

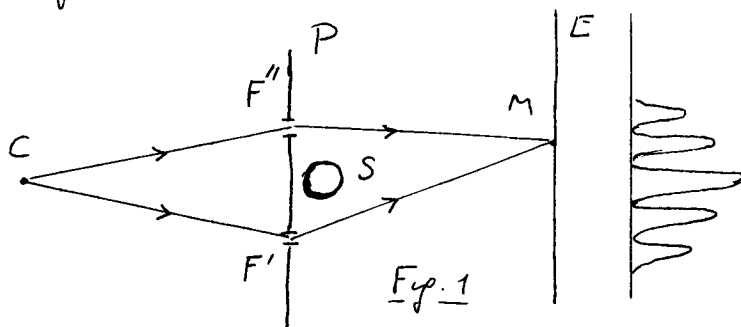
Buts de ce cours

- Introduire l'effet Aharonov-Bohm vectoriel (relatif à des particules chargées interagissant avec un potentiel vecteur) et dégager ses propriétés physiques essentielles (§1)
- Introduire l'effet Aharonov - Anandan - Casher (relatif à des particules neutres possédant un moment magnétique et interagissant avec un champ électrique). Montrer que l'on retrouve certaines des propriétés de l'effet ABV (§3)
- Auparavant, établir un certain nombre de résultats relatifs à la dynamique d'un moment magnétique dans un champ électrique (§2)

① Description de l'effet ABV (Refs. [1], [2], [3])

a. Problème physique considéré

- Canon à électrons C émettant des électrons qui passent à travers 2 fentes F' et F'' percées dans une plaque P et arrivent sur un écran E (Fig. 1)
- Les ondes de de Broglie associées interfèrent et on observe sur E un système de franges brillantes et noires.
- Un solénoïde S très long, perpendiculaire au plan de la figure est placé, juste après P , entre F' et F'' . Lorsqu'il est alimenté par un courant, le champ magnétique $\vec{B}$ créé par S est entièrement confiné à l'intérieur de S et est nul à l'extérieur. On pourrait également utiliser un solénoïde refermé sur lui-même pour former un tore, ou des filaments ferromagnétiques très fins ("whisker").
- Le solénoïde S est suffisamment petit et suffisamment proche de P pour que les ondes diffractées par F' et F'' ne puissent pas pénétrer en S . Les électrons passant par F' et F'' ne "voient" donc aucun champ magnétique et ne sont soumis à aucune force.
- Question: Les franges observées sur E se déplacent-elles quand le solénoïde S est alimenté?



b. Calcul du déphasage

- Si le champ $\vec{B}$ est nul à l'extérieur de S , il n'en est pas de même du potentiel vecteur $\vec{A}$ dont dérive $\vec{B}$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (9.1)$$

- Le Lagrangien d'une particule de masse m , de charge q , de position $\vec{r}$, de vitesse $\vec{v}$, plongée dans un champ électromagnétique décrit par les potentiels vecteur $\vec{A}$ et scalaire ϕ , s'écrit :

$$L = \frac{1}{2} m \vec{v}^2 + q \vec{v} \cdot \vec{A}(\vec{r}) - q \phi(\vec{r}) \quad (9.2)$$

On suppose ici $\phi = 0$, de sorte que L se réduit à

$$L = \frac{1}{2} m \vec{v}^2 + q \vec{v} \cdot \vec{A}(\vec{r}) \quad (9.3)$$

- Comme la trajectoire classique n'est ici pas modifiée par $\vec{A}$,

la variation $\delta\Phi$ du déphasage quantique entre les 2 chemins $CF''M$ et $CF'M$ due à la présence de A s'écrit (voir cours I) :

$$\delta\Phi = \Phi(\vec{A} \neq \vec{0}) - \Phi(\vec{A} = \vec{0}) = \frac{\delta S}{\hbar} = \frac{1}{\hbar} \oint_{CF''MF'C} \delta L dt \quad (9.4)$$

où δS est la variation d'action correspondant à la variation δL du lagrangien due à la présence de A .

$$\delta L = L(\vec{A} \neq \vec{0}) - L(\vec{A} = \vec{0}) = q \vec{v} \cdot \vec{A}(\vec{r}) \quad (9.5)$$

- Utilisant $\vec{v} = d\vec{r}/dt$ et reportant (9.5) dans (9.4), on obtient alors

$$\delta\Phi = \frac{q}{\hbar} \oint_{\substack{\text{chemin} \\ \text{fermé} \\ CF''MF'C}} \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \frac{q}{\hbar} \int_{\substack{\text{Surface} \\ CF''MF'C}} \vec{v} \times \vec{A}(\vec{r}) \cdot d^2a = \frac{q}{\hbar} \int_{\substack{\text{Surface} \\ CF''MF'C}} \vec{B}(\vec{r}) \cdot d^2a = \frac{q}{\hbar} F \quad (9.6)$$

où F est le flux du champ $\vec{B}$ à travers la surface $CF''MF'C$ enfermée entre les 2 chemins $CF''M$ et $CF'M$.

