

Résumé du cours 1992-93

Le cours de l'année 1992-1993 est le premier d'une série de deux cours consacrés à l'interférométrie atomique. Il s'agit là d'un nouveau domaine de recherche, en développement très rapide, qui porte sur l'étude de phénomènes physiques où la nature ondulatoire des degrés de liberté de translation d'un atome neutre joue un rôle important. On peut ainsi observer des phénomènes d'interférence, analogues à ceux qui sont bien connus pour la lumière, et où les ondes lumineuses sont remplacées par les ondes de de Broglie associées au centre de masse de l'atome.

Le cours commence par une introduction générale où sont analysés les développements récents ayant permis l'éclosion d'un sujet : nouvelle maîtrise du mouvement atomique acquise grâce aux méthodes de refroidissement et de piégeage d'atomes par des faisceaux laser ; naissance d'une "optique atomique" utilisant des nouveaux dispositifs jouant vis à vis des ondes de de Broglie atomiques un rôle équivalent à celui des miroirs, lames séparatrices, lentilles... en optique traditionnelle ; meilleure compréhension théorique des méthodes de spectroscopie à haute résolution sans effet Doppler... Une comparaison est également effectuée entre l'interférométrie atomique et d'autres types d'interférométrie utilisant des photons ou des neutrons au lieu d'atomes. Enfin, quelques remarques générales sont formulées à propos des phénomènes d'interférence quantique, concernant par exemple la nature des objets qui interfèrent ou la possibilité de déterminer par quel "chemin" le système passe.

Exemple simple de lame séparatrice pour atomes

Considérons un atome à deux niveaux internes a et b (avec $E_b > E_a$), et supposons que cet atome, initialement dans l'état a , avec une impulsion \mathbf{p} , traverse une onde laser quasi-résonnante de largeur w et de vecteur d'onde \mathbf{k} . L'atome peut absorber un photon laser et passer dans l'état excité b , l'impulsion \mathbf{p} de l'atome augmentant d'une quantité $\hbar\mathbf{k}$ égale à l'impulsion du photon absorbé. La résolution de l'équation de Schrödinger associée à un tel problème montre que, à l'issue de la traversée de l'onde laser, l'atome est en général dans une superposition linéaire des états $|a, \mathbf{p}\rangle$ et $|b, \mathbf{p} + \hbar\mathbf{k}\rangle$. On obtient donc ainsi une superposition linéaire de deux ondes de de Broglie, différant non seule-

ment par leur directions de propagation, respectivement parallèles à \mathbf{p} et $\mathbf{p} + \hbar\mathbf{k}$, mais également par l'état interne, a ou b , dans lequel se trouve l'atome. Un tel dispositif peut être considéré comme une lame séparatrice pour ondes de de Broglie atomiques.

Le calcul précédent peut être aisément généralisé au cas où l'atome traverse successivement deux ondes laser de même vecteur d'onde \mathbf{k} , de même largeur w , séparées par une certaine distance L . Partant de l'état $|a, \mathbf{p}\rangle$, l'atome peut se retrouver, à l'issue de la traversée des deux ondes, dans l'état $|b, \mathbf{p} + \hbar\mathbf{k}\rangle$ en ayant suivi deux chemins différents $|a, \mathbf{p}\rangle \rightarrow |b, \mathbf{p} + \hbar\mathbf{k}\rangle$ et $|a, \mathbf{p}\rangle \rightarrow |a, \mathbf{p}\rangle \rightarrow |b, \mathbf{p} + \hbar\mathbf{k}\rangle$, chaque flèche symbolisant la traversée d'une onde. Les amplitudes associées à ces deux chemins interfèrent et on trouve que la probabilité $\mathcal{P}(a \rightarrow b)$ de changer d'état interne varie de manière sinusoidale en fonction de l'écart à résonance $\delta = \omega_L - \omega_A$ entre la fréquence des ondes laser ω_L et la fréquence atomique $\omega_A = (E_b - E_a)/\hbar$. Les oscillations correspondantes, appelées "franges de Ramsey", ont une période en δ égale à $2\pi/T$, ou T est le temps de vol de l'atome d'une onde à l'autre. Un tel résultat est valable pour une valeur donnée de la projection de la vitesse des atomes le long des ondes laser, c'est-à-dire encore pour une valeur donnée du déplacement Doppler $\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{p}/M$. On montre que la moyenne sur $\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}$, liée à la dispersion des vitesses des atomes incidents, brouille en général les franges de Ramsey. Un tel brouillage est dû au fait que le déphasage entre les deux perturbations "vues" par l'atome lors des deux traversées varie de manière importante d'un atome à l'autre. Plusieurs méthodes permettant d'éviter un tel brouillage et utilisant des ondes stationnaires ou des réseaux de fentes sont passées en revue et interprétées physiquement.

Echos de photons, franges de Ramsey et interférométrie atomique

Le cours se poursuit par l'analyse d'un certain nombre d'expériences où un atome traverse successivement plusieurs ondes laser progressives et où le signal intéressant ne s'annule pas lors de la moyenne sur les vitesses atomiques.

