

Effets d'interférence quantiques pour un atome
 situé à un noeud d'une onde stationnaire

Buts de ce cours

Un atome situé à un noeud d'une onde stationnaire ne "voit" pratiquement pas de lumière et émet donc très peu de photons de fluorescence. La théorie standard des forces radiatives prédit cependant un coefficient de diffusion de l'impulsion de l'atome aussi important aux noeuds qu'aux ventres. Un tel résultat, étrange à 1^{ère} vue, est interprété ici en termes d'interférences quantiques entre amplitudes de diffusion et met en évidence un nouveau type de redistribution de photons entre 2 ondes progressives.

① Introduction

a) Rappel de résultats sur les forces radiatives.

On considère dans tout ce cours un atome placé dans une onde stationnaire quasi-résonnante et on se limite au domaine des faibles paramètres de saturation.

Paramètre de saturation

- Onde stationnaire $E_0 \sin k_L x \cos \omega_L t$ (7.1)

avec un noeud en $x = 0$

- Fréquence de Rabi en x (7.2)

$$\Omega_1(x) = \Omega_1^{\max} \sin k_L x$$

$\Omega_1^{\max}$: Fréquence de Rabi maximale, obtenue aux ventres

- Paramètre de saturation $S(x)$ en x .

$$S(x) = \frac{[\Omega_1(x)]^2 / 2}{\delta^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} = S_{\max} \sin^2 k_L x \quad (7.3)$$

$$S_{\max} = \frac{[\Omega_1^{\max}]^2 / 2}{\delta^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} \quad (7.4.a) \quad \delta = \omega_L - \omega_A \quad (7.4.b)$$

Γ : largeur naturelle de l'état excité e situé à une distance $\hbar\omega_A$ au dessus de l'état fondamental g .

- On suppose dans ce cours

$$S(x) \ll 1 \quad (7.5)$$

car le traitement présenté plus loin repose sur une étude perturbative des amplitudes de diffusion.

Largeur radiative $\hbar\Gamma'(x)$ et déplacement lumineux $\hbar\delta'(x)$ de l'état fondamental g d'un atome situé en x .

$$\Gamma'(x) = \Gamma \frac{S(x)}{2} \quad (7.6.a)$$

$$\delta'(x) = \delta \frac{S(x)}{2} \quad (7.6.b)$$

$\Gamma'(x)$ peut également être interprété comme la probabilité par unité de temps d'absorption (plus exactement, de diffusion) d'un photon par l'atome.

$\Gamma'(x)$ varie avec δ comme $\frac{\Gamma}{\Gamma^2 + \delta^2}$: courbe d'absorption de Lorentz.

$\Gamma'(x)$ décrit donc des processus dissipatifs

$\delta'(x)$ varie avec δ comme $\frac{\delta}{\Gamma^2 + \delta^2}$: courbe de dispersion. $\delta'(x)$ décrit donc des processus réactifs

A partir des équations de Bloch optiques, on trouve (voir, par exemple, [1] [2]) pour la vitesse de variation moyenne de l'impulsion atomique, c'est à dire encore pour la force moyenne agissant sur un atome :

$$\frac{d}{dt} \langle P \rangle = F(x) = -\frac{d}{dx} \hbar \delta'(x) = -\hbar \delta \frac{S_{\max}}{2} \frac{d}{dx} \sin^2 k_L x = -\hbar k_L \delta S_{\max} \sin k_L x \cos k_L x \quad (7.7)$$

Interprétation : à la limite $\delta(x) \ll 1$, l'atome est essentiellement dans g et le déplacement lumineux $\hbar \delta'(x)$ de g apparaît comme un potentiel dépendant de x dans lequel l'atome est plongé, et donnant naissance à une force égale (au signe près) au gradient spatial de ce potentiel.

Coefficient de diffusion de l'impulsion : D

$$\frac{d}{dt} (\langle P^2 \rangle - \langle P \rangle^2) = 2D \quad (7.8)$$

$2D$ est la vitesse de variation de l'écart quadratique de l'impulsion. On peut relier D à des fonctions de corrélation de l'opérateur force et calculer ces fonctions de corrélation à partir des équations de Bloch optiques et du théorème de régression quantique (voir [1] et [2], § 5). On trouve

$$D = D_{\text{fluo}} + D_{\text{laser}} \quad (7.9)$$

avec

$$D_{\text{fluo}} = \frac{1}{4} \hbar^2 k_L^2 \Gamma S_{\max} \sin^2 k_L x \quad (7.10)$$

$$D_{\text{laser}} = \frac{1}{4} \hbar^2 k_L^2 \Gamma S_{\max} \cos^2 k_L x \quad (7.11)$$

Interprétation de D_{fluo}

D_{fluo} provient des fluctuations d'impulsion dues au recul communiqué à l'atome par les photons de fluorescence émis dans des directions aléatoires.

D_{fluo} est nul aux nœuds, ce qui est compréhensible car il n'y a pratiquement pas de photons de fluorescence émis aux nœuds.