C - Discussion physique

- Quand le solénoïde S est alimenté, les franges observées sur E doivent se déplacer, car F , et par suite $\delta\Phi$, deviennent non nuls.

Bien que la particule ne subisse aucune force et évolue toujours dans un champ magnétique nul, le potentiel vecteur $\vec{A}$ produit un effet physique. Ceci montre l'importance des potentiels en mécanique quantique.

- Le déphasage $\delta\Phi$ ne dépend pas de la vitesse de la particule et reste le même, quel que soit le point M de E (pourvu que S reste à l'intérieur de $CF''MF'C$).

↳ Le système de franges est déplacé en bloc.

L'effet ABV est non dissipatif et de nature topologique.

- L'arbitrairie de jauge opérant sur $\vec{A}$

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \chi \quad (9.7)$$

où χ est un champ scalaire quelconque, ne modifie pas les conclusions précédentes. En effet

$$\oint_{CF''MF'C} \vec{A}'(\vec{r}) \cdot d\vec{r} - \oint_{CF''MF'C} \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \oint_{CF''MF'C} \vec{\nabla} \chi(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = 0 \quad (9.8)$$

puisque la circulation d'un gradient le long d'une courbe fermée est nulle. Le déphasage $\delta\Phi$ est donc invariant de jauge.

- Effet ABV et complémentarité (Ref. [2])

Dans la référence [2], on décrit une expérience de pensée utilisant une boucle entourée autour d'un petit cylindre vertical (placé, comme S , après P entre F'' et F') de matériau à haute perméabilité magnétique, la boucle étant reliée aux 2 plaques d'un condensateur C . Suivant que l'électron passe par F'' ou F' , le courant correspondant crée dans la boucle un flux positif ou négatif, ce qui fait apparaître une charge Q positive ou négative aux bornes de C . Comme la charge Q du condensateur et le flux F passant dans la boucle sont des variables

conjuguées, et que $\delta\phi$ doit être suffisamment petit pour qu'on puisse déterminer le signe de ϕ , on trouve que δF est si grand que les fluctuations correspondantes du déphasage $\delta\phi$ dû à l'effet ABV brouillent complètement le système de franges. En d'autres termes, l'effet ABV empêche en l'occurrence d'observer simultanément les aspects corpusculaire et ondulatoire de la particule.

- Observation expérimentale : voir Ref. [4] et Refs in.

② Dynamique d'un moment magnétique dans un champ électrique

a - Densité de magnétisation - Densités de courant et de charge (Refs [5], [6])

- Particule neutre, de moment magnétique $\vec{\mu}$
- Densité de magnétisation $\vec{M}(\vec{u})$ associée à $\vec{\mu}$

$$\int d^3u \vec{M}(\vec{u}) = \vec{\mu} \quad (9.9)$$

- On considère la particule dans son référentiel au repos R_0 . A la densité de magnétisation $\vec{M}(\vec{u})$ sont associées une densité de charge et de courant données par

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{J}_0(\vec{u}) = \vec{\nabla} \times \vec{M}(\vec{u}) \\ \rho_0(\vec{u}) = 0 \end{array} \right. \quad (9.10.a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{J}_0(\vec{u}) = \vec{\nabla} \times \vec{M}(\vec{u}) \\ \rho_0(\vec{u}) = 0 \end{array} \right. \quad (9.10.b)$$

- Plaçons nous maintenant dans le référentiel R où la particule est animée d'une vitesse $\vec{v}$ et soient $\vec{J}$ et ρ les densités de courant et de charge dans R . Comme $\vec{J}$ et ρ sont les 4 composantes d'un quadri-vecteur, on en déduit que $\rho(u)$ est non nul dans R et est donné par (à l'ordre $1/c^2$ inclus)

$$\rho(\vec{u}) = \frac{1}{c^2} \vec{v} \cdot \vec{J}_0(\vec{u}) = \frac{1}{c^2} \vec{v} \cdot [\vec{\nabla} \times \vec{M}(\vec{u})] \quad (9.11)$$

b - Lagrangien L

- On suppose que, dans R , la particule, de vitesse $\vec{v}$, n'est soumise qu'à un champ électrique statique

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi \quad (9.12)$$

où ϕ est le potentiel scalaire dont dérive $\vec{E}$. On peut prendre $\vec{A} = \vec{0}$.