Un premier phénomène étudié est celui "d'écho de photons" à deux ondes progressives. Les atomes traversent deux ondes progressives parallèles séparées par une

distance L et on montre qu'une onde de densité de polarisation atomique, de même vecteur d'onde \mathbf{k} que les deux ondes laser, apparaît dans l'espace à une distance L de la deuxième onde laser.

La deuxième expérience analysée utilise deux paires d'ondes progressives se propageant en sens opposés, configuration proposée pour la première fois par Christian Bordé. Le calcul des probabilités de changement d'état interne $\mathcal{P}(a \rightarrow b)$ fait apparaître des franges de Ramsey qui ne se brouillent pas lors de la moyenne sur les vitesses atomiques.

Chacune de ces deux expériences est interprétée physiquement comme une expérience d'interférométrie atomique dans laquelle un paquet d'ondes incident est séparé en deux paquets d'ondes cohérents dont les centres suivent des trajectoires différentes et qui finissent par se recombiner à l'issue de la traversée des ondes laser. On montre ainsi qu'il existe un lien intéressant entre certaines expériences de spectroscopie laser à haute résolution sans effet Doppler et l'interférométrie atomique.

Fonctions d'onde, propagateurs et intégrales de chemin

Dans un interféromètre atomique, l'amplitude de probabilité de trouver la particule en un point donné \mathbf{r} et à un instant donné t , à la sortie de l'interféromètre, est une somme de deux amplitudes \mathcal{A}_I et \mathcal{A}_{II} correspondant aux deux chemins possibles suivis par l'atome dans l'interféromètre. Pour interpréter les signaux expérimentaux, il faut donc calculer \mathcal{A}_I et \mathcal{A}_{II} , et en particulier le déphasage entre ces deux amplitudes produit par des champs extérieurs ou inertiels. On peut en particulier se demander s'il est possible de ramener un tel calcul de fonctions d'ondes quantiques à des intégrales le long de chemins classiques.

Une démarche commode consiste alors à considérer le propagateur quantique $K(\mathbf{r}_b t_b, \mathbf{r}_a t_a)$, représentant l'amplitude de probabilité pour que la particule partant de \mathbf{r}_a à l'instant t_a arrive en \mathbf{r}_b à l'instant t_b . L'approche de Feynman, exprimant un tel propagateur comme une intégrale fonctionnelle sur tous les chemins possibles, est rappelée. Une telle approche utilise le Lagrangien et l'action et se prête particulièrement bien à l'étude de la limite classique. On montre qu'une telle formulation de la mécanique

quantique ressemble à un principe de Fresnel-Huygens dans l'espace-temps qui permet d'exprimer la fonction d'onde en $\mathbf{r}_b t_b$ sous la forme d'une superposition d'ondelettes rayonnées aux divers points \mathbf{r}_a à l'instant t_a . Le lien entre une telle approche et la formulation traditionnelle de la mécanique quantique est également explicité.

La formulation de Feynman se prête particulièrement bien aux situations où le Lagrangien est une fonction quadratique des coordonnées et des vitesses, ce qui est le cas pour un atome placé dans un champ de pesanteur ou dans un référentiel en rotation. On montre alors que :

$$K(\mathbf{r}_b t_b, \mathbf{r}_a t_a) = F(t_b, t_a) \exp \frac{i}{\hbar} S_{cl}(\mathbf{r}_b t_b, \mathbf{r}_a t_a) \quad (1)$$

où $F(t_b, t_a)$ est une fonction ne dépendant que de t_a et t_b et où $S_{cl}(\mathbf{r}_b t_b, \mathbf{r}_a t_a)$ est l'action classique évaluée le long du chemin classique réel reliant $\mathbf{r}_a t_a$ à $\mathbf{r}_b t_b$. C'est un tel résultat qui permettra par la suite de relier le déphasage à la sortie de l'interféromètre à des intégrales le long de chemins classiques.

Propagation d'une particule dans un champ de pesanteur

Un premier exemple important d'application de la formulation de Feynman est analysé en détail, celui de la détermination de la fonction d'onde d'une particule évoluant dans un champ de pesanteur. L'action classique $S_{cl}(\mathbf{r}_b t_b, \mathbf{r}_a t_a)$ est calculée à partir du Lagrangien classique. Le lien avec la formulation traditionnelle permet d'obtenir simplement la fonction $F(t_b, t_a)$ qui figure dans l'équation (1) (et qui ne dépend que de $T = t_b - t_a$). On montre également qu'il est possible de construire une transformation unitaire décrivant le passage dans un référentiel en chute libre et d'éliminer ainsi le champ de pesanteur des équations quantiques du mouvement, ce qui constitue une expression du principe d'équivalence. On montre enfin que, lorsque l'état initial de particule est, à l'instant t_a , une onde plane de vecteur d'onde \mathbf{k} , sa fonction d'onde au point \mathbf{r}_b à l'instant t_b se déduit de celle au point \mathbf{r}_a et à l'instant t_a par un simple facteur de phase, $\exp \frac{i}{\hbar} S_{cl}(\mathbf{r}_b t_b, \mathbf{r}_a t_a)$, les deux points d'espace-temps $\mathbf{r}_a t_a$ et $\mathbf{r}_b t_b$ étant reliés par une trajectoire classique réelle d'impulsion $\hbar \mathbf{k}$ en $\mathbf{r}_a t_a$ et $S_{cl}(\mathbf{r}_b t_b, \mathbf{r}_a t_a)$ étant l'action classique, en présence du champ de pesanteur, calculée le long de ce chemin. Lorsque

