

Une nouvelle description du refroidissement subrecul : Piégeage et recyclage

① Introduction

Les difficultés des méthodes traditionnelles

- Toutes les approches théoriques évoquées dans le § 9 du chapitre précédent (page IV.6 et suivantes) pour analyser quantitativement le refroidissement subrecul deviennent de moins en moins précises aux temps d'interaction Θ très longs, et ce d'autant plus que le nombre de dimensions d'espace refroidies est plus élevé. Les temps de calcul deviennent prohibitivement longs et il devient très difficile d'évaluer les performances du refroidissement VSCPT à la limite $\Theta \rightarrow \infty$.
- Il serait pourtant important de pouvoir répondre de manière précise à un certain nombre de questions : la proportion d'atomes refroidis tend-elle vers 0 ou vers une limite finie quand $\Theta \rightarrow \infty$? Comment varie la largeur δp de la distribution en impulsions $\mathcal{P}(p)$ des atomes ? La densité dans l'espace des phases croît-elle avec Θ ? ...

Motivations d'une telle étude.

- Le but de ce chapitre et des 3 suivants est de présenter une nouvelle approche au refroidissement subrecul qui permet d'apporter des éléments de réponse aux questions précédentes. Cette approche s'applique aussi bien au refroidissement VSCPT qu'au refroidissement Raman. Elle repose sur une schématisation du refroidissement subrecul par un modèle suffisamment simple pour permettre des calculs analytiques tout en conservant les ingrédients essentiels qui caractérisent un tel refroidissement. Elle permet d'établir des liens fructueux entre le refroidissement laser et la description statistique des processus de diffusion anormaux ("vols de Lévy").
- Une telle étude a été faite en collaboration avec Jean-Philippe Bouchaud, et représente une partie importante du travail de thèse de François Bardou [1].

② Modélisation du refroidissement subrecul par une marche aléatoire.

Le modèle

- Comme le suggèrent les résultats des simulations Monte-Carlo [voir Fig. 12 page IV-8] et les considérations du § 8.4 du chapitre précédent (page IV.5) sur la durée de vie des états quasi-stationnaires, l'évolution de l'impulsion de l'atome (plus exactement de la quasi-impulsion p caractérisant la famille d'états couplés par V_{AL}) est une marche au hasard dans l'espace des p . La longueur de chaque pas est de l'ordre de $\hbar k$. La probabilité $P'(p)$ par unité de temps de chaque saut dépend de p et tend vers 0 comme p^2 quand $p \rightarrow 0$.
- En l'absence de refroidissement Sisyphus, l'impulsion de l'atome peut diffuser jusqu'à l'infini (Fig. 1a). Aux très grandes valeurs de p , il y a une décroissance de $P'(p)$ liée au désaccord Doppler sur la raie optique qui devient suffisamment grand pour diminuer le taux d'absorption. En présence de pré-refroidissement Sisyphus, la diffusion de p est limitée par une friction qui ramène p vers 0. Nous modéliserons une telle friction par des "murs" qui empêchent l'atome de diffuser au delà d'une certaine valeur p_{max} et qui le réfléchissent dès que $|p|$ atteint p_{max} (Fig. 1b)

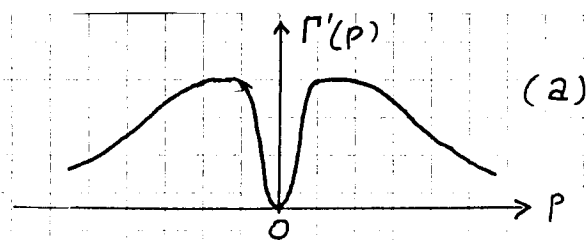
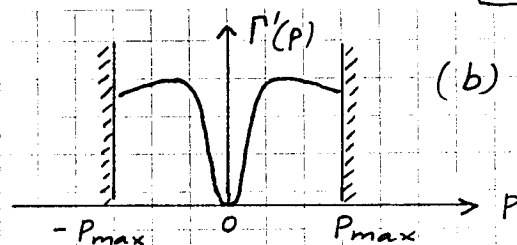


Fig. 1



Les insuffisances d'un tel modèle et comment peut-on le justifier.