- La généralisation de (9.2), quand les densités de charge et de courant ne sont pas ponctuelles, s'écrit

$$L = \frac{1}{2} m \vec{v}^2 + \int d^3u [\vec{J}(\vec{u}) \cdot \vec{A}(\vec{u}) - \rho(\vec{u}) \cdot \phi(\vec{u})] \quad (9.13)$$

En prenant ici $\vec{A}(\vec{u}) = \vec{0}$, on obtient, compte tenu de (9.11)

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} m \vec{v}^2 - \frac{1}{c^2} \int \phi(\vec{u}) \vec{v} \cdot [\vec{\nabla} \times \vec{M}(\vec{u})] d^3u \\ &= \frac{1}{2} m \vec{v}^2 - \frac{1}{c^2} \sum_{\substack{i,j,k \\ = x,y,z}} v_i \epsilon_{ijk} \int \phi(u) \partial_j M_k(u) d^3u \end{aligned} \quad (9.14)$$

ϵ_{ijk} étant le tenseur complètement antisymétrique. En effectuant une intégration par parties et en utilisant le théorème de la divergence, on peut écrire

$$\sum_{i,j,k} v_i \epsilon_{ijk} \int \phi(\vec{u}) \partial_j \mu_k(\vec{u}) d^3u = - \sum_{i,j,k} v_i \epsilon_{ijk} \int \mu_k(\vec{u}) \partial_j \phi(\vec{u}) d^3u \quad (9.15)$$

$\mu_k(u)$ est très localisé autour de la position $\vec{r}$ de la particule et varie beaucoup plus vite que $\phi(\vec{u})$. On a donc

$$\begin{aligned} \int \mu_k(\vec{u}) \partial_j \phi(\vec{u}) d^3u &\simeq (\partial_j \phi(\vec{r})) \int d^3u \mu_k(\vec{u}) \\ &= -\mu_k E_j(\vec{r}) \end{aligned} \quad (9.16)$$

On a utilisé (9.9) et (9.12). Finalement, on obtient

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} m \vec{v}^2 - \frac{1}{c^2} \sum_{i,j,k} \epsilon_{ijk} v_i E_j(\vec{r}) \mu_k \\ &= \frac{1}{2} m \vec{v}^2 - \frac{1}{c^2} \vec{v} \cdot [\vec{E}(\vec{r}) \times \vec{\mu}] \end{aligned} \quad (9.17)$$

c. Impulsion $\vec{p}$ - Hamiltonien H

- Comme L contient un terme linéaire en $\vec{v}$, l'impulsion $\vec{p}$ ne coïncide pas avec la quantité de mouvement $m \vec{v}$

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = m \vec{v} - \frac{1}{c^2} \vec{E}(\vec{r}) \times \vec{\mu} \quad (9.18)$$

Nous reviendrons plus loin sur la signification physique du dernier terme de (9.18)

- On en déduit, à l'ordre $1/c^2$ inclus, c'est à dire en négligeant des termes en $1/c^4$:

$$\begin{aligned} H &= \vec{p} \cdot \vec{v} - L \\ &= \frac{\vec{p}^2}{m} + \frac{\vec{p}}{mc^2} \cdot \vec{E} \times \vec{\mu} - \frac{m}{2} \left[\frac{\vec{p}}{m} + \frac{1}{mc^2} \vec{E} \times \vec{\mu} \right]^2 + \vec{\mu} \cdot \frac{1}{c^2} \left[\left(\frac{\vec{p}}{m} + \frac{1}{mc^2} \vec{E} \times \vec{\mu} \right) \times \vec{E} \right] \\ &\simeq \frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{1}{mc^2} \vec{\mu} \cdot (\vec{p} \times \vec{E}) \end{aligned} \quad (9.19)$$

d. Discussion physique

(i) Interprétation de H

A des termes en $1/c^4$ près, on peut réécrire le dernier terme de (9.19) sous la forme

$$\frac{1}{mc^2} \vec{\mu} \cdot (\vec{p} \times \vec{E}) = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}_{\text{mot}} \quad (9.20)$$

où

$$\vec{B}_{\text{mot}} = -\frac{1}{c^2} \frac{\vec{p}}{m} \times \vec{E} \simeq -\frac{1}{c^2} \vec{v} \times \vec{E} \quad (9.21)$$

est le champ magnétique motional "vu" dans son référentiel au repos par la particule se déplaçant à la vitesse $\vec{v}$ dans le champ électrique $\vec{E}$.

Le dernier terme de (9.19) représente donc le couplage magnétique entre le moment magnétique $\vec{\mu}$ et le champ magnétique motional $\vec{B}_{\text{mot}}$. Grande analogie avec le couplage spin-orbite V_{so} dans les atomes.

(ii) Absence de précession de Thomas

- Par rapport au couplage spin-orbite habituel, il manque un facteur $1/2$ dans le dernier terme de (9.13). Cette différence est due à l'absence de précession de Thomas pour une particule neutre.
- Pour une particule chargée, comme un électron de vitesse $\vec{v}$ non parallèle à $\vec{E}$, la force électrique $\vec{F} = q\vec{E}$ fait tourner la vitesse. On peut montrer alors (voir Ref [7], § 11.5) que le passage dans le référentiel au repos de l'électron s'accompagne d'une rotation du système d'axes, faisant apparaître un champ magnétique fictif, qui se retranche du champ nucléaire, et est à l'origine du facteur $1/2$. Pour une particule neutre, se déplaçant dans un champ électrique $\vec{E}$, il n'y a pas, à l'ordre 0 en $1/c$, de force s'exprimant sur la particule, pouvant faire changer la direction de $\vec{v}$ et faire apparaître par suite la rotation du système d'axes.