Difficultés d'interprétation de D_{laser}

D_{laser} est dû aux fluctuations des échanges d'impulsions entre atomes et photons laser, lors de processus d'absorption ou de redistribution. On trouve en (7.11) que D_{laser} est maximal aux nœuds et nul aux ventres. Ce résultat est, à première vue, difficile à comprendre.

(i) Aux nœuds, il n'y a pas d'absorption de photon.

(ii) Considérons maintenant les processus de redistribution, responsables des forces dipolaires. Si l'on se place à grand désaccord, pour pouvoir effectuer l'approximation séculaire et utiliser les images physiques de l'atome habillé, on trouve que la pente des niveaux habillés est nulle aux nœuds (voir Fig. 7 du cours III). L'image habituelle des fluctuations des forces dipolaires, dues à des changements de signe aléatoires de la force de gradient instantanée quand l'atome habillé saute par émission spontanée d'un niveau habillé de type 1 à un niveau habillé de type 2, ou vice versa (voir Ref [3]), conduirait ici à $D_{\text{laser}} = 0$ aux nœuds puisque cette force de gradient est toujours nulle aux nœuds. En fait, on peut montrer que l'approximation séculaire n'est plus suffisante pour calculer D_{laser} aux nœuds, même si δ est grand. Apparaissent alors des couplages non séculaires entre populations des niveaux habillés et cohérences entre niveaux habillés qui rendent difficile la recherche d'images physiques simples pour interpréter la non nullité de D_{laser} aux nœuds (et sa nullité aux ventres !)

b) Approche suivie dans ce cours (Ref. [2], § 6)

- (i) Pour l'état initial du champ laser, nous prendrons des états à 1 seul photon. Les motivations d'un tel choix sont les suivantes
- De tels états satisfont clairement la condition (7.5).
 - S'il est possible d'interpréter physiquement le résultat (7.11) avec de tels états, cela montrera que la non-nullité de D_{laser} aux noeuds n'est pas due à des processus multiphotoniques.
 - Il sera possible d'utiliser la théorie de la diffusion résonnante (matrice S) et de voir si le résultat (7.11) n'est pas dû à une interférence quantique entre amplitudes de diffusion.
- (ii) Au lieu de tracer sur l'état du champ de rayonnement pour étudier l'évolution de la matrice densité atomique réduite, nous garderons ici le vecteur d'état du système global $A+R$ (atome + champ de rayonnement) et nous étudierons son évolution au cours du temps
- Nous pourrions ainsi suivre l'évolution du photon initial et voir s'il est absorbé (disparition du photon incident et apparition d'un photon de fluorescence dans un mode initialement vide du champ) ou s'il est redistribué (transport du photon d'un mode initialement excité vers un autre mode initialement excité).
 - Puisque nous gardons l'état du système global $A+R$, il sera plus facile d'étudier les corrélations apparaissant entre A et R et de voir si elle jouent un rôle important dans le problème étudié.
- (iii) Avant d'étudier le cas d'un atome dans une onde stationnaire, nous commencerons par celui plus simple d'un atome dans une onde progressive, de manière à mettre en place le formalisme et à donner un premier exemple simple d'interférences quantiques entre amplitudes de diffusion.

② Cas simple d'un atome dans une onde plane progressivea - Hamiltonien - Etat initial

$$H = H_A + H_R + V_{AR} \quad (7.12)$$

$$H_A = \frac{\vec{p}^2}{2M} + \hbar \omega_A |e\rangle\langle e| \quad H_R = \sum_{\vec{k}E} \left(a_{\vec{k}E}^\dagger a_{\vec{k}E} + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega \quad (7.13)$$

$$V_{AR} = -i \vec{d} \cdot \sum_{\vec{k}E} \sqrt{\frac{\hbar \omega}{2 \epsilon_0 L^3}} \vec{E} a_{\vec{k}E} e^{i \vec{k} \cdot \vec{R}} + \text{h.c.} \quad (7.14)$$

Les $a_{\vec{k}E}^\dagger$ et $a_{\vec{k}E}$ sont les opérateurs de création et d'annihilation d'un photon $\vec{k} \vec{E}$. Ici, aussi bien le champ du vide que le champ incident sont traités quantiquement.

- A $t=0$, l'état de $A+R$ est :

$$|\Psi(t=0)\rangle = |\Psi_A\rangle \otimes |\Psi_R\rangle = |g, \vec{p}; \vec{k}_L \vec{E}_L\rangle \quad (7.15)$$

Atome dans l'état g , avec une impulsion $\vec{p}$, en présence d'un photon de vecteur d'onde $\vec{k}_L$ et de polarisation $\vec{E}_L$.

b - Amplitude de probabilité de rester dans l'état initial

- A l'instant $t=T$, l'état de $A+R$ est devenu (en représentation d'interaction par rapport à $H_A + H_R$):

$$|\Psi(T)\rangle = c(T) |g, p; \vec{k}_L \vec{E}_L\rangle + |\Psi_\perp(t)\rangle \quad (7.16)$$

où $|\Psi_T(t)\rangle$ représente la projection de $|\Psi(T)\rangle$ dans le sous-espace orthogonal à $|g, \vec{p}; \vec{k}_L \vec{E}_L\rangle$. On s'intéresse ici à l'amplitude de probabilité

$$C(T) = \langle g, \vec{p}; \vec{k}_L \vec{E}_L | U(T) | g, \vec{p}; \vec{k}_L \vec{E}_L \rangle \quad (7.17)$$

pour que le système A+R n'ait pas quitté l'état initial.