l'énergie potentielle Mgz de la particule de masse M dans le champ de pesanteur g est une petite perturbation. le résultat précédent peut prendre une forme encore plus simple. A l'ordre 1 en g , on peut alors se contenter d'utiliser les trajectoires classiques libres, calculées pour $g = 0$ et qui réduisent à des droites. Le déphasage supplémentaire dû au champ de gravitation se réduit alors à $\exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \oint Mgz(t)dt \right\}$ l'intégrale étant calculée le long des trajectoires classiques libres.

Les résultats précédents sont appliqués à l'interprétation de l'expérience de Colella, Overhauser et Werner qui est la première expérience d'interférence entre ondes de matière (en l'occurrence, des neutrons) mettant en évidence des effets quantiques sensibles au champ de pesanteur, c'est-à-dire dépendant à la fois de \hbar et g . Le déphasage entre les ondes de de Broglie associées au neutron et se propageant dans les deux bras d'un interféromètre situés à des hauteurs différentes est calculé en fonction de \hbar , g , M et des divers paramètres de l'expérience (surface S enfermée entre les deux bras de l'interféromètre, longueur d'onde de de Broglie λ_0 des neutrons incidents, angle φ entre la verticale et la normale au plan de l'interféromètre). L'ordre de grandeur du déphasage que l'on obtiendrait en remplaçant les neutrons par des photons est également évalué, ce qui permet de montrer à quel point les effets gravitationnels sont plus faciles à détecter sur des ondes de matière que sur des ondes lumineuses.

Une autre expérience, beaucoup plus récente, réalisée à Stanford par Kasevich et Chu est ensuite analysée. Les ondes de de Broglie qui interfèrent sont alors associées à des atomes de sodium et non à des neutrons. Cette expérience utilise des transitions Raman stimulées entre les deux niveaux hyperfins de l'atome de sodium, pour séparer un paquet d'ondes en deux composantes cohérentes entre elles, puis pour les recombinaison. Entre l'instant de séparation et l'instant de recombinaison, les centres des 2 paquets d'ondes se propagent à des hauteurs différentes, ce qui est à l'origine du déphasage gravitationnel qui apparaît entre eux. Après des rappels théoriques sur les transitions Raman stimulées et une discussion des avantages qu'elles offrent et qui sont essentiellement liés au fait que les deux niveaux internes atomiques qu'elles relient peuvent avoir une durée de vie très longue, on décrit les grandes lignes de l'expérience et on calcule

le déphasage gravitationnel entre les deux paquets d'ondes. Deux méthodes de calcul sont présentées, l'une sans aucune approximation, l'autre à l'ordre 1 en g . Les résultats obtenus sont discutés et la sensibilité de l'expérience pour des mesures de variations de g est évaluée.

Propagation d'une particule dans un référentiel tournant

Un autre exemple important d'application de l'interférométrie atomique est celui de la mesure des champs inertiels qui apparaissent dans un référentiel en mouvement de rotation par rapport à un référentiel galiléen. Il s'agit en quelque sorte de la généralisation à des ondes de matière de l'effet Sagnac bien connu pour des ondes lumineuses.

Comme l'expression du Lagrangien de la particule dans le référentiel tournant à la fréquence angulaire Ω est une fonction quadratique de la position \mathbf{r} de la particule et de sa vitesse $\dot{\mathbf{r}}$, la formulation de Feynman est particulièrement commode pour analyser un tel problème et l'expression (1) du propagateur quantique demeure valable. Comme dans le cas du champ de pesanteur, on peut montrer que, lorsque l'état initial de la particule est un état libre, on peut simplifier le résultat obtenu lorsqu'on se limite à l'ordre 1 en Ω . Le déphasage peut alors être évalué en ne considérant que les trajectoires libres, correspondant à $\Omega = 0$, et se réduit à $\exp \frac{i}{\hbar} \{ M \Omega \cdot \oint dt \mathbf{r}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t) \}$, l'intégrale étant calculée le long des trajectoires classiques libres. On peut ainsi montrer que le déphasage entre les ondes de Broglie se propageant dans les deux bras d'un interféromètre en mouvement de rotation à la vitesse angulaire Ω est donné, à l'ordre 1 en Ω , par $\delta\phi = 2M\Omega \cdot \mathbf{S}/\hbar$, \mathbf{S} étant la surface orientée comprise entre les deux bras de l'interféromètre.