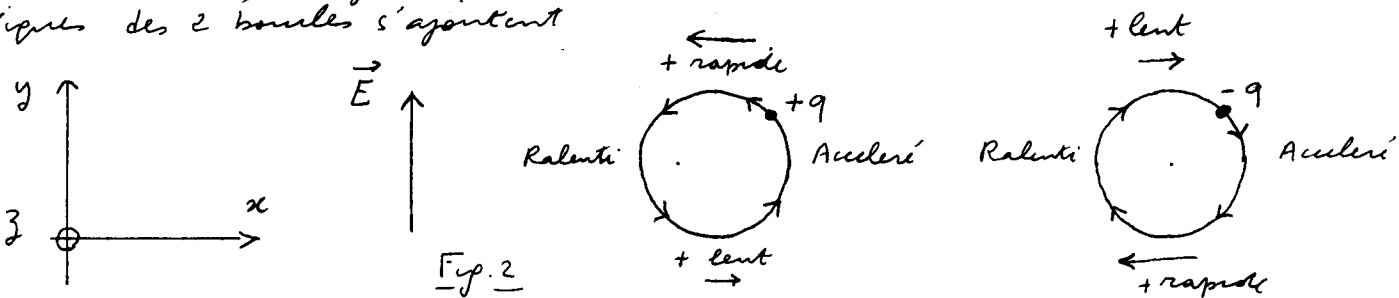
(iii) Différence entre impulsion et quantité de mouvement

- La différence

$$\vec{p} - m\vec{v} = -\frac{1}{c^2} \vec{E}(\vec{r}) \times \vec{\mu} \quad (9.22)$$

entre impulsion $\vec{p}$ et quantité de mouvement $m\vec{v}$, apparaissant dans (9.18), est parfois appelée impulsion "cachée" (voir Ref. [6]). Elle s'exprime en fonction du champ $\vec{E}$ et on peut en donner une interprétation qualitative.

- Supposons par exemple (voir Fig. 2) le champ électrique $\vec{E}$ aligné suivant Oy, et le moment magnétique $\vec{\mu}$ suivant Oz. On peut prendre un modèle simple pour rendre compte de $\vec{\mu}$: une charge $+q$ tournant, dans le plan xOy, dans le sens direct, plus une charge $-q$ tournant dans le sens inverse. Globalement, le système est neutre, mais les 2 moments magnétiques des 2 boucles s'ajoutent.



- Le champ E accélère la charge $+q$ dans la partie droite du cercle, la ralentit dans la partie gauche, de sorte que le mouvement est plus rapide vers la gauche dans la partie supérieure, plus lent vers la droite dans la partie inférieure. Les conclusions sont inversées pour la charge $-q$, qui a un mouvement plus lent vers la droite dans la partie supérieure, plus rapide vers la gauche dans la partie inférieure.
- Il apparaît donc globalement une quantité de mouvement dirigée vers la gauche, ce qui a bien la direction de $-\vec{E} \times \vec{\mu} \sim -\vec{e}_y \times \vec{e}_z = -\vec{e}_x$.

- En toute rigueur, il y a également une variation de la IX-5 densité de présence de la particule, qui devient plus élevée dans les parties où le mouvement est ralenti, plus faible dans les parties où le mouvement est accéléré, et cet effet compense exactement le précédent. Cependant, la compensation ne se produit plus quand on tient compte des effets relativistes (par exemple, augmentation de la masse avec la vitesse), et le résultat précédent redevient valable. (voir aussi Ref. [8]).

e. Equations du mouvement

- La 1^{ère} équation de Hamilton-Jacobi $d\vec{r}/dt = \vec{v} = \partial H / \partial \vec{p}$ redonne (9.18). La 2^{ème} équation donne

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{p}}{dt} &= - \frac{\partial H}{\partial \vec{r}} = - \frac{1}{c^2} \vec{\nabla} \left[\vec{\mu} \cdot \left(\frac{\vec{p}}{m} \times \vec{E}(\vec{r}) \right) \right] \\ &= \frac{1}{c^2} \vec{\nabla} \left[\vec{E}(\vec{r}) \cdot \left(\frac{\vec{p}}{m} \times \vec{\mu} \right) \right] \end{aligned} \quad (9.23)$$

- Pour calculer $d\vec{p}/dt$, à partir de (9.18), utilisons

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \simeq \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{m} \cdot \vec{\nabla} \quad (9.24)$$

et le fait que $\vec{E}$ ne dépend pas explicitement de t . Il vient :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a} - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\vec{p}}{m} \cdot \vec{\nabla} \right) \left[\vec{E}(\vec{r}) \times \vec{\mu} \right] \quad (9.25)$$

où l'on a introduit l'accélération

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (9.26)$$

(Notons que les termes en $1/c^2$ négligés dans (9.24) lors du remplacement de $\vec{v}$ par $\vec{p}/m$, auraient donné des termes en $1/c^4$ dans le dernier terme de (9.25), ce qui justifie (9.24)).