- Comme VAR décrit des processus d'absorption et d'émission à 1 photon, 2 amplitudes seulement contribuent à (7.17) à l'ordre 2 inclus en VAR, et sont représentées par les diagrammes des figures 1a et 1b. Ou rien ne se passe (ordre 0 - Fig. 1a), ou le photon incident est absorbé puis réémis (Ordre 2 - Fig. 1b)

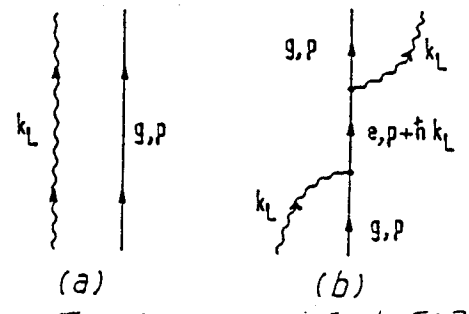


Fig. 1 (extraite de [2])

- Utilisant la théorie de la diffusion (voir par exemple [4], complément A_I), on obtient

$$C^{(0)}(T) = 1 \quad (7.18)$$

$$C^{(2)}(T) = -2\pi i \delta^{(T)}(E_{fin} - E_{in}) \frac{|\langle e, \vec{p} + \hbar \vec{k}_L; 0 | VAR | g, \vec{p}; \vec{k}_L \vec{E}_L \rangle|^2}{E_{g, \vec{p}; \vec{k}_L} - [E_{e, \vec{p} + \hbar \vec{k}_L; 0} - i\hbar \frac{\Gamma}{2}]} \quad (7.19)$$

Dans (7.19), $\delta^{(T)}$ est une fonction de diffusion

$$\delta^{(T)}(E) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_0^T d\tau e^{-iE\tau/\hbar} = e^{-iET/2\hbar} \frac{\sin(ET/2\hbar)}{\pi E} \quad (7.20)$$

exprimant la conservation de l'énergie (à $\hbar/T$ près) entre l'état initial et l'état final. Comme ici $E_{fin} = E_{in}$, on obtient en faisant tendre E vers 0 dans (7.20)

$$\delta^{(T)}(0) = \frac{T}{2\pi\hbar} \quad (7.21)$$

- Pour le numérateur de la fraction de (7.19), on obtient, compte tenu de (7.14)

$$|\langle e, \vec{p} + \hbar \vec{k}_L; 0 | VAR | g, \vec{p}; \vec{k}_L \vec{E}_L \rangle|^2 = d^2 \frac{\hbar \omega}{2\epsilon_0 L^3} = d^2 \mathcal{E}_\omega^2 = \hbar^2 \Omega_1^2 / 4 \quad (7.22)$$

d est l'élément de matrice entre e et g de la projection $\vec{E}_L \cdot \vec{d}$ du dipôle $\vec{d}$ sur $\vec{E}_L$. $\mathcal{E}_\omega^2$ peut être considéré comme le carré du champ électrique associé à 1 seul photon $\vec{k}_L \vec{E}_L$, Ω_1 la fréquence de Rabi correspondante.

Le dénominateur $\mathcal{D}$ de la fraction de (7.19) s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= E_g + \hbar \omega_L + \frac{\vec{p}^2}{2M} - (E_e - i\hbar \frac{\Gamma}{2}) - \frac{(\vec{p} + \hbar \vec{k}_L)^2}{2M} \\ &= \hbar(\delta + i\frac{\Gamma}{2}) - \hbar \frac{\vec{k}_L \cdot \vec{p}}{M} - \frac{\hbar^2 k_L^2}{2M} \end{aligned} \quad (7.23)$$

On a rajouté $-i\hbar \Gamma/2$ à l'énergie de l'état e pour tenir compte de l'instabilité radiative de cet état (voir par exemple [4], complément B_{III}).