Un tel résultat est appliqué à l'interprétation d'une expérience réalisée sur des neutrons par Werner, Staudenmann et Colella et qui est la première expérience sur des ondes de matière mettant en évidence des effets d'interférence sensibles à la rotation. La rotation intervenant dans cette expérience est celle de la terre, de sorte que $|\Omega|$ est très petit, de l'ordre de $7.5 \cdot 10^{-5}$ rad/sec. De plus, la surface S de l'interféromètre n'est plus que de 8.8 cm^2 . L'effet de la rotation terrestre est cependant clairement visible, ce qui montre la sensibilité des interféromètres à ondes de matière. Le calcul du déphasage dû

I-3

à la rotation dans un interféromètre à ondes lumineuses est brièvement rappelé (effet Sagnac). On trouve $\delta\phi = 8\pi\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{S}/\lambda_0 c$ ou λ_0 est la longueur d'onde lumineuse. Le gain de sensibilité d'un interféromètre à ondes de matière par rapport à un interféromètre à ondes lumineuses est donc de l'ordre de $Mc^2/\hbar\omega_0$ où $\hbar\omega_0$ est l'énergie des photons. On comprend ainsi pourquoi Michelson et Gale ont dû, pour détecter la rotation de la terre avec des ondes lumineuses, utiliser une surface d'interféromètre de l'ordre du km^2 .

D'autres expériences plus récentes, réalisées en Allemagne, ont permis de mettre en évidence l'effet Sagnac sur des ondes de de Broglie associées à des atomes neutres. Ces expériences utilisent deux paires d'ondes progressives se propageant dans des sens opposés, c'est-à-dire la même configuration laser que celle décrite précédemment pour l'observation de franges de Ramsey optiques ne se brouillant pas lors de la moyenne sur les vitesses atomiques. Après un calcul détaillé du déphasage dû à la rotation, on présente et discute les divers résultats expérimentaux obtenus : observation du doublet de recul, suppression d'une composante du doublet de recul, sensibilité à la phase des ondes laser, déphasage produit par un déplacement lumineux, sensibilité à la rotation.

Interféromètres atomiques utilisant des doubles fentes

Le cours de cette année se termine par une analyse des expériences d'interférométrie atomique à "division de front d'ondes", c'est-à-dire utilisant le passage des atomes à travers des microstructures, comme des doubles fentes, et réalisant donc pour les ondes de de Broglie atomiques l'équivalent de l'expérience des deux fentes d'Young en optique.

Le problème de base à résoudre est celui de la propagation d'une onde de de Broglie atomique à travers une fente. Ce problème est abordé dans le cadre de l'approximation de Kirchhoff et de l'approximation paraxiale. La signification physique de ces approximations est précisée et on montre qu'elles reviennent à traiter classiquement le mouvement de la particule perpendiculairement au plan de la fente, le mouvement de la particule dans le plan de la fente étant lui traité quantiquement. Deux cas sont envisagés, suivant qu'un champ de pesanteur \mathbf{g} perpendiculaire au plan de la fente est présent ou non. Ayant ainsi ramené le problème étudié à celui de la propagation tempo-

relle d'une particule dans un espace à deux dimensions, on peut utiliser les propagateurs de Feynman, correspondant à $\mathbf{g} = \mathbf{0}$ ou $\mathbf{g} \neq \mathbf{0}$, pour calculer à tout instant la fonction d'onde de la particule. Dans la zone de diffraction lointaine, deux causes de variation transversale de la fonction d'onde apparaissent alors clairement : d'une part, le déphasage dû à la propagation libre le long des trajectoires classiques et qui n'est autre que le facteur bien connu $\exp \frac{i}{\hbar} S_{cl}$; d'autre part, le changement de direction de la vitesse de la particule lors du passage à travers la fente qui fait apparaître un terme proportionnel à la transformée de Fourier spatiale de la fente et qui peut être interprété comme l'amplitude de probabilité pour que la particule incidente, d'impulsion $\hbar \mathbf{k}$, change d'impulsion lorsqu'elle traverse une fente de largeur finie. Les résultats obtenus sont aisément généralisés au cas où la particule traverse deux fentes parallèles et une expression simple est obtenue pour l'écart entre les franges d'interférences observables après traversée des deux fentes.

Deux séries d'expérience réalisées à Constance d'une part, à Tokyo d'autre part, ont permis d'observer de telles figures d'interférence. Ces expériences sont décrites et leurs résultats analysés à la lumière des calculs précédents. L'expérience de Constance utilise des atomes d'hélium métastable d'un jet supersonique et sa géométrie est telle que l'effet du champ de pesanteur est négligeable. L'expérience de Tokyo utilise un nuage d'atomes de Néon, préalablement piégés et refroidis par laser, et qu'on laisse ensuite tomber vers un système de deux fentes. Il est alors nécessaire de tenir compte de l'effet du champ de pesanteur. Il est possible également, dans ce cas, d'appliquer un champ électrique statique qui dévie transversalement la trajectoire des atomes.