- Une telle schématisation du refroidissement VSCPT est extrême.
 - (i) Elle décrit l'état de l'atome entre 2 sauts par un seul nombre : la quasi-impulsion p alors qu'en réalité un tel état est décrit par une fonction d'onde qui évolue à l'intérieur d'un sous-espace analogue à celui de la figure 10 page IV.3.
 - (ii) La probabilité de chaque saut ne dépend que de p et elle est décrite par un seul taux $\Gamma'(p)$. En réalité, la fonction délai qui donne la distribution des intervalles de temps séparant 2 sauts successifs est une superposition de plusieurs exponentielles, 6 dans le cas simple de la figure 11 page IV.4, une infinité dans le cas plus général de la figure 10. De plus, le poids de chaque exponentielle dépend de l'état de l'atome après chaque saut.
 - (iii) Le modèle ne tient compte d'aucune dépendance spatiale des phénomènes. Le pré-refroidissement SiSyphé est en particulier décrit par de murs dans l'espace des p , alors que nous avons vu dans les cours II et III que les taux de transferts de l'état non couplé vers l'état couplé avaient une forte dépendance spatiale.
- En fait, les insuffisances précédentes ne sont pas trop graves aux temps très longs, quand la dispersion δp des valeurs de l'impulsion est devenue plus petite que $\hbar k$. L'atome est alors délocalisé dans l'onde laser ($\lambda_{\text{de Broglie}} > \lambda_{\text{laser}}$) et les dépendances spatiales sont moyennées. Nous verrons également plus loin qu'une propriété essentielle du refroidissement subrésonant est l'existence de "temps de piégeage" très longs de l'atome au voisinage de $p=0$. Or ces temps très longs sont les durées de vie des états quasi-noirs, c'est à dire les inverses des taux $\Gamma'(p)$ les plus petits, ceux qui tendent vers 0 quand $p \rightarrow 0$. Le fait de ne garder qu'un taux $\Gamma'(p)$ dans les modèles des figures 1a et 1b, celui qui tend vers 0 quand $p \rightarrow 0$, permet donc de décrire correctement la queue aux temps très longs de la distribution des temps de piégeage de l'atome au voisinage de $p=0$. On peut ainsi rendre compte, à des préfacteurs près, de la dépendance temporelle de l'efficacité du refroidissement. Enfin, le fait que le refroidissement SiSyphé s'effectue avec une constante de temps beaucoup plus courte que le refroidissement VSCPT permet de justifier le modèle très schématisé de la figure 1b. Les murs de cette figure en $|p| = P_{\text{max}}$ font qu'un atome qui s'échappe du piège au voisinage de $p=0$ revient dans le piège au bout d'un temps beaucoup plus court que les temps pendant lesquels il peut rester piégé.

③ Piégeage et recyclage

Un piège dans l'espace des impulsions

- Introduisons dans l'espace des impulsions une zone définie par

$$|p| < p_{\text{trap}} \quad (5.1)$$

et constituant ce que nous appellerons un piège. Un atome satisfaisant (5.1) sera dans le piège. Un atome tel que $|p| > p_{\text{trap}}$ sera hors du piège.

- Le choix de p_{trap} est arbitraire. En principe, pour des temps d'interaction $\odot$ suffisamment longs, la dispersion Δp d'impulsion sera plus petite que p_{trap} et les résultats du modèle ne devraient pas dépendre du choix particulier fait pour p_{trap} .

Phases de piégeage et phases de diffusion hors du piège.

- Revenons aux simulations Monte-Carlo de la figure 12 page IV-8. L'impulsion de l'atome varie aléatoirement au cours du temps et $|p|$ passe successivement de valeurs inférieures à p_{trap} à des valeurs supérieures à p_{trap} . L'évolution au cours du temps apparaît donc comme une succession de phases de piégeage (notées P sur la figure 2) alternant avec des phases de diffusion hors du piège (notées H).

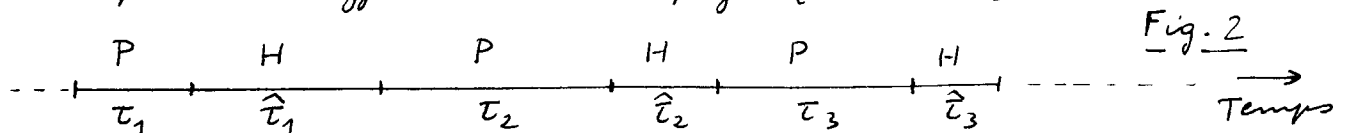


Fig. 2

- Nous noterons $\tau_1, \tau_2, \tau_3 \dots$ les durées des phases de piégeage, $\hat{\tau}_1, \hat{\tau}_2, \hat{\tau}_3 \dots$ les durées des phases de diffusion hors du piège. Les $\hat{\tau}_i$ sont en fait des temps de premier retour dans le piège. Les τ_i sont des variables aléatoires indépendantes de même que les $\hat{\tau}_i$.

Distributions des temps de piégeage et des temps de premier retour

- Nous noterons $P(\tau)$ la distribution des temps de piégeage, $\hat{P}(\hat{\tau})$ la distribution des temps de premier retour. Un premier problème à résoudre est de déterminer ces 2 distributions à partir des caractéristiques $[P'(p), p_{\text{max}} \dots]$ qui définissent les modèles des figures 1a et 1b.
- Une fois $P(\tau)$ et $\hat{P}(\hat{\tau})$ calculées, on peut alors s'intéresser au temps total passé dans le piège et hors du piège après N phases alternées de piégeage et de diffusion hors du piège

$$T(N) = \sum_{i=1}^N \tau_i \quad \hat{T}(N) = \sum_{i=1}^N \hat{\tau}_i \quad (5.2)$$

La comparaison de $T(N)$ et $\hat{T}(N)$ permettra de voir si l'atome passe la majeure partie de son temps dans le piège ou hors du piège, et d'évaluer ainsi l'efficacité du refroidissement.

- A première vue, comme les variables τ_i sont indépendantes, de même que les $\hat{\tau}_i$, il semble que la distribution des valeurs de $T(N)$ et $\hat{T}(N)$ puisse être obtenue à partir du théorème de la limite centrale. En fait, nous allons voir que les distributions $P(\tau)$ et $\hat{P}(\hat{\tau})$ peuvent être si larges qu'un tel théorème ne s'applique plus et doit être remplacé par un autre. Un certain nombre de caractéristiques essentielles du refroidissement subrecoil apparaîtront alors plus clairement.