- En égalant (9.23) et (9.25), on obtient l'équation de la dynamique

$$m\vec{a} = \frac{1}{c^2} \left\{ \left(\frac{\vec{p}}{m} \cdot \vec{\nabla} \right) \left[\vec{E}(\vec{r}) \times \vec{\mu} \right] + \vec{\nabla} \left[\vec{E}(\vec{r}) \cdot \left(\frac{\vec{p}}{m} \times \vec{\mu} \right) \right] \right\} \quad (9.27)$$

Des identités vectorielles simples et le fait que $\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}) = \vec{0}$ et $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = 0$ permettent de montrer (voir Appendice B) que

$$\left(\frac{\vec{p}}{m} \cdot \vec{\nabla} \right) \left[\vec{E}(\vec{r}) \times \vec{\mu} \right] + \vec{\nabla} \left[\vec{E}(\vec{r}) \cdot \left(\frac{\vec{p}}{m} \times \vec{\mu} \right) \right] = -(\vec{\mu} \cdot \vec{\nabla}) \left[\frac{\vec{p}}{m} \times \vec{E}(\vec{r}) \right] \quad (9.28)$$

de sorte que l'on obtient finalement

$$m\vec{a} = - \frac{1}{c^2} (\vec{\mu} \cdot \vec{\nabla}) \left[\frac{\vec{p}}{m} \times \vec{E}(\vec{r}) \right] \quad (9.29)$$

Si $\vec{\mu}$ reste constant en direction, et si $\vec{E}(\vec{r})$ ne varie pas le long de cette direction, l'équation (9.29) prédit que $\vec{a} = \vec{0}$ c'est à dire qu'il n'y a pas de force s'exerçant sur le centre de masse de la particule. Nous verrons plus loin des exemples de telles situations. C'est le fait d'avoir confondu $d\vec{p}/dt$ et $m\vec{a}$ qui a conduit certains auteurs à d'autres conclusions erronées (voir Ref. [9])

③ Effet Aharonov - Anandan - Casher (AAC) - Voir Refs [5], [10]

1X.7

a - Problème physique considéré

- Fil très long le long de Oz portant une densité de charge uniforme Λ par unité de longueur. (Fig. 3)

- Particule incidente neutre ayant un moment magnétique $\vec{\mu}$ initialement parallèle à Oz

- Au moyen de "lames séparatrices" appropriées, le paquet d'ondes incident est séparé en 2 paquets d'ondes cohérents qui se propagent de part et d'autre du fil dans un plan $\perp$ à Oz , puis sont ensuite recombinés.

- Question : l'état d'interférence dépend-il de Λ ?

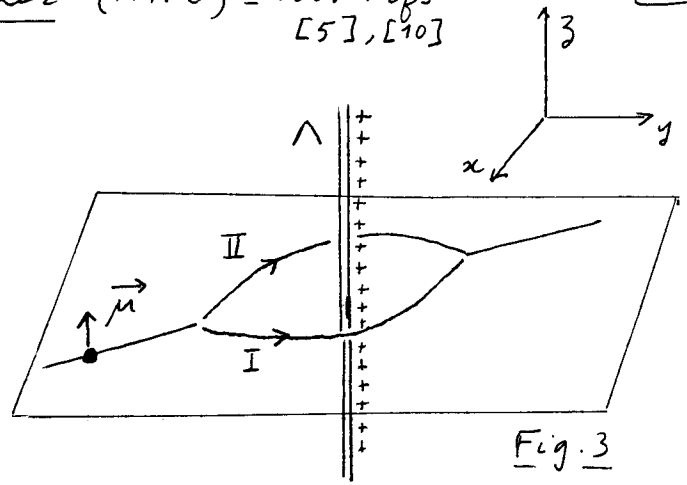


Fig. 3

b - Absence de force et de couple (Pour la controverse à ce sujet, voir Refs [9], [6] et [11])

- Supposons d'abord $\Lambda = 0$. Les chemins I et II sont dans un plan $\perp$ à Oz . Le moment magnétique $\vec{\mu}$ n'est soumis à aucun couple et reste parallèle à Oz tout au long des trajectoires.

- Si $\Lambda \neq 0$, un champ électrique radial $\vec{E}$ apparaît. Si l'on utilise des coordonnées cylindriques r, φ, z (l'axe z étant pris le long du fil), on obtient à partir du théorème de Gauss

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\Lambda}{r} \vec{e}_r \quad (9.30)$$

$\vec{e}_r$ étant le vecteur unitaire radial au point r, φ, z . $\vec{E}$ ne dépend pas de z .

- Supposons pour l'instant que $\vec{\mu}$ reste aligné sur Oz en présence de $\vec{E}$. Dans l'équation (9.29), $\vec{\mu} \cdot \vec{E}$ se réduit à $\mu \frac{2}{z}$, μ étant le module de $\vec{\mu}$. Comme $\vec{E}$ ne dépend pas de z , d'après (9.30), le second membre de (9.29) se réduit à zéro et l'on obtient

$$M \vec{a} = \vec{0} \quad (9.31)$$

Il n'y a pas de force nouvelle s'exerçant sur la particule et due à la présence du fil chargé. Les trajectoires I et II ne sont pas modifiées.