D'autres expériences d'interférométrie atomique, à "division d'amplitude", utilisent le passage des atomes à travers un ensemble de réseaux périodiques de fentes qui séparent l'onde plane incidente en plusieurs ondes planes cohérentes entre elles, puis les recombinent (expériences réalisées au M.I.T. aux U.S.A.). Au lieu de réseaux de fentes, il est possible également d'utiliser le passage des atomes à travers des ondes laser stationnaires. Ces expériences seront analysées dans un cours ultérieur.

Rappel de quelques résultats importants

Propagateur quantique

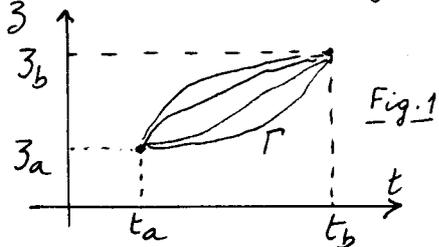
- Définition usuelle.

$$K(z_b t_b, z_a t_a) = K(b, a) = \langle z_b | U(t_b, t_a) | z_a \rangle \quad (1.1)$$

$U(t_b, t_a)$: opérateur d'évolution

Amplitude de probabilité de trouver la particule en z_b à l'instant t_b , sachant qu'elle est partie de z_a à l'instant t_a

- Approche de Feynman.



$$K(b, a) = \sum_{\Gamma} \exp\left\{ \frac{i S_{\Gamma}}{\hbar} \right\} \quad (1.2)$$

Γ : chemin quelconque d'espace-temps reliant $z_a t_a$ à $z_b t_b$, défini par $z(t)$

S_{Γ} : Action calculée le long de Γ

$$S_{\Gamma} = \int_{t_a}^{t_b} L(z(t), \dot{z}(t)) dt \quad (1.3)$$

$$L(z, \dot{z}) = \frac{1}{2} M \dot{z}^2 - V(z) \quad \text{Lagrangien} \quad (1.4)$$

- On peut montrer que les 2 approches sont équivalentes. L'approche de Feynman est bien adaptée à la limite classique.

Chemin classique - Action classique - Impulsion - Hamiltonien

- Chemin Γ_{cl} effectivement suivi par le système classique : Chemin pour lequel S_{Γ} est extrémal

Action correspondante : $S_{cl}(z_b t_b, z_a t_a)$

$$\frac{\partial}{\partial z_b} S_{cl}(z_b t_b, z_a t_a) = p_b \quad (1.5.a) \quad \frac{\partial}{\partial z_a} S_{cl}(z_b t_b, z_a t_a) = -p_a \quad (1.5.b)$$

$$\frac{\partial}{\partial t_b} S_{cl}(z_b t_b, z_a t_a) = -H_b \quad (1.6.a) \quad \frac{\partial}{\partial t_a} S_{cl}(z_b t_b, z_a t_a) = H_a \quad (1.6.b)$$

$p_b(p_a)$: Impulsions de la particule le long du chemin réel en $z_b t_b (z_a t_a)$

$H_b(H_a)$: Hamiltonien " " " " " "

- On en déduit
$$S_{cl} = \int_{\text{chemin } \Gamma_{cl}} (p dz - H dt) \quad (1.7)$$

- Développement de S_{cl} au voisinage de z_a

$$\begin{aligned} S_{cl}(z_b t_b, z_a + \xi t_a) &= S_{cl}(z_b t_b, z_a t_a) + \xi \frac{\partial}{\partial z_a} S_{cl} + \frac{1}{2} \xi^2 \frac{\partial^2}{\partial z_a^2} S_{cl} + \dots \\ &= S_{cl}(z_b t_b, z_a t_a) - \xi p_a - \frac{1}{2} \xi^2 \frac{\partial p_a}{\partial z_a} + \dots \end{aligned} \quad (1.8)$$

- Exemple simple : particule libre. Γ_{cl} = droite reliant $z_a t_a$ à $z_b t_b$

$$p_b = p_a = Mv = \frac{M(z_b - z_a)}{t_b - t_a} = \frac{M(z_b - z_a)}{T} \quad \text{avec } T = t_b - t_a \quad (1.9)$$

$$S_{cl} = \int_{t_a}^{t_b} \frac{1}{2} M v^2 dt = \frac{M v^2 T}{2} = \frac{M (z_b - z_a)^2}{2T} \quad (1.10)$$

$$S_{cl}(z_b t_b, z_a + \xi t_a) = M(z_b - z_a - \xi)^2 / 2T$$

$$= \underbrace{M(z_b - z_a)^2 / 2T}_{S_{cl}(z_b t_b, z_a t_a)} - \underbrace{\xi M(z_b - z_a) / T}_{P_a} + \frac{1}{2} \xi^2 \underbrace{M / T}_{-\partial P_a / \partial z_a}$$
(1.11)

On retrouve bien (1.8). Le développement s'arrête à l'ordre 2 car S est une fonction quadratique de z.