(4) Distribution $P(\tau)$ des temps de piégeage

V-4

4.1 Hypothèses sur le piège

- (i) L'atome entre dans le piège par un saut d'impulsion, consécutif à un processus d'émission spontanée, et dont la projection sur un axe donné peut varier entre $-tk$ et $+tk$. Nous supposons que la largeur P_{trap} du piège est très petite devant tk .

$$P_{\text{trap}} \ll tk \quad (5.3)$$

Première conséquence de (5.3)

Le piège est "arrosé" de manière uniforme par les atomes qui y pénètrent, car la largeur du piège est très petite devant la dispersion des changements d'impulsion après chaque saut.

Deuxième conséquence de (5.3)

Considérons un atome qui est entré dans le piège. Le prochain saut qu'il va faire va changer son impulsion d'une valeur très grande devant la largeur du piège, de sorte qu'il va quitter à coup sûr le piège. Nous négligerons donc les processus où l'atome effectue 1 ou plusieurs sauts avant de quitter le piège.

- (ii) Soit p_0 la largeur en impulsion du "trou" de $\Gamma'(p)$ au voisinage de $p=0$ (Fig. 1). L'effet Doppler kp_0/M associé à p_0 est de l'ordre de la largeur des résonances Raman entre sous-niveaux fondamentaux qui jouent un rôle essentiel aussi bien dans le refroidissement VSCPT que dans le refroidissement Raman. Nous supposons que

$$P_{\text{trap}} \ll p_0 \quad (5.4)$$

Conséquence de (5.4)

A l'intérieur du piège, on peut se limiter au terme parabolique dans le développement de $\Gamma'(p)$ en puissances de p

$$|p| < P_{\text{trap}} \quad \Gamma'(p) \sim \frac{1}{\tau_0} \left(\frac{p}{p_0} \right)^2 \quad (5.5)$$

$1/\tau_0$ donne l'ordre de grandeur de $\Gamma'(p)$ dans le plateau de la figure 1 (en dehors du trou Raman).

4.2 Calcul simple de $P(\tau)$ à une dimension

- Considérons un atome qui est entré dans le piège. Comme l'arrosage du piège est uniforme, la probabilité $\Pi(p)dp$ que cet atome ait une impulsion comprise entre p et $p+dp$ est uniforme entre P_{trap} et $-P_{\text{trap}}$. On a donc, compte tenu de la normalisation

$$\Pi(p) = \frac{1}{2P_{\text{trap}}} \quad (5.6)$$

- Commençons par supposer que le temps de séjour τ dans le piège d'un atome d'impulsion p est relié à p de manière parfaitement déterministe

$$\tau(p) = \frac{1}{\Gamma'(p)} \quad (5.7)$$

c'est à dire encore, compte tenu de (5.5)

$$\tau(p) = \frac{A}{p^2} \quad A = \tau_0 p_0^2 \quad (5.8)$$

- La figure 3 donne les variations de $\tau(p)$ avec p . $\tau(p)$ varie entre une valeur minimale

$$\tau_{\text{trap}} = A / P_{\text{trap}}^2 = \tau_0 p_0^2 / P_{\text{trap}}^2 \quad (5.9)$$

atteinte pour $p = \pm p_{\text{trap}}$ et l'infini

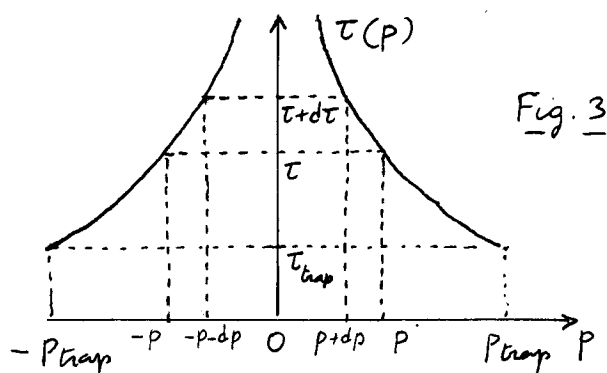


Fig. 3

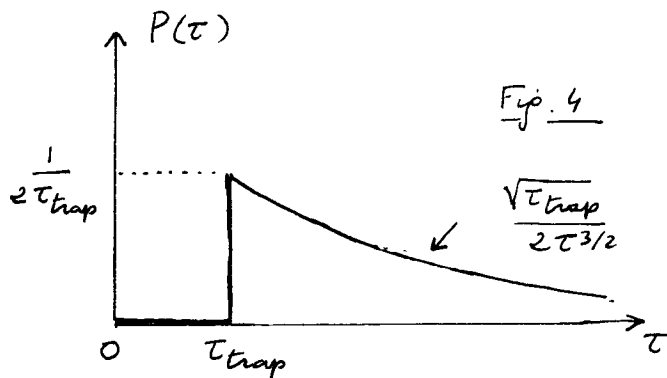


Fig. 4

- Une construction géométrique simple (Fig. 3) montre que les atomes restant dans le piège un temps compris entre τ et $\tau + d\tau$ sont ceux dont l'impulsion est comprise dans 2 intervalles symétriques par rapport à $p=0$: $[p, p+dp]$ et $[-p, -p-dp]$, p et τ étant reliés par (5.8) et dp et $d\tau$ par

$$|d\tau|/|dp| = |\tau'(p)| = 2A/|p|^3 = 2\tau_0 p_0^2/|p|^3 \quad (5.10)$$

On en déduit

$$P(\tau) |d\tau| = 2\pi(p) |dp| \quad (5.11)$$

c'est à dire encore, compte tenu de (5.6) et (5.10)

$$P(\tau) = 2\pi(p) \frac{|dp|}{|d\tau|} = \frac{1}{P_{\text{trap}}} \frac{|p|^3}{2\tau_0 p_0^2} = \frac{1}{2} \frac{p_0}{P_{\text{trap}}} \frac{\sqrt{\tau_0}}{\tau^{3/2}} = \frac{\sqrt{\tau_{\text{trap}}}}{2\tau^{3/2}} \quad (5.12)$$