Nous supposons que l'effet Doppler $\hbar \vec{k}_L \cdot \vec{p} / M$ et l'énergie de recul $\hbar^2 k_L^2 / 2M$ sont négligeables devant $\hbar \Gamma$, de sorte que

$$\mathcal{D} \approx \hbar(\delta + i\frac{\Gamma}{2}) \quad (7.24)$$

- En utilisant (7.21), (7.22) et (7.24), on obtient finalement :

$$C(T) = C^{(0)}(T) + C^{(2)}(T) = 1 - iT \frac{\Omega_1^2 / 4}{\delta + i\frac{\Gamma}{2}} = 1 - \frac{\Gamma'}{2} T - i\delta' T \quad (7.25)$$

avec

$$\Gamma' = \Gamma \frac{\Omega_1^2 / 4}{\delta^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} = \Gamma \frac{s_0}{2} \quad (7.26.a) \quad \delta' = \delta \frac{\Omega_1^2 / 4}{\delta^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} = \delta \frac{s_0}{2} \quad (7.26.b)$$

$s_0 = (\Omega_1^2 / 2) / [\delta^2 + (\Gamma^2 / 4)]$ étant le paramètre de saturation associé à 1 photon.

c - Discussion physique

- Les équations (7.26) sont très analogues aux équations (7.6), de sorte que $\hbar \Gamma'$ et $\hbar \delta'$ peuvent être interprétés comme étant la largeur radiative et le déplacement lumineux de l'état fondamental g dans le champ d'un seul photon $\vec{k}_L, \vec{E}_L$. D'ailleurs, (7.25) peut être considéré comme le début du développement de

$$c(T) \simeq e^{-i(\delta' - i\frac{\Gamma'}{2})T} \quad (7.27)$$

- Le calcul du paragraphe b précédent montre également que Γ' est associé à une interférence entre le champ incident et la partie imaginaire de l'amplitude de diffusion vers l'avant (coefficient de $-2\pi i \delta(E_{fin} - E_{in})$ dans (7.19)), alors que δ' fait intervenir une interférence entre le champ incident et la partie réelle de l'amplitude de diffusion vers l'avant.

③ Atome au noeud d'une onde stationnaire.

a) Etat initial du système atome + champ

Etat initial du champ

- Excitation élémentaire du mode $\sin k_L x$ contenant 1 seul photon. Développons cet état sur les états $|\vec{E}_L, +\vec{k}_L\rangle$ et $|\vec{E}_L, -\vec{k}_L\rangle$, que nous écrivons plus simplement $|\pm k_L\rangle$.

- Pour cela introduisons tout d'abord les opérateurs :

$$b_{k_L} = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_{k_L} - a_{-k_L}) \quad c_{k_L} = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_{k_L} + a_{-k_L}) \quad (7.28)$$

et leurs adjoints. Il est facile de vérifier que

$$b_{k_L} |0\rangle = 0 \quad [b_{k_L}, b_{k_L}^\dagger] = 1 \quad (7.29)$$

ce qui montre que $b_{k_L}^\dagger$ et b_{k_L} sont des opérateurs de création et d'annihilation d'un photon. Il en est de même de c_{k_L} et $c_{k_L}^\dagger$ qui, de plus, commutent avec b_{k_L} et $b_{k_L}^\dagger$.

- Par ailleurs, si, à partir du développement du champ $E(\vec{r})$ en ondes planes

$$E(\vec{r}) \sim i \sum_k E_{\omega_k} (a_k e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} - a_k^\dagger e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}}) \quad (7.30)$$

on regroupe les contributions des modes k_L et $-k_L$, on trouve

$$E(\vec{r}) \sim -i\sqrt{2} E_{\omega_L} b_{k_L} \sin k_L x + \text{Termes en } c_{k_L} \cos k_L x + \text{Contribution des autres modes} + h.c. \quad (7.31)$$

ce qui montre que $b_{k_L}^\dagger$ et b_{k_L} sont les opérateurs de création et d'annihilation d'un photon du mode $\sin k_L x$. Comme, d'après (7.28)

$$b_{k_L}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_{k_L}^\dagger - a_{-k_L}^\dagger) \quad (7.32)$$

on en déduit que l'état à 1 photon dans le mode $\sin k_L x$ s'écrit :

$$|\Psi_R\rangle = b_{k_L}^\dagger |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_{k_L}^\dagger - a_{-k_L}^\dagger) |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+k_L\rangle - |-k_L\rangle) \quad (7.33)$$

Superposition linéaire antisymétrique de 2 photons se propageant en sens opposés.

Etat initial de l'atome

- Etat interne : g . Etat externe : paquet d'ondes décrit par une fonction d'onde $\psi(x)$, réelle, paire en x , de transformée de Fourier c_p .

$$|\Psi_A\rangle = \sum_p c_p |g, p\rangle \quad (7.34)$$

c_p , fonction réelle de p , paire en p , centrée en $p=0$

- On suppose le paquet d'ondes très localisé au voisinage de $x=0$

$$\Delta x \ll \lambda_L \quad \longleftrightarrow \quad \Delta p \gg \hbar k_L \quad (7.35)$$

- En regroupant (7.33) et (7.34), on obtient pour l'état initial de A+R :

$$|\Psi_{in}\rangle = |\Psi(t=0)\rangle = |\Psi_A\rangle \otimes |\Psi_R\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_p c_p [|g, p; +k_L\rangle - |g, p; -k_L\rangle] \quad (7.36)$$

b) Amplitude de probabilité de rester dans l'un des états initialement peuplés

Définition de $\mathcal{A}_p^\pm$

A $t=0$, seuls les modes $+k_L$ et $-k_L$ sont, d'après (7.36), peuplés. Après un temps T , l'excitation des modes $+k_L$ et $-k_L$ aura changé, et d'autres modes, initialement vides, vont commencer à se peupler. On s'intéresse ici à l'évolution des modes initialement peuplés. Pour cela, on introduit les amplitudes

$$\mathcal{A}_p^\pm = \langle g, p; \pm k_L | U(T) | \Psi_{in} \rangle \quad (7.37)$$

de trouver, à l'instant T , le système dans l'état $|g, p; +k_L\rangle$ ou $|g, p; -k_L\rangle$.