Expressions du propagateur pour des Lagrangiens quadratiques en z, ż

- Si L est quadratique en z, ż, on montre que

$$K(z_b t_b, z_a t_a) = F(t_b, t_a) \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} S_{cl}(z_b t_b, z_a t_a) \right\}$$
(1.12)

F : fonction ne dépendant que de t_b et t_a.

- Exemples importants de Lagrangiens quadratiques

• Particule libre $L = \frac{1}{2} M \dot{z}^2$ (1.13)

• Particule dans un champ de pesanteur $L = \frac{1}{2} M \dot{z}^2 - Mgz$ (1.14)

• Particule dans un référentiel tournant ($\vec{\Omega}$) $L = \frac{1}{2} M \dot{\vec{r}}^2 + M \dot{\vec{r}} \cdot (\vec{\Omega} \times \vec{r}) + \frac{M}{2} (\vec{\Omega} \times \vec{r})^2$ (1.15)

- Si L est quadratique en z, ż, S_{cl} est quadratique en z_a, z_b et le développement (1.8) s'arrête à l'ordre 2. On a alors, d'après (1.12)

$$K(z_b t_b, z_a + \xi t_a) = F(t_b, t_a) \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} S_{cl}(z_b t_b, z_a t_a) \right\} \times \exp\left\{ -\frac{i P_a \xi}{\hbar} \right\} \times \exp\left\{ \frac{i C}{\hbar} \xi^2 \right\}$$
(1.16)

avec $C = -\frac{1}{2} \partial P_a / \partial z_a = \frac{1}{2} \partial^2 S_{cl} / \partial z_a^2 = C(t_b, t_a)$ (1.17)

C est en effet indépendant de z_b, z_a car S_{cl} est quadratique en z_a, z_b

Propagation de la fonction d'onde

- $\Psi(z_b t_b) = \langle z_b | \Psi(t_b) \rangle = \langle z_b | U(t_b, t_a) | \Psi(t_a) \rangle$ (1.18)

$$= \int dz_a \langle z_b | U(t_b, t_a) | z_a \rangle \langle z_a | \Psi(t_a) \rangle = \int dz_a K(z_b t_b, z_a t_a) \Psi(z_a t_a)$$

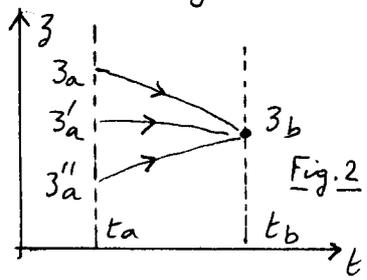


Fig. 2
Analogie avec un principe de Fresnel-Huygens. L'onde en z_b t_b est la superposition de toutes les ondes "rayonnées" en z_b t_b par les divers points sources z_a, z'_a, z''_a... du plan t_a.

Déphasage quantique et trajectoire classique

- Quels sont, dans le plan t = t_a, les points z_0 de phase stationnaire, c'est à dire tels que les diverses ondes rayonnées en z_b t_b par les points au voisinage de z_0 t_a soient toutes en phase ?

- Dans tout ce qui suit, on suppose L quadratique en z, ż et on part d'une onde plane en t_a, d'impulsion p_0

$$\Psi(z_a, t_a) = \exp\{ i p_0 z_a / \hbar \}$$
(1.19)

- z_b étant fixé, p_a est une fonction de z_a . Soit alors le point z_0 du plan t_a tel que $p_a = p_0$. Si l'on pose $z_a = z_0 + \xi$, il vient

$$\Psi(z_a, t_a) = \exp\{i p_0(z_0 + \xi)/\hbar\} = \Psi(z_0, t_a) \exp\{i p_0 \xi/\hbar\} \quad (1.20)$$

Par ailleurs, en remplaçant z_a par z_0 dans (1.16) et en utilisant $z_0 + \xi = z_a$, on obtient

$$K(z_b, t_b, z_a, t_a) = F(t_b, t_a) \exp\left\{\frac{i}{\hbar} S_{cl}(z_b, t_b, z_0, t_a)\right\} \times \exp\left\{-\frac{i p_0 \xi}{\hbar}\right\} \times \exp\left\{\frac{i C}{\hbar} \xi^2\right\} \quad (1.21)$$

Reportons alors (1.20) et (1.21) dans (1.18). Intégrer sur z_a revient à intégrer sur ξ . On constate alors que l'exponentielle $\exp\{i p_0 \xi/\hbar\}$ donnant la variation en ξ de $\Psi(z_a, t_a)$ est compensée par l'exponentielle $\exp\{-i p_0 \xi/\hbar\}$ de K . Le point z_0 est donc bien un point de phase stationnaire.