On trouve ainsi que $P(\tau)$ décroît avec τ suivant une loi de puissance en $1/\tau^{3/2}$ (Fig. 4)

- Le calcul précédent peut être aisément généralisé au cas où la relation entre τ et p n'est pas déterministe comme dans (5.7). Il est plus réaliste par exemple de considérer que, pour un atome d'impulsion p , τ est une variable aléatoire, dont la loi de probabilité $P(\tau/p)$ est donnée par :

$$P(\tau/p) = \Gamma'(p) e^{-\Gamma'(p)\tau} \quad (5.13)$$

Une telle loi conduit à $\langle \tau \rangle = 1/\Gamma'(p)$ pour un atome d'impulsion p .

Le calcul conduisant à (5.12) peut alors être repris en partant de la relation

$$P(\tau) = \int_{-p_{\text{trap}}}^{+p_{\text{trap}}} dp P(\tau/p) \pi(p) \quad (5.14)$$

et en utilisant pour $P(\tau/p)$ l'équation (5.13) [au lieu de $\delta(\tau - 1/\Gamma'(p))$].

On trouve alors (voir Ref. [1]) que $P(\tau)$ n'est plus alors en toute rigueur donné par une loi de puissance, sauf pour $\tau \rightarrow \infty$, où l'on obtient

$$P(\tau) \underset{\tau \rightarrow \infty}{\approx} \frac{1}{2} \frac{p_0}{P_{\text{trap}}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \frac{\sqrt{\tau_0}}{\tau^{3/2}} = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \frac{\sqrt{\tau_{\text{trap}}}}{2\tau^{3/2}} \quad (5.15)$$

où Γ est la fonction gamma. On retrouve bien (5.12) au facteur $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ près.

4.3 Extension à un nombre quelconque de dimensions.

- Dans ce paragraphe, p désigne le module $|\vec{p}|$ de $\vec{p}$. Les figures 1a et 1b demeurent valables à condition de ne conserver que la région $p > 0$. Nous supposons toujours les conditions (5.3) et (5.4) remplies.

- A D dimensions, le volume $V(p)$ de l'espace des impulsions correspondant à un module de $\vec{p}$ inférieur à p varie comme p^D . L'élément de volume dV correspondant à $p \leq |\vec{p}| \leq p+dp$ varie donc comme $D p^{D-1} dp$. Comme l'arrosage du piège est uniforme d'après (5.3), on en déduit que la distribution $\Pi(p)$ des valeurs de p pour un atome entrant dans le piège est donnée par

$$\Pi(p) = \frac{dV/dp}{V(p_{\text{trap}})} = \frac{D p^{D-1}}{p_{\text{trap}}^D} \quad (5.16)$$

expression qui coïncide bien avec (5.6) pour $D=1$, si on note que p varie maintenant entre 0 et p_{trap} et non plus entre $-p_{\text{trap}}$ et $+p_{\text{trap}}$.

- Le calcul fait plus haut pour $P(\tau)$ peut alors être repris en reportant (5.16) dans (5.14) (et en remplaçant $\int_{-p_{\text{trap}}}^{+p_{\text{trap}}}$ par $\int_0^{p_{\text{trap}}}$). On obtient

$$P(\tau) \underset{\tau \rightarrow \infty}{\simeq} \frac{D}{2} \left(\frac{p_0}{p_{\text{trap}}} \right)^D \Gamma\left(\frac{D}{2}\right) \frac{\tau_0^{D/2}}{\tau^{1+\frac{D}{2}}} = \frac{D}{2} \Gamma\left(\frac{D}{2}\right) \frac{\tau_{\text{trap}}^{D/2}}{\tau^{1+\frac{D}{2}}} \quad (5.17)$$

4.4 Extension à d'autres formes de pièges.

- Il est d'intérêt d'envisager le cas où $\Gamma'(p)$ varie au voisinage de $p=0$ suivant une loi de puissance autre que p^2 . Considérons par exemple le cas où

$$\Gamma'(p) \underset{p \rightarrow 0}{\simeq} \frac{1}{\tau_0} \left(\frac{p}{p_0} \right)^\alpha \quad (5.18)$$

De telles situations peuvent par exemple être réalisées dans le refroidissement Raman en prenant des formes spectrales appropriées pour les impulsions Raman stimulées. Des impulsions triangulaires en temps (produit de convolution de 2 impulsions carrées) ont par exemple des densités spectrales variant en $(\omega - \omega_0)^4$ autour des zéros ω_0 de ces densités. Une telle situation conduirait alors à $\alpha=4$ dans (5.18).