Représentation diagrammatique des processus contribuant à $\mathcal{A}_p^\pm$

- A l'ordre 2 en VAR, 3 processus contribuent à $\mathcal{A}_p^\pm$ et sont représentés par les 3 diagrammes a, b, c de la figure 2.

(a) : rien ne se passe

(b) : le photon k_L est absorbé puis réémis.

(c) : le photon $-k_L$ est absorbé par l'atome dans l'état $g, p+2\hbar k_L$, qui passe alors dans l'état intermédiaire $e, p+\hbar k_L$, puis émet le photon k_L .

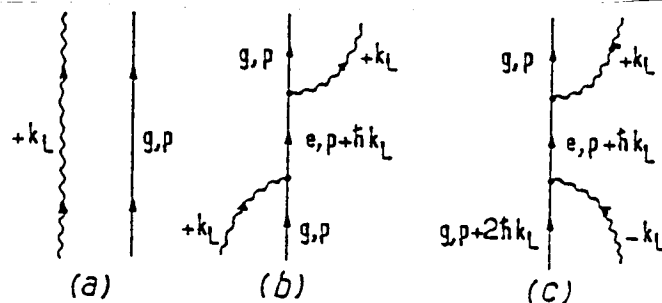


Fig. 2 (extrait de [2])

- La conservation de l'impulsion totale apparaît à chaque vertex de ces diagrammes. Les diagrammes (a) et (b) doivent être multipliés par $c_p/\sqrt{2}$, amplitude de probabilité d'avoir initialement l'atome dans l'état $|g, p; +k_L\rangle$; alors que le diagramme (c) doit être multiplié par $-c_{p+2\hbar k_L}/\sqrt{2}$, amplitude d'être initialement dans $|g, p+2\hbar k_L; -k_L\rangle$. Les 3 diagrammes (a), (b), (c), aboutissent au même état final, mais partent d'états initiaux différents. C'est uniquement parce que $|\Psi_{in}\rangle$ est une superposition linéaire de $|g, p; k_L\rangle$ et $|g, p+2\hbar k_L; -k_L\rangle$ que (c) peut interférer avec (a) et (b).

Problème de la conservation de l'énergie

- Pour (a) et (b), les états initial et final coïncident, de sorte que $E_{fin} - E_{in} = 0$ et on peut utiliser (7.21).

- Par contre, pour (c), on a

$$E_{fin} - E_{in} = \frac{p^2}{2m} - \frac{(p+2\hbar k_L)^2}{2m} = -\frac{2\hbar k_L p}{m} - \frac{2\hbar^2 k_L^2}{m} \approx -\frac{2\hbar k_L \Delta p}{m} \quad (7.38)$$

puisque $p \sim \Delta p \gg \hbar k_L$ d'après (7.35). La fonction $\delta^{(T)}(E_{fin} - E_{in})$ apparaissant dans l'amplitude associé à (c) a une largeur de l'ordre de $\hbar/T$. Si

$$E_{fin} - E_{in} \approx \frac{\hbar k_L \Delta p}{m} \ll \frac{\hbar}{T} \quad (7.39)$$

on peut remplacer $E_{fin} - E_{in}$ par 0 et utiliser de nouveau (7.21).

- Pour interpréter physiquement (7.39), réécrivons cette équation sous la forme :

$$\frac{\Delta p}{M} T \ll \frac{1}{k_L} = \lambda_L$$

(7.40)

VII-7

Il faut que T soit suffisamment court pour que l'étalement du paquet d'ondes pendant T , $\Delta p T / M$, reste petit devant la longueur d'onde. Autrement, il ne serait plus possible de considérer que l'atome reste localisé au voisinage d'un nœud pendant le temps T .

Calcul de $\mathcal{A}_p^+$

- Même type de calculs que pour le § 2. Mêmes éléments de matrice, même dénominateur d'énergie. Comme on est intéressé ici par le coefficient de diffusion D qui ne dépend que de Γ' (voir (7.10) et (7.11)), on suppose pour simplifier $\delta = 0 \rightarrow \delta' = 0$

(7.41)

- On obtient alors

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_p^+ &= \frac{1}{\sqrt{2}} c_p - \frac{1}{\sqrt{2}} c_p \frac{\Gamma' T}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} c_{p+2\hbar k_L} \frac{\Gamma' T}{2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[c_p - \frac{\Gamma' T}{2} (c_p - c_{p+2\hbar k_L}) \right] \end{aligned} \quad (7.42)$$

où les 3 termes de la 1^{ère} ligne de (7.42) sont respectivement associés aux 3 diagrammes (a) (b) (c) de la figure 2.