Reste l'intégrale du terme en ξ^2 qui donne

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{\frac{i C}{\hbar} \xi^2\right\} d\xi = \sqrt{\frac{i \pi \hbar}{C}} \quad (1.22)$$

Finalement, on obtient

$$\Psi(z_b, t_b) = F(t_b, t_a) \sqrt{\frac{i \pi \hbar}{C(t_b, t_a)}} \exp\left\{\frac{i}{\hbar} S_{cl}(z_b, t_b, z_0, t_a)\right\} \Psi(z_0, t_a) \quad (1.23)$$

- Résultat simple

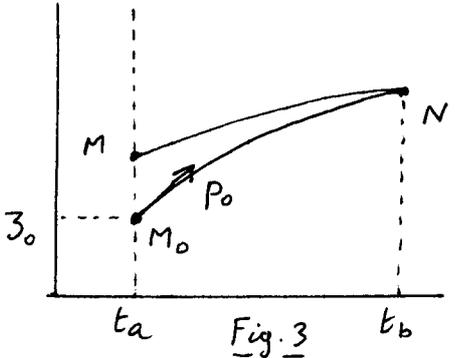


Fig. 3

Pour avoir la phase de la fonction d'onde au point $N(z_b, t_b)$, on prend la trajectoire classique arrivant en N et ayant l'impulsion p_0 à t_a . Cette trajectoire passe par le point $M_0(z_0, t_a)$.

Le déphasage quantique entre $\Psi(N)$ et $\Psi(M_0)$ est simplement $\exp\left\{\frac{i}{\hbar} S_{cl}(N, M_0)\right\}$ où $S_{cl}(N, M_0)$ est l'action classique le long de la trajectoire classique $M_0 N$.

$$\Psi(N) \sim \Psi(M_0) \exp\left\{\frac{i}{\hbar} S_{cl}(N, M_0)\right\} \quad (1.24)$$

- Soit M un point suffisamment proche de M_0 dans le plan t_a . Plus précisément $\xi_0 = |M_0 M|$ est supposé tel que

$$C \xi_0^2 / \hbar < 1 \quad (1.25)$$

Pour de tels points M , la dernière exponentielle (en ξ^2) de (1.21) est alors pratiquement égale à 1, et on peut alors considérer que les ondes rayonnées en N par M_0 et M sont exactement en phase

$$\Psi(M_0) \exp\left\{\frac{i}{\hbar} S_{cl}(N, M_0)\right\} \sim \Psi(M) \exp\left\{\frac{i}{\hbar} S_{cl}(N, M)\right\} \quad (1.26)$$

La condition (1.25) définit donc le voisinage de M_0 (en quelque sorte, une "première zone de Fresnel") tel que tous les points de ce voisinage rayonnent en phase en N .

Calcul perturbatif du déphasage

Position du problème

- Lagrangien L de la forme: $L = L_0 + \epsilon L_1$, $\epsilon \ll 1$ (1.27)
- Etat initial à t_a : onde plane p_0 (voir Eq. (1.19))
- Etat final à t_b
 - avec $\epsilon = 0$ $\Psi^{(0)}(z_b, t_b)$ (1.28.a)
 - avec $\epsilon \neq 0$ $\Psi(z_b, t_b)$ (1.28.b)
- Peut-on calculer simplement le déphasage entre $\Psi(z_b, t_b)$ et $\Psi^{(0)}(z_b, t_b)$ et exprimer ce déphasage en fonction d'une intégrale le long d'une trajectoire classique non perturbée ($\epsilon = 0$)?

Introduction de quelques chemins classiques

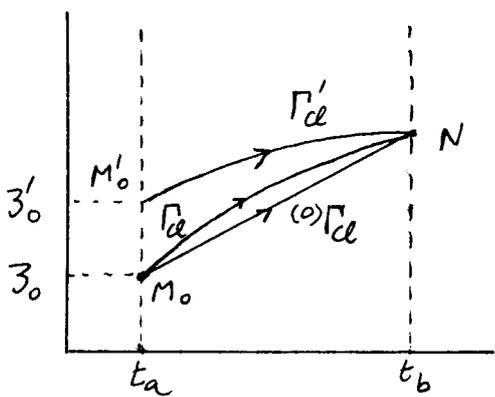


Fig. 4

- ${}^{(0)}\Gamma_{cl}$: Chemin classique (solution de équations du mouvement) non perturbé ($\epsilon = 0$) arrivant en $N(z_b, t_b)$ et d'impulsion p_0 en t_a . Part du point M_0
- Γ'_{cl} : Chemin classique perturbé ($\epsilon \neq 0$) arrivant en $N(z_b, t_b)$ et d'impulsion p_0 en t_a . Part de $M'_0 \neq M_0$.
- Γ_{cl} : Chemin classique perturbé ($\epsilon \neq 0$) reliant M_0 à N . N'a donc pas l'impulsion p_0 en t_a . Γ_{cl} et ${}^{(0)}\Gamma_{cl}$ différent à l'ordre 1 en ϵ