- Le calcul du paragraphe précédent peut être aisément étendu à une telle situation. Il suffit d'utiliser (5.18) dans l'expression (5.13) de $P(\tau/p)$. On obtient ainsi

$$P(\tau) \underset{\tau \rightarrow \infty}{\simeq} \frac{D}{\alpha} \left(\frac{p_0}{p_{\text{trap}}} \right)^D \Gamma\left(\frac{D}{\alpha}\right) \frac{\tau_0^{D/\alpha}}{\tau^{1+\frac{D}{\alpha}}} = \frac{D}{\alpha} \Gamma\left(\frac{D}{\alpha}\right) \frac{\tau_{\text{trap}}^{D/\alpha}}{\tau^{1+\frac{D}{\alpha}}} \quad (5.19)$$

où τ_{trap} est donné par une expression généralisant (5.9)

$$\tau_{\text{trap}} = \tau_0 p_0^\alpha / p_{\text{trap}}^\alpha \quad (5.20)$$

4.5 Discussion physique

- Les calculs précédents montrent finalement que, pour $\tau \rightarrow \infty$, la distribution $P(\tau)$ des temps de piégeage varie comme $\tau^{-(1+\mu)}$

$$P(\tau) \underset{\tau \rightarrow \infty}{\simeq} \tau^{-(1+\mu)} \quad (5.21)$$

où l'exposant $\mu = \frac{D}{\alpha}$ (5.22)

contient toute la dépendance liée à la dimension d'espace D et à la forme du piège (exposant α).

- Plus μ est petit, plus lente est la décroissance de $P(\tau)$ avec τ , plus longues peuvent être les phases de piégeage autour de $p=0$, plus efficace est le refroidissement.

- (i) Pour α fixé, on voit donc que le piègeage est d'autant moins efficace que la dimension est plus élevée. Ceci se comprend aisément : les phases de piègeage très longues apparaissent pour les atomes tombant dans le piège au voisinage immédiat de $p=0$. Or, le poids statistique des régions de p petit diminue en valeur relative comme p^{D-1} quand D augmente [voir équation (5.16)].
- (ii) Pour D fixé, μ est d'autant plus petit que α est plus grand. Pour avoir des phases de piègeage aussi longues que possible, on a intérêt à ce que $P'(p)$ croisse le plus lentement possible avec p .
- Pour $\mu > 0$, l'intégrale de $P(\tau)$ converge quand $\tau \rightarrow \infty$, comme il se doit pour une distribution de probabilité. Par contre, l'intégrale de $\tau P(\tau)$, qui intervient dans le calcul de la valeur moyenne $\langle \tau \rangle$ de τ , ne converge plus nécessairement. Par exemple, pour $\mu = 1/2$ ($D=1, \alpha=2$) ou $\mu = 1$ ($D=2, \alpha=2$), $\langle \tau \rangle = \infty$. Il est clair que le théorème de la limite centrale ne peut plus alors s'appliquer à la somme (5.2) des τ_i .

⑤ Distribution $\hat{P}(\hat{\tau})$ des temps de premier retour - Etude de quelques cas simples.

5.1 Mouvement brownien usuel à 1 dimension

Le problème considéré

- Une particule se déplace sur l'axe des p en faisant des sauts à des intervalles de temps réguliers τ_0 , indépendants de sa position sur l'axe des p . L'amplitude de chaque saut est une variable aléatoire, de valeur moyenne nulle et de variance Δp^2 (Dans le refroidissement laser, $\Delta p^2 \sim \hbar^2 k^2 / 3$).
- La particule part d'une petite région $[-p_{\text{trap}}, p_{\text{trap}}]$ autour de $p=0$. Quelle est la distribution $P_1(N)$ du nombre de sauts qu'elle doit faire pour revenir la 1^{ère} fois dans le piège après l'avoir quitté?

La méthode suivie

- On calcule d'abord la probabilité $P_0(N)$ de trouver la particule dans le piège, indépendamment du nombre de sorties et de retour qu'elle a fait depuis l'instant initial.
- On relie ensuite $P_0(N)$ aux probabilités des événements où la particule a fait 1 sortie, 2 sorties, 3 sorties... Or ces probabilités s'expriment en fonctions de produits de convolution faisant intervenir $P_1(N)$ 1 fois, 2 fois, 3 fois... Par transformation de Laplace, on obtient alors une équation algébrique permettant de calculer la transformée de Laplace $\tilde{P}_1(E)$ de $P_1(N)$.

Probabilité $P_0(N)$ de rester dans le piège après N sauts

- Après un grand nombre N de sauts, la distribution de probabilité de p est une gaussienne centrée en $p=0$ et de variance $N \Delta p^2$

$$\mathcal{P}(p, N) = \frac{1}{\sqrt{2\pi N \Delta p^2}} e^{-p^2 / 2N \Delta p^2} \quad (5.23)$$

- La probabilité de trouver la particule dans le piège de largeur $2p_{\text{trap}} \ll \Delta p$ vaut donc

$$P_0(N) = \mathcal{P}(p=0, N) \cdot 2p_{\text{trap}} = \frac{2p_{\text{trap}}}{\Delta p} \frac{1}{\sqrt{2\pi N}} \quad (5.24)$$

Considérons N comme une variable continue, ce qui est valable si $N \gg 1$, et introduisons la transformée de Laplace $\tilde{P}_0(E)$ de $P_0(N)$:

$$\tilde{P}_0(E) = \int_0^\infty e^{-EN} P_0(N) dN \quad (5.25)$$

En reportant (5.24) dans (5.25), on obtient

$$\tilde{P}_0(E) = \frac{2P_{\text{trap}}}{\Delta P} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-EN} \frac{1}{\sqrt{N}} dN = \frac{2P_{\text{trap}}}{\Delta P} \frac{1}{\sqrt{2\pi E}} \underbrace{\int_0^\infty e^{-u} u^{-1/2} du}_{=\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}} = \frac{2P_{\text{trap}}}{\Delta P} \frac{1}{\sqrt{2E}} \quad (5.26)$$

Autre expression équivalente de $P_0(N)$.