- On vérifie alors que, $\vec{v}$ restant perpendiculaire à Oz , $\frac{1}{c^2} \vec{p} \times \vec{E}$, qui ne diffère de $\frac{1}{c^2} \vec{v} \times \vec{E}$ que par des termes en $1/c^4$, reste toujours parallèle à Oz . Le champ magnétique motionnel n'exerce donc aucun couple sur le moment magnétique $\vec{\mu}$. Il était donc correct de supposer que $\vec{\mu}$, initialement parallèle à Oz , reste aligné sur Oz .

- En conclusion, la présence du fil chargé ne donne naissance à aucune force et aucun couple sur la particule incidente et son moment magnétique. Les trajectoires I et II sont donc les mêmes que Λ soit nul ou non.

c - Calcul du déphasage

- En utilisant (9.18), on obtient pour la différence $\phi_I - \phi_{II}$ entre les déphasages accumulés sur les chemins I et II

$$\begin{aligned}\Phi_I - \Phi_{II} &= \int_{I-II} \frac{\vec{p} \cdot d\vec{r}}{\hbar} \\ &= \int_{I-II} \frac{m\vec{v} \cdot d\vec{r}}{\hbar} - \frac{1}{\hbar c^2} \int_{I-II} [\vec{E}(\vec{r}) \times \vec{\mu}] \cdot d\vec{r}\end{aligned}\quad (9.32)$$

Le 1^{er} terme de la 2^{ème} ligne de (9.32) est le même que Λ soit nul ou non, puisque $\vec{v}$ reste inchangé d'après (9.31). Le 2^{ème} terme de la 2^{ème} ligne de (9.32) représente donc la variation $\delta\Phi$ de $\Phi_I - \Phi_{II}$ due à Λ

$$\delta\Phi = - \frac{1}{\hbar c^2} \int_{I-II} [\vec{E}(\vec{r}) \times \vec{\mu}] \cdot d\vec{r} \quad (9.33)$$

- l'utilisation de coordonnées cylindriques r, φ, z et des vecteurs unitaires associés $\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z$ donne :

$$d\vec{r} = dr\vec{e}_r + r d\varphi \vec{e}_\varphi + dz \vec{e}_z \quad (9.34.a) \quad \vec{\mu} = \mu \vec{e}_z \quad (9.34.b)$$

En reportant (9.30) et (9.34) dans (9.33), on obtient alors

$$\begin{aligned}\delta\Phi &= - \frac{1}{\hbar c^2} \frac{\Lambda \mu}{2\pi\epsilon_0} \int_{I-II} \frac{1}{r} (\underbrace{\vec{e}_r \times \vec{e}_z}_{= -\vec{e}_\varphi}) \cdot d\vec{r} \\ &= \frac{\Lambda \mu}{2\pi\epsilon_0 \hbar c^2} \int_{I-II} d\varphi = \frac{\Lambda \mu}{\epsilon_0 \hbar c^2}\end{aligned}\quad (9.35)$$

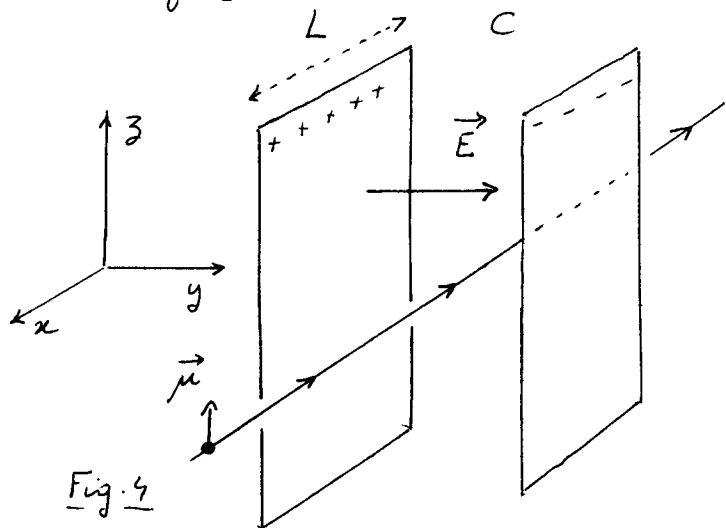
puisque l'intégrale de $d\varphi$ le long du contour fermé I-II entourant le fil donne 2π

d - Discussion physique

- Le déphasage $\delta\Phi$ ne dépend pas de la vitesse initiale de la particule.
- Il ne dépend pas de la forme exacte des chemins I et II, pourvu que ces 2 chemins entourent complètement le fil.
- La trajectoire de la particule incidente et son moment magnétique ne sont pas perturbés par la présence du fil.
- Beaucoup de points communs donc avec l'effet ABV. Cependant, la particule se propage ici dans une région où les champs (et non pas seulement les potentiels) sont non nuls.

e - Autre disposition possible (voir aussi Refs. [12], [14])

- Condensateur C très allongé suivant Oz avec des plaques $\perp$ à Oy (Fig. 4)
- Particule neutre arrivant le long de Ox , avec son moment magnétique $\vec{\mu}$ parallèle à Oz .
- On peut découper les dentées de charges + et - sur les 2 plaques de C en rubans très fins parallèles à Oz et analogues aux fils de la figure 3. Le même raisonnement que celui fait plus haut montre alors que la particule incidente ne subit aucune force et aucun couple. Elle passe donc entre les 2 plaques du condensateur, sans modification, ni de la trajectoire, ni de $\vec{\mu}$ qui reste $\parallel$ à Oz .