- A la limite $\Delta p \rightarrow \infty$, $c_p - c_{p+2\hbar k_L} \rightarrow 0$ et $\mathcal{A}_p^+$ ne dépend plus de T . L'interférence entre (b) et (c) est alors parfaitement destructive et supprime toute absorption. En fait, Δp ne peut pas être infini (car $|\psi_A\rangle$ serait alors de norme infinie). Un développement de $c_p - c_{p+2\hbar k_L}$ en puissances de

$$\varepsilon = \frac{\hbar k_L}{\Delta p} \sim \frac{\Delta x}{\lambda} \quad (7.43)$$

permet de transformer (7.42) en

$$\mathcal{A}_p^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} c_p \left[1 + \Gamma' T \left(\hbar k_L \frac{c'_p}{c_p} + \hbar^2 k_L^2 \frac{c''_p}{c_p} + \dots \right) \right] \quad (7.44)$$

Calcul de $\mathcal{A}_p^-$

- Des calculs analogues peuvent être faits pour les 3 diagrammes (a), (b), (c), de la figure 3 qui contribuent à l'amplitude $\mathcal{A}_p^-$.

- L'équation correspondant à (7.42) et (7.44) s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_p^- &= -\frac{1}{\sqrt{2}} c_p + \frac{1}{\sqrt{2}} c_p \frac{\Gamma' T}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} c_{p-2\hbar k_L} \frac{\Gamma' T}{2} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}} c_p \left[1 - \Gamma' T \left(\hbar k_L \frac{c'_p}{c_p} - \hbar^2 k_L^2 \frac{c''_p}{c_p} + \dots \right) \right] \end{aligned} \quad (7.45)$$

Récapitulation

En regroupant (7.44) et (7.45), on obtient finalement pour l'état du système $A+R$ à l'instant $t=T$, à l'ordre 2 inclus en V_{AR} et ε

$$\begin{aligned} |\psi(T)\rangle &= \sum_p c_p |g, p\rangle \otimes \\ &\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 + \Gamma' T \hbar k_L \frac{c'_p}{c_p} + \Gamma' T \hbar^2 k_L^2 \frac{c''_p}{c_p} \right) | +k_L \rangle - \right. \\ &\left. - \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 - \Gamma' T \hbar k_L \frac{c'_p}{c_p} + \Gamma' T \hbar^2 k_L^2 \frac{c''_p}{c_p} \right) | -k_L \rangle \right\} + \\ &+ \text{Etats faisant intervenir des modes autres que } \pm k_L \end{aligned} \quad (7.46)$$

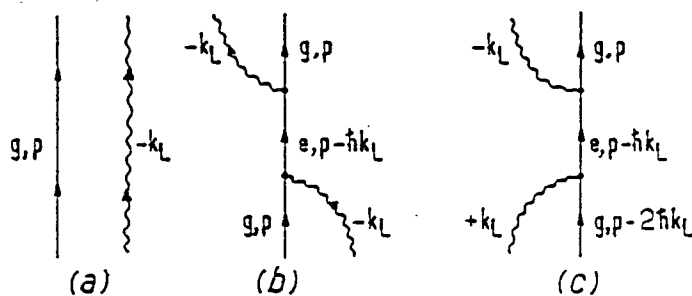


Fig. 3 (extraite de [2])

c) Corrélations apparues entre atome et photon

- A l'instant T , chaque état atomique $|g, p\rangle$ se retrouve multiplié tensoriellement par un état de photon $|\Psi_R(p, T)\rangle$, qui dépend de p , et qui est donné par l'expression entre crochets de (7.46).
- A cause de la dépendance en p de $|\Psi_R(p, T)\rangle$ (via c'_p/c_p et c''_p/c), la projection de $|\Psi(T)\rangle$ dans le sous-espace des états initialement peuplés $\{|g, p; \pm k_L\rangle\}$ (3 premières lignes de (7.46)), n'est plus un produit tensoriel d'un état de A par un état de R , comme c'était le cas pour l'état initial (7.36). Des corrélations quantiques sont donc apparues entre l'atome et le photon par suite de leur interaction.

d) Absorption du photon initial

- La probabilité de trouver un photon dans l'un des 2 modes $+k_L$ et $-k_L$ est égale à 1 dans l'état initial (7.36). A l'instant T , cette probabilité s'obtient en prenant la trace par rapport aux variables de A et R de la matrice densité associée aux 3 premières lignes de (7.46). On obtient, à l'ordre 2 inclus en ϵ et V_{AR}

$$\int dp c_p^2 \langle \Psi_R(p, T) | \Psi_R(p, T) \rangle = 1 + 2\Gamma'T \hbar^2 k_L^2 \int dp c_p c_p'' \\ = 1 - 2\Gamma'T \hbar^2 k_L^2 \int dp c_p'^2 \quad (7.47)$$

Une intégration par parties a été effectuée pour passer de la 1^{ère} à la 2^{ème} ligne.