- La particule peut tout d'abord ne pas avoir quitté le piège après N sauts. Comme nous supposons toujours $P_{\text{trap}} \ll \Delta P$, la probabilité d'un tel événement $\Pi_0(N)$ n'est non nulle que si $N=0$ (la particule quitte le piège dès le 1^{er} saut) :

$$\Pi_0(N) = \delta_{N,0} \quad (5.27)$$

- Elle peut se retrouver dans le piège au bout de N sauts après en être sortie une seule fois. La probabilité correspondante $\Pi_1(N)$ n'est autre que $P_1(N)$

$$\Pi_1(N) = P_1(N) \quad (5.28)$$

- Elle peut se retrouver dans le piège au bout de N sauts après 2 sorties, la 1^{ère} durant n sauts, la 2^{ème} $N-n$. En sommant sur n , on obtient :

$$\Pi_2(N) = \sum_n P_1(n) P_1(N-n) = P_1(N) \otimes P_1(N) \quad (5.29)$$

qui n'est autre que le produit de convolution de $P_1(N)$ par lui-même.

On trouverait de même que les retours de la particule dans le piège après 3 sorties ont une probabilité $\Pi_3(N) = P_1(N) \otimes P_1(N) \otimes P_1(N)$ etc...

- En sommant sur toutes ces possibilités, on obtient

$$P_0(N) = \delta_{N,0} + P_1(N) + P_1(N) \otimes P_1(N) + P_1(N) \otimes P_1(N) \otimes P_1(N) + \dots \quad (5.30)$$

Calcul de $\tilde{P}_1(E)$ et $P_1(N)$

- La transformation de Laplace transforme le produit de convolution en produit ordinaire. L'équation (5.30) devient donc

$$\tilde{P}_0(E) = 1 + \tilde{P}_1(E) + \tilde{P}_1^2(E) + \tilde{P}_1^3(E) + \dots = \frac{1}{1 - \tilde{P}_1(E)} \quad (5.31)$$

Comme on connaît $\tilde{P}_0(E)$ d'après (5.26), on en déduit

$$\tilde{P}_1(E) = \frac{\tilde{P}_0(E) - 1}{\tilde{P}_0(E)} = 1 - \frac{\Delta P}{P_{\text{trap}} \sqrt{2}} \sqrt{E} \quad (5.32)$$

- Les calculs faits plus haut sur $P_0(N)$ et $P_1(N)$ ne sont valables que pour $N \gg 1$. L'équation (5.32) n'est donc valable que pour E petit.

Or on peut montrer (voir Appendice B) qu'une distribution (normalisée) variant en $N^{-3/2}$ pour $N \gg 1$ a une transformée de Laplace variant en $1 - 2a\sqrt{\pi} \sqrt{E}$ pour E petit. On déduit alors de (5.32) que $P_1(N)$ se comporte, pour $N \gg 1$, comme

$$P_1(N) \underset{N \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\Delta P}{2P_{\text{trap}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{N^{3/2}} \quad (5.33)$$

- Comme tous les pas durent le même temps τ_0 , les temps $\hat{\tau}$ de premier retour sont reliés à N par $\hat{\tau} = N\tau_0$, or la distribution $\hat{P}(\hat{\tau})$ des temps de premier retour s'obtient en utilisant $\hat{P}(\hat{\tau}) d\hat{\tau} = P_1(N) dN$ et $\hat{\tau} = N\tau_0$. On déduit alors de (5.33)

$$\hat{P}(\hat{\tau}) \underset{\hat{\tau} \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\hat{B}}{\hat{\tau}^{3/2}} \quad \hat{B} = \frac{\Delta P}{2P_{\text{trap}}} \sqrt{\frac{\tau_0}{2\pi}} \quad (5.34)$$

Là encore, on obtient une distribution ayant une décroissance très lente, en loi de puissance pour $\hat{\tau} \rightarrow \infty$, si lente que $\langle \hat{\tau} \rangle = \infty$.

- Nous supposons maintenant que la durée τ_0 entre 2 sauts successifs dépend de p et croît quand $p \rightarrow \infty$ à cause de la décroissance de $\Gamma'(p)$ due à l'effet Doppler (voir Fig. 1a). Plus précisément, $\Gamma'(p)$ décroît comme $1/p^2$ quand l'effet Doppler kp/m devient supérieur à la largeur naturelle Γ de e . Nous supposons donc que

$$\tau(p) \approx \tau_0 \frac{p^2}{p_D^2} \quad \text{quand } p > p_D \quad (5.35)$$

- La distribution $P_1(N)$ des nombres de sauts nécessaires à un premier retour est une propriété "géométrique" indépendante du temps $\tau(p)$ entre sauts. Elle reste toujours donnée par (5.33).
- En moyenne, une marche de N pas conduisant à un premier retour s'étend de 0 à p_N le long de l'axe des p , avec pour ordre de grandeur de p_N

$$p_N^2 \approx N \Delta p^2 \quad (5.36)$$

Soit dN/dp la densité du nombre de pas effectués au voisinage de p au cours d'une telle marche. C'est une quantité lentement variable que nous approximerons par une constante

$$dN/dp \approx N/p_N \quad (5.37)$$

- On en déduit que l'ordre de grandeur des temps total $\hat{\tau}(N)$ mis par une marche de N pas conduisant à un premier retour est

$$\begin{aligned} \hat{\tau}(N) &\approx \int_0^{p_N} \frac{dN}{dp} \tau(p) dp \approx \frac{N}{p_N} \frac{\tau_0}{p_D^2} \int_0^{p_N} p^2 dp \\ &\approx \frac{N}{3} \frac{\tau_0}{p_D^2} p_N^2 \approx \frac{\tau_0}{3} \frac{\Delta p^2}{p_D^2} N^2 \end{aligned} \quad (5.38)$$