- Le déphasage supplémentaire dû au champ $\vec{E}$ qui règne entre [IX-9] les 2 armatures de C, quand la particule traverse cette zone, vaut donc

$$\delta\phi = -\frac{1}{\hbar c^2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \vec{e}_x \cdot [\vec{E} \times \vec{\mu}] \simeq -\frac{E\mu}{\hbar c^2} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dx \vec{e}_x \cdot [\vec{e}_y \times \vec{e}_z] = \frac{E\mu L}{\hbar c^2} \quad (9.36)$$

où L est la largeur des plaques de C le long de Ox .

- On peut voir clairement sur cette disposition pourquoi $\delta\phi$ ne dépend pas de v . Dans son référentiel au repos, la particule "voit" un champ motional $\vec{B}_{\text{mot}} = -\frac{1}{c^2} \vec{v} \times \vec{E}$ parallèle à Oz et proportionnel à v et acquiert de ce fait une énergie potentielle $U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}_{\text{mot}} = +\frac{1}{c^2} \vec{\mu} \cdot (\vec{v} \times \vec{E})$ proportionnelle à v . Le déphasage correspondant est $\frac{1}{\hbar} \int U dt \simeq \frac{1}{\hbar} U \frac{L}{v}$. Le facteur v qui apparaît dans U est compensé par le facteur $\frac{1}{v}$ qui apparaît dans le temps d'interaction L/v .

f- Observations expérimentales

(i) Expérience sur les neutrons (voir Ref. [13])

- Les 2 bras d'un interféromètre à neutrons passent à travers 2 condensateurs où règnent des champs $\vec{E}_I$ et $\vec{E}_{II}$ tels que $\vec{v}_I \times \vec{E}_I = -\vec{v}_{II} \times \vec{E}_{II}$

Les déphasages $\delta\phi_I$ et $\delta\phi_{II}$ correspondants sont donc opposés et ont des modules donnés par (9.36)

- L'expérience est difficile, nécessite plusieurs mois

d'intégration pour observer un déphasage de 2.19 ± 0.52 mrad, à comparer avec la valeur prévue théoriquement de 1.50 mrad.

(ii) Expérience plus récente sur des molécules TlF (Ref [14])

- On utilise un seul faisceau moléculaire (disposition analogue à celle de la figure 4), mais une impulsion de radiofréquence prépare les spins $1/2$ entrants dans une superposition linéaire des états $| \pm \rangle_3$. Ces 2 états subissent des déphasages opposés, dont le module est donné par (9.36). Le déphasage est mesuré sur les franges de Ramsey obtenues par application d'une 2^{ème} impulsion de radiofréquence à la sortie.

- Les résultats suivants ont pu ainsi être obtenus

- Test de l'indépendance de $\delta\phi$ vis à vis de la vitesse v
- Test de la proportionnalité de $\delta\phi$ au champ électrique E
- Test de l'expression de $\delta\phi$ à 4% près.

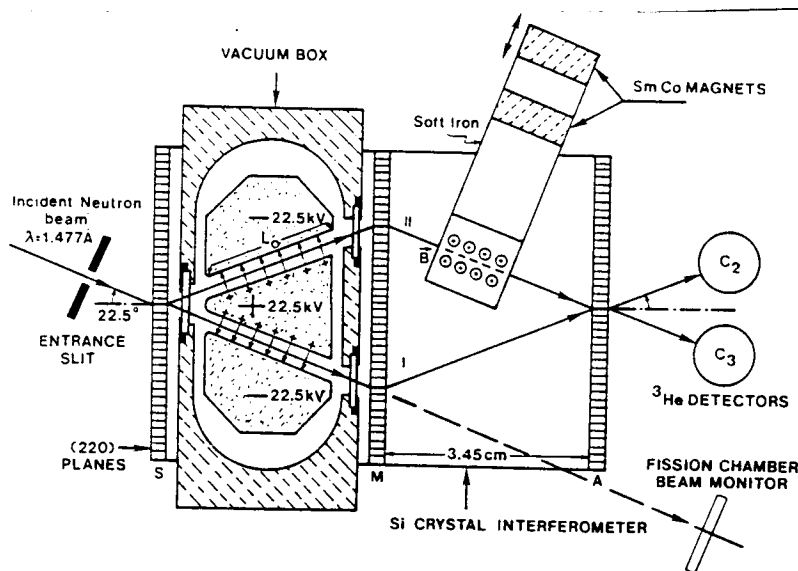


Fig. 5 (extraite de [13])