- Le 2^{ème} terme de la 2^{ème} ligne de (7.47) est négatif et décrit la disparition du photon initial. Comme $c'_p \sim c_p / \Delta p$ et que $\int dp c_p^2 = 1$, cette absorption du photon initial est en $(\hbar k_L / \Delta p)^2 = \epsilon^2 = (\Delta x / \lambda_L)^2$.

Interprétation: A cause de son extension spatiale finie Δx , le paquet d'ondes explore l'onde stationnaire au voisinage du nœud sur une distance de l'ordre de Δx , et "voit" donc une intensité non nulle, variant en $\sin^2 k_L \Delta x \sim k_L^2 \Delta x^2 = (\Delta x / \lambda_L)^2 \sim \epsilon^2$, qui provoque donc une absorption proportionnelle à ϵ^2 .

e) Redistribution du photon initial

- Si on se limite à l'ordre 1 en ϵ , $|\Psi_R(p, T)\rangle$ s'écrit

$$|\Psi_R(p, T)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 + \Gamma'T \hbar k_L \frac{c'_p}{c_p} \right) | +k_L \rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 - \Gamma'T \hbar k_L \frac{c'_p}{c_p} \right) | -k_L \rangle \quad (7.48)$$

et garde une norme constante égale à 1 quand T croît.

- Le fait qu'aucune absorption n'apparaisse à l'ordre 1 en ϵ ne signifie pas cependant que rien n'arrive au photon initial qui était dans l'état (7.33). Il apparaît clairement sur (7.33) et (7.48) que la probabilité P_+ (resp. P_-) d'avoir ce photon dans le mode $+k_L$ (resp. $-k_L$) change au cours du temps de $P_{\pm}(0)$ à $P_{\pm}(T)$

$$P_{\pm}(0) = \frac{1}{2} \rightarrow P_{\pm}(T) = \frac{1}{2} \pm \Gamma'T \hbar k_L \frac{c'_p}{c_p} \quad (7.49)$$

La probabilité d'occupation de l'un des 2 modes $+k_L$ ou $-k_L$ croît alors que la probabilité d'occupation ^(de l'autre mode) décroît de la même quantité. Un tel phénomène correspond à une redistribution du photon incident entre les 2 modes initialement peuplés $\pm k_L$ et produit un changement δp_R de l'impulsion du rayonnement égale à

$$\delta p_R = 2\hbar k_L \left(\Gamma'T \hbar k_L \frac{c'_p}{c_p} \right) = 2\Gamma'T \hbar^2 k_L^2 \frac{c'_p}{c_p} \quad (7.50)$$

La conservation de l'impulsion totale entraîne un changement opposé de l'impulsion atomique (VII-9)

$$\delta p_A = -\delta p_R = -2\Gamma'T\hbar^2 k_L^2 \frac{c'_p}{c_p} \quad (7.51)$$

- Une caractéristique importante de la redistribution décrite par (7.49) est qu'elle dépend (via c'_p/c_p) de l'impulsion atomique p . Montrons maintenant comment une telle

"redistribution corrélée" peut expliquer la diffusion d'impulsion aux noeuds. La figure 3 représente les variations avec p de c_p^2 (qui ressemblent à celles de c_p qui est réel).

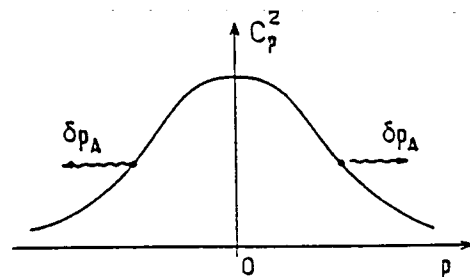


Fig 3 (extraite de [2])

Prenons une valeur positive de p où $c'_p/c_p < 0$.

L'équation (7.51) montre que, pour une telle valeur de p , la redistribution corrélée produit une variation positive, δp_A , de p (flèche orientée vers la droite de la figure 3). De même, on trouverait à partir de (7.51) une variation négative δp_A de p , pour $p < 0$ (flèche orientée vers la gauche).