$\hat{\tau}(N)$ varie donc comme N^2 , et non plus comme $N\tau_0$, comme c'était le cas pour une marche avec des temps τ_0 entre sauts indépendants de p . Un tel résultat se comprend bien physiquement. Quand N croît, la particule explore des régions de plus en plus étendues sur l'axe de p , où sa diffusion est ralenti et elle met de plus en plus de temps à revenir.

- L'équation $\hat{P}(\hat{\tau}) d\hat{\tau} = P_1(N) dN$ utilisée dans le § 5.1 précédent pour relier $\hat{P}(\hat{\tau})$ à $P_1(N)$ demeure toujours valable mais il faut utiliser maintenant la relation $\hat{\tau} \sim \tau_0 \frac{\Delta p^2}{p_D^2} N^2$ au lieu de $\hat{\tau} = N\tau_0$. On en déduit que

$$d\hat{\tau}/dN \sim \tau_0 \frac{\Delta p^2}{p_D^2} N \sim \sqrt{\tau_0} \frac{\Delta p}{p_D} \hat{\tau}^{1/2} \quad (5.39)$$

de sorte que, compte tenu de (5.33)

$$\hat{P}(\hat{\tau}) = P_1(N) \frac{dN}{d\hat{\tau}} \sim \frac{\Delta p}{p_{\text{trap}}} \frac{1}{N^{3/2}} \frac{p_D^2}{\Delta p^2} \frac{1}{\tau_0} \frac{1}{N} \sim \frac{\Delta p}{p_{\text{trap}}} \left(\frac{\Delta p}{p_D} \right)^{1/2} \frac{\tau_0^{1/4}}{\hat{\tau}^{5/4}} \quad (5.40)$$

Dans tous les calculs qui précèdent, nous avons remplacé les divers facteurs numériques par 1, compte tenu de l'approximation (5.37) faite sur dN/dp . Le but poursuivi est simplement de montrer comment le ralentissement de la diffusion dû à l'effet Doppler élargit la distribution des temps de premier retour qui décroît plus lentement, en $\hat{\tau}^{-5/4}$ au lieu de $\hat{\tau}^{-3/2}$.

- Nous n'étendrons pas ici les calculs des §§ 5.1 et 5.2 à des dimensions $D > 1$. Le modèle nous confiné de la figure 1a n'est en effet pas intéressant pour le refroidissement subrept avec $D > 1$. Nous avons vu en effet au § 4.3 que le piégeage est de moins en moins efficace quand D croît. Par ailleurs, on conçoit aisément [voir aussi Refs 2, 3]

que le recyclage, c'est à dire le retour dans le piège, est de plus en plus difficile. Le refroidissement suborne à des dimensions $D > 1$ n'est donc réaliste qu'en présence de friction, et il nous semble plus intéressant d'étudier le temps moyen de premier retour en présence de friction, modélisé par les murs de la figure 1b.

5.3 Temps moyen de retour dans le piège en présence de friction

- Nous supposons maintenant D quelconque. La démarche suivie est tout à fait analogue à celle du § 5.1
- Calculons tout d'abord $P_0(N)$, probabilité d'être dans le piège après N sauts. Les murs de la figure 1b en $p = p_{\max}$ réfléchissent la particule dès que p atteint $p_{\max}$.

Comme la particule ne peut plus aller à l'infini, son mouvement est confiné et, pour $N \gg 1$, elle aura exploré uniformément toutes les régions de la sphère $p < p_{\max}$. La probabilité qu'elle soit dans le piège de rayon p_{trap} est donc tout simplement le rapport des volumes du piège et de la sphère de rayon $p_{\max}$.

$$P_0(N) \underset{N \rightarrow \infty}{\simeq} \left(\frac{p_{\text{trap}}}{p_{\max}} \right)^D \quad (5.41)$$

La transformée de Laplace de (5.41) s'obtient immédiatement

$$\tilde{P}_0(E) \underset{E \rightarrow 0}{\simeq} \left(\frac{p_{\text{trap}}}{p_{\max}} \right)^D \frac{1}{E} \quad (5.42)$$

- Le raisonnement fait dans le § 5.1 pour relier $P_0(N)$ à la distribution $P_1(N)$ du nombre de pas nécessaires à un premier retour demeure en tout point valable et conduit à la relation (5.31) entre $\tilde{P}_0(E)$ et $\tilde{P}_1(E)$. De (5.31) et (5.42), on déduit alors que

$$\tilde{P}_1(E) \underset{E \rightarrow 0}{\simeq} 1 - \left(\frac{p_{\max}}{p_{\text{trap}}} \right)^D E \quad (5.43)$$