- D'après les résultats des paragraphes précédents (voir Eq. (1.24))

$$\Psi^{(0)}(N) \sim \Psi(M_0) \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{{}^{(0)}\Gamma_{cl}} L_0 dt \right\} \quad (1.29)$$

$$\Psi(N) \sim \Psi(M'_0) \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{\Gamma'_{cl}} L dt \right\} \quad (1.30)$$

- Si M'_0 est suffisamment proche de M_0 , dans la 1^{ère} "zone de Fresnel" autour de M_0 , on a d'après (1.26):

$$\Psi(M'_0) \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{\Gamma'_{cl}} L dt \right\} \approx \Psi(M_0) \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{\Gamma_{cl}} L dt \right\} \quad (1.31)$$

En comparant (1.30) et (1.31), on en déduit

$$\Psi(N) \sim \Psi(M_0) \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{\Gamma_{cl}} L dt \right\} \quad (1.32)$$

- Par ailleurs, Γ_{cl} et ${}^{(0)}\Gamma_{cl}$ sont 2 chemins ayant même origine et même extrémité. Comme Γ_{cl} est le chemin d'action extrême pour L et que Γ_{cl} et ${}^{(0)}\Gamma_{cl}$ diffèrent à l'ordre 1 en ϵ , on a

$$\int_{\Gamma_{cl}} L dt = \int_{{}^{(0)}\Gamma_{cl}} L dt + O(\epsilon^2) \quad (1.33)$$

En reportant (1.33) dans (1.32), puis en utilisant (1.29), on obtient à l'ordre 1 inclus en ϵ , et compte tenu de (1.27)

$$\begin{aligned} \Psi(N) &\sim \Psi(M_0) \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{{}^{(0)}\Gamma_{cl}} L dt \right\} = \underbrace{\Psi(M_0) \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{{}^{(0)}\Gamma_{cl}} L_0 dt \right\}}_{\Psi^{(0)}(N)} \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{{}^{(0)}\Gamma_{cl}} \epsilon L_1 dt \right\} \\ &\sim \Psi^{(0)}(N) \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{{}^{(0)}\Gamma_{cl}} \epsilon L_1 dt \right\} \end{aligned} \quad (1.34)$$

Récapitulation

$$\Psi(N) = \Psi^{(0)}(N) \exp(i \delta\Phi) \quad \delta\Phi = \frac{\epsilon}{\hbar} \int_{(0)P_A} L_1 dt \quad (1.35)$$

Pour calculer le déphasage $\delta\Phi$ entre $\Psi(N)$ et $\Psi^{(0)}(N)$, il suffit donc, à l'ordre 1 en ϵ , de calculer l'intégrale de la perturbation ϵL_1 le long de la trajectoire classique non perturbée arrivant en N

2 applications importantes en interférométrie atomique

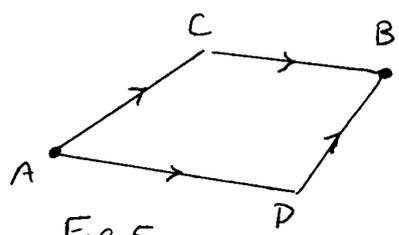


Fig. 5

En général, dans un interféromètre, on peut introduire 2 chemins classiques non-perturbés, partant tous 2 du même point A et arrivant au même point B. (Fig. 5)

- Déphasage gravitationnel $\delta\Phi_{grav}$ dû au champ de gravitation g entre les 2 amplitudes arrivant en B
 L_0 est donné par (1.13), L par (1.14). A l'ordre 1 en g on peut donc écrire, d'après (1.35)

$$\delta\Phi_{grav} = \frac{1}{\hbar} \oint_{ACBDA} (L - L_0) dt = - \frac{1}{\hbar} \oint_{ACBDA} Mg z dt \quad (1.36)$$

- Déphasage rotationnel dû à une rotation uniforme ($\vec{\Omega}$)
 L_0 est donné par (1.13), L par (1.15). A l'ordre 1 en Ω

$$\delta\Phi_{rot} = \frac{1}{\hbar} \oint_{ACBDA} M \vec{\Omega} \cdot (\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) dt = \frac{2}{\hbar} M \vec{\Omega} \cdot \vec{S} \quad (1.37)$$

où \vec{S} est la surface orientée du polygone orienté ACBDA

Problèmes abordés dans le cours 1993-94

- Diffraction d'ondes de de Broglie par des réseaux de fentes.
- Interféromètres atomiques utilisant des réseaux de fente.
- Diffraction d'ondes de de Broglie par des ondes stationnaires quasi-résonnantes.
 - Régime de Raman - Nath.
 - Régime de Bragg.
 - Effet magnéto-optique.
- Effet Stern et Gerlach optique.
- Effet de l'émission spontanée : transition entre la diffraction et la diffusion.
- Effets d'interférence liés au spin des atomes.
- Interférométrie à ondes multiples : cavités atomiques.