Comme δp_A est, comme c'_p/c_p , une fonction impaire de p , on en déduit que la redistribution corrélée, décrite par (7.49), produit un élargissement de la distribution d'impulsion atomique (donc une diffusion d'impulsion), sans aucun déplacement global.

f) Calcul du coefficient de diffusion d'impulsion

- Le raisonnement précédent peut être rendu plus quantitatif. Pour un atome d'impulsion $p_A = p$, la variation δp_A de p_A produit une variation de p_A^2 donnée par

$$\delta(p_A^2) = 2p_A \delta p_A = 2p \delta p_A = -4\Gamma'T\hbar^2 k_L^2 p \frac{c'_p}{c_p} \quad (7.52)$$

- Pour moyenner (7.52) sur $p_A = p$, il faut multiplier (7.52) par la probabilité $c_p^2 dp$ d'avoir p_A compris entre p et $p+dp$, puis intégrer sur p , ce qui donne

$$\overline{\delta p_A^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta p_A^2 c_p^2 dp = -4\Gamma'T\hbar^2 k_L^2 \int_{-\infty}^{+\infty} p c_p c'_p dp \quad (7.53)$$

Une intégration par parties et le fait que $\int c_p^2 dp = 1$ donnent finalement

$$\overline{\delta p_A^2} = 2DT \quad (7.54)$$

$$\text{avec} \quad D = \hbar^2 k_L^2 \Gamma' = \hbar^2 k_L^2 \Gamma \frac{s_0}{2} = \hbar^2 k_L^2 \Gamma \frac{s_{\max}}{4} \quad (7.55)$$

On a utilisé (7.26.a) où s_0 est le paramètre de saturation associé à 1 photon $+k_L$ (ou $-k_L$) et le fait que dans l'état à 1 seul photon (7.33) du mode $\sin k_L x$, $S(x) = 2s_0 \sin^2 k_L x$ de sorte que $\overline{S(x)} = s_0$ et $s_{\max} = 2s_0$. On retrouve exactement la valeur de (7.11) à un noeud.

g) Récapitulation des résultats obtenus

(i) A un noeud d'une onde stationnaire apparaît une redistribution de photons entre les 2 modes $+k_L$ et $-k_L$ qui est plus importante que l'absorption puisqu'elle apparaît dès l'ordre 1 en $\varepsilon = \Delta x/\lambda_L$ (au lieu de 2)

- (ii) Cette redistribution est proportionnelle à $\bar{p}'$ et non à δ' . Elle est donc liée à la réponse dissipative de l'atome.
- (iii) Globalement, cette redistribution change $\overline{p_A^2}$ et non $\overline{p_A}$. Elle produit une diffusion d'impulsions, mais pas de force.
- (iv) Cette redistribution est corrélée avec l'impulsion atomique. C'est cette corrélation qui explique pourquoi la vitesse d'accroissement de p_A^2 ne s'annule pas à la limite $\Delta x \sim \hbar/\Delta p \rightarrow 0$. Dans l'équation (7.52) donnant $\delta p_A^2 = 2 p_A \delta p_A$, le fait que p_A augmente proportionnellement à Δp quand Δp croît compense la décroissance de δp_A qui varie, d'après (7.51) comme $C_p/c_p \sim 1/\Delta p$. C'est cette compensation qui conduit à un coefficient de diffusion D indépendant de Δp .

Notons enfin l'importance des corrélations A-R apparaissant dans l'expression (7.46) de l'état de A+R à l'instant T. Ceci ne veut pas dire que les traitements habituels, basés sur l'équation pilote décrivant l'évolution de la matrice densité atomique réduite, négligent ces corrélations. On en tient compte dans la dérivation de l'équation pilote. Le fait qu'elles apparaissent ici explicitement dans (7.46) (et non implicitement) explique pourquoi le traitement présenté dans ce cours permet d'identifier plus aisément les effets physiques à l'origine de la valeur non nulle de D_{Laser} à un noyau

Remarque : Il est possible de généraliser le traitement présenté ici à un atome placé en un point quelconque d'une onde stationnaire et éventuellement animé d'une vitesse initiale non nulle (voir Ref. [2]). On peut alors rendre compte de plusieurs effets physiques

- Force moyenne s'exerçant sur l'atome quand $\delta \neq 0$, et qui apparaît comme étant associée à une redistribution de photons entre $+k_L$ et $-k_L$, non corrélée avec l'impulsion atomique, et proportionnelle à δ' et non plus à $\bar{p}'$ (effet réactif)
- Valeur nulle de D_{Laser} à un vent.
- Possibilité d'ajouter indépendamment les pressions de radiation des ondes $+k_L$ et $-k_L$ quand l'atome, animé d'une vitesse initiale v_0 , parcourt plusieurs λ_L pendant T et qu'on s'intéresse uniquement à la moyenne spatiale de la force qui agit sur lui.

Références

- [1] J.P. Gordon, A. Ashkin, Phys. Rev. A21, 1606 (1980)
- [2] C. Cohen-Tannoudji, in Les Houches, Session LIII, 1990, Fundamental systems in Quantum Optics, ed. by J. Dalibard, J.M. Raimond, J. Zinn-Justin (Elsevier, 1992)
- [3] J. Dalibard, C. Cohen-Tannoudji, J.O.S.A. B2, 1707 (1985)
- [4] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, G. Grynberg, Procèsus d'interaction entre photons et atome (InterEditions et Editions du CNRS, Paris 1988). Traduction anglaise : Atom-Photon Interactions (Wiley, 1992).