' pour la 2^{ème}. On obtient alors, en utilisant l'équation de Poisson reliant $\nabla^2 V$ et $\nabla^2 V'$ à ρ et ρ' et le théorème de Gauss reliant $\partial V / \partial n$ et $\partial V' / \partial n$ à σ et σ' .

$$\int_V \rho V' d^3x + \int_S \sigma V' da = \int_V \rho' V d^3x + \int_S \sigma' V da \quad (A.4)$$

qui est le théorème de réciprocité de Green en électrostatique

- Appliquons alors un tel théorème aux 2 distributions suivantes, la 2^{ème} ne contenant pas de charge interne entre A_1 et A_2



On obtient :

$$q V'(x) + (-\frac{q}{2}) \frac{V'}{2} + (-\frac{q}{2}) (-\frac{V'}{2}) = \rho' \frac{V}{2} + (-\rho') (-\frac{V}{2}) = \rho' V = C V V' \quad (A.5)$$

où $V'(x)$ est le potentiel créé par la distribution de la Fig. 11b au point où se trouve la charge q de la Fig. 11a.

$$V'(x) = -\frac{V'}{2} + V' \frac{x}{l} = V' (\frac{x}{l} - \frac{1}{2}) \quad (A.6)$$

En reportant (A.6) dans (A.5) et en simplifiant par V' , on obtient

$$q (\frac{x}{l} - \frac{1}{2}) = C V \quad (A.7)$$

qui n'est autre que (8.2)