- A la différence du cas du § 5.1, $\tilde{P}_1(E)$ décroît maintenant linéairement en E à partir de $\tilde{P}_1(0) = 1$, et non plus en $\sqrt{E}$. Un tel résultat signifie que N a une valeur moyenne finie. En effet, le développement de e^{-EN} dans l'équation $\tilde{P}_1(E) = \int_0^\infty e^{-EN} P_1(N) dN$ donne

$$\tilde{P}_1(E) = \int_0^\infty P_1(N) dN - E \int_0^\infty N P_1(N) dN + \dots = 1 - E \langle N \rangle + \dots \quad (5.44)$$

ce qui donne, par comparaison avec (5.43), le nombre moyen de pas pour un premier retour

$$\langle N \rangle = \left(\frac{p_{\max}}{p_{\text{trap}}} \right)^D \quad (5.45)$$

- Le résultat (5.45) appelle un certain nombre de commentaires physiques

- (i) Tout en restant fini, $\langle N \rangle$ croît vite avec D .
- (ii) $\langle N \rangle$ ne dépend pas de la taille Δp des pas. Quand Δp croît, la particule doit effectuer moins de pas pour retourner de $p_{\max}$ vers l'origine, mais elle a alors de plus en plus de mal pour tomber dans le volume $(p_{\text{trap}})^D$ du piège. Finalement, seul compte le rapport du volume de confinement au volume du piège.

- Si la durée τ_0 séparant 2 sauts successifs est indépendante de p , on déduit aisément de (5.45) la valeur $\langle \hat{\tau} \rangle$ du temps moyen de premier retour dans le piège

$$\langle \hat{\tau} \rangle = \tau_0 \langle N \rangle = \tau_0 \left(\frac{p_{\max}}{p_{\text{trap}}} \right)^D \quad (5.46)$$

- Problème . Soit $P(N)$ une distribution normalisée

$$\int_0^{\infty} P(N) dN = 1 \quad (B-1)$$

dont le comportement asymptotique pour N grand est en $N^{-(1+\mu)}$ avec $0 < \mu < 1$

$$N > N_0 \quad P(N) \simeq a N^{-(1+\mu)} \quad (B-2)$$

Comme $0 < \mu < 1$, l'intégrale $\int_0^{\infty} N P(N) dN$ diverge et $\langle N \rangle = \infty$. Quel est le comportement de la transformée de Laplace $\tilde{P}(E)$ de $P(N)$ quand $E \ll 1/N_0$?

- Introduisons la quantité

$$\int_0^{\infty} (e^{-EN} - 1) P(N) dN = \tilde{P}(E) - 1 \quad (B-3)$$

et séparons l'intégrale en N en 2 parties : $I_1 = \int_0^{N_0} \dots$ et $I_2 = \int_{N_0}^{\infty} \dots$

- Dans la première intégrale

$$I_1 = \int_0^{N_0} (e^{-EN} - 1) P(N) dN \quad (B-4)$$

on peut utiliser $|e^{-EN} - 1| < EN_0$ puisque $0 < N < N_0$, de sorte que

$$|I_1| < EN_0 \int_0^{N_0} P(N) dN < EN_0 \rightarrow 0 \quad \text{si } EN_0 \rightarrow 0 \quad (B-5)$$

- Dans la 2^{ème} intégrale, on peut utiliser la forme (B-2) de $P(N)$ puisque $N > N_0$

$$I_2 = a \int_{N_0}^{\infty} \frac{e^{-EN} - 1}{N^{1+\mu}} dN \quad (B-6)$$

Pour calculer la contribution du terme en e^{-EN} , faisons une intégration par parties

$$\begin{aligned} a \int_{N_0}^{\infty} \frac{e^{-EN}}{N^{1+\mu}} dN &= -\frac{a}{\mu} \left[e^{-EN} N^{-\mu} \right]_{N_0}^{\infty} - \frac{aE}{\mu} \int_{N_0}^{\infty} e^{-EN} N^{-\mu} dN \\ &= \underbrace{\frac{a}{\mu} e^{-EN_0} N_0^{-\mu}}_{\simeq \frac{a}{\mu} N_0^{-\mu} \text{ si } EN_0 \rightarrow 0} - \frac{aE^{\mu}}{\mu} \underbrace{\int_{N_0 E}^{\infty} e^{-u} u^{-\mu} du}_{\simeq \Gamma(1-\mu) \text{ si } EN_0 \rightarrow 0} \end{aligned} \quad (B-7)$$

Par ailleurs, le 2^{ème} terme de (B-6) vaut

$$-a \int_{N_0}^{\infty} \frac{dN}{N^{1+\mu}} = \frac{a}{\mu} \left[N^{-\mu} \right]_{N_0}^{\infty} = -\frac{a}{\mu} N_0^{-\mu} \quad (B-8)$$

En ajoutant (B-7) et (B-8), on obtient

$$I_2 \simeq -\frac{a}{\mu} \Gamma(1-\mu) E^{\mu} \quad \text{si } EN_0 \rightarrow 0 \quad (B-9)$$

- En ajoutant (B-5) et (B-9) et en utilisant (B-3), on obtient

$$\tilde{P}(E) \simeq 1 - \frac{a}{\mu} \Gamma(1-\mu) E^{\mu} \quad \text{si } EN_0 \rightarrow 0 \quad (B-10)$$

En particulier, pour $\mu = 1/2$, on a $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ et on retrouve le résultat utilisé pour passer de (5.32) à (5.33)

Références

- [1] - F. Bardou, Thèse de doctorat, Paris 1995
- [2] - F. Bardou, J.-P. Bouchaud, O. Emile, A. Aspect, C. Cohen-Tannoudji, Phys. Rev. Lett. 72, 203 (1994)
- [3] - J.-P. Bouchaud, A. Georges, Phys. Rep. 195, 127 (1990)