Références

- [1] Y. Aharonov, D. Bohm, Phys. Rev. 115, 485 (1959)
 - [2] W. H. Furry, N. F. Ramsey, Phys. Rev. 118, 623 (1960)
- Les considérations présentées dans cet article sur le lien entre ces effets

- ABS et ABV et la complémentarité ont été étendues récemment à l'effet AAC ; voir N.F. Ramsey, Phys. Rev. A48, 80 (1993).
- [3] R.P. Feynman, R.B. Leighton, M. Sands, The Feynman lectures on Physics, tome II, § 15-5, (Addison Wesley, 1965).
- [4] A. Tonomura, N. Osakabe, T. Matsuda, T. Kawasaki, J. Endo, S. Yano, H. Yamada, Phys. Rev. Lett. 56, 792 (1986)
- [5] Y. Aharonov, A. Casher, Phys. Rev. Lett. 53, 319 (1984)
- [6] Y. Aharonov, P. Pearle, L. Vaidman, Phys. Rev. A37, 4052 (1988)
- [7] J.D. Jackson, Classical Electrodynamics (Wiley, 1962)
- [8] S. Coleman, J.H. Van Vleck, Phys. Rev. 171, 1370 (1968)
- [9] T.H. Boyer, Phys. Rev. A36, 5083 (1987)
- [10] J. Anandan, Phys. Rev. Lett. 48, 1660 (1982)
- [11] A.S. Goldhaber, Phys. Rev. Lett. 62, 482 (1989)
- [12] R.C. Casella, Phys. Rev. Lett. 65, 2217 (1990)
- [13] A. Cimmino, G.I. Opat, A.G. Klein, H. Kaiser, S.A. Werner, M. Arif, R. Clothier, Phys. Rev. Lett. 63, 380 (1989)
- [14] K. Sangster, E.A. Hinds, S. Barnett, E. Riis
Preprint 1993, à paraître (Phys. Rev. Lett. 71, 3641 (1993)).

Appendice B : Démonstration de l'équation (9.28)

- On utilise les 2 formules donnant le gradient d'un produit scalaire et le rotationnel d'un produit vectoriel

$$\vec{\nabla}(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \times (\vec{\nabla} \times \vec{b}) + \vec{b} \times (\vec{\nabla} \times \vec{a}) + (\vec{a} \cdot \vec{\nabla}) \vec{b} + (\vec{b} \cdot \vec{\nabla}) \vec{a} \quad (\text{B.1})$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} (\vec{\nabla} \cdot \vec{b}) - \vec{b} (\vec{\nabla} \cdot \vec{a}) + (\vec{b} \cdot \vec{\nabla}) \vec{a} - (\vec{a} \cdot \vec{\nabla}) \vec{b} \quad (\text{B.2})$$

- En utilisant (B.1) et le fait que, des 3 vecteurs, $\vec{p}/m$, $\vec{\mu}$ et $\vec{E}$ seul $\vec{E}$ dépend de $\vec{r}$, on obtient, compte tenu de $\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0}$

$$\vec{\nabla}[(\frac{\vec{p}}{m} \times \vec{\mu}) \cdot \vec{E}] = (\frac{\vec{p}}{m} \times \vec{\mu}) \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) + [(\frac{\vec{p}}{m} \times \vec{\mu}) \cdot \vec{\nabla}] \vec{E} = [(\frac{\vec{p}}{m} \times \vec{\mu}) \cdot \vec{\nabla}] \vec{E} \quad (\text{B.3})$$

- On obtient également, compte tenu de (B.2) et de $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}[(\vec{\mu} \times \vec{E}) \cdot \frac{\vec{p}}{m}] &= \frac{\vec{p}}{m} \times [\vec{\nabla} \times (\vec{\mu} \times \vec{E})] + (\frac{\vec{p}}{m} \cdot \vec{\nabla})(\vec{\mu} \times \vec{E}) \\ &= \vec{\mu} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - (\vec{\mu} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E} = -(\vec{\mu} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E} \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

- Or, $(\frac{\vec{p}}{m} \times \vec{\mu}) \cdot \vec{E} = (\vec{\mu} \times \vec{E}) \cdot \frac{\vec{p}}{m}$. On en déduit, par soustraction de (B.4) de (B.3)

$$[(\frac{\vec{p}}{m} \times \vec{\mu}) \cdot \vec{\nabla}] \vec{E} = -(\vec{\mu} \cdot \vec{\nabla})(\frac{\vec{p}}{m} \times \vec{E}) + (\frac{\vec{p}}{m} \cdot \vec{\nabla})(\vec{\mu} \times \vec{E}) \quad (\text{B.5})$$

En remplaçant, compte tenu de (B.3) le membre de gauche de (B.5) par $\vec{\nabla}[(\frac{\vec{p}}{m} \times \vec{\mu}) \cdot \vec{E}] = \vec{\nabla}[\vec{E} \cdot (\frac{\vec{p}}{m} \times \vec{\mu})]$, et en réarrangeant les termes, on obtient alors (9.28).