

Filtrage et Recyclage : Les 2 ingrédients essentiels du refroidissement subrecoil (VSCPT et Raman)

Filtrage

- Caractérisé par l'exposant α apparaissant dans les variations avec p du temps de départ $\Gamma'(p)$

$$\Gamma'(p) \underset{p \rightarrow 0}{\simeq} \frac{1}{\tau_0} \left(\frac{p}{p_0} \right)^\alpha \quad (10.1)$$

p_0 : Largeur du trou Raman

$1/\tau_0$: Temps d'excitation en dehors du trou Raman.

- Après un temps d'interaction Θ , ne peuvent rester dans le piège que les atomes ayant une impulsion p inférieure à p_Θ où

$$p_\Theta = p_0 \left(\frac{\tau_0}{\Theta} \right)^{1/\alpha} \quad (10.2)$$

Plus α est petit, plus p_Θ décroît rapidement avec Θ

- Distribution des temps de piégeage τ

$$P(\tau) \underset{\tau \rightarrow 0}{\simeq} \frac{B}{\tau^{1+\mu}} \quad (10.3)$$

$$\mu = \frac{D}{\alpha} \quad D \text{ dimension d'espace} \quad (10.4)$$

Recyclage

- Il est essentiel d'avoir, surtout pour $D=2, 3$, une friction ramenant les atomes vers le piège en $p=0$ (effet Si-syphe - transferts d'impulsion lors de transitions Raman stimulées).

- Caractérisé par 2 paramètres (reliés entre eux)

$$\bullet \text{ "Murs" en } |p| = p_{\max} \quad (10.5)$$

- Temps moyen de premier retour dans le piège : $\langle \hat{\tau} \rangle$

$$\langle \hat{\tau} \rangle = \tau_0 \left(\frac{p_{\max}}{p_{\text{trap}}} \right)^D \quad (10.6)$$

(Si $p_0 < \hbar k$, on peut prendre $p_{\text{trap}} = p_0$)

Importance de l'exposant $\mu = D/\alpha$

$$\boxed{\mu \leq 1}$$

- A la limite $\Theta \rightarrow \infty$, tous les atomes se retrouvent dans l'espace des $\vec{p}$ dans une sphère centrée en $\vec{p} = \vec{0}$ et de rayon égal à quelques p_Θ , qui tend vers 0 comme $\Theta^{-1/\alpha}$

- La distribution d'impulsion $\mathcal{P}(\vec{p})$ ne dépend, ni de p_{trap} , ni de $p_{\max}$

- $\mathcal{P}(\vec{p})$ ne s'arrête jamais d'évoluer quand Θ croît, aussi bien dans les ailes, qu'au sommet du pic

- Moyennes d'ensemble et moyennes temporelles diffèrent
Le système est fondamentalement non ergodique.

$$\mu > 1$$

- Tous les atomes ne sont pas, à la limite $\theta \rightarrow \infty$, dans la structure étroite de rayon p_0 . La proportion $r(\theta)$ d'atomes dans cette structure tend vers 0 quand $\theta \rightarrow \infty$
- La distribution d'impulsion $P(\vec{p})$ dépend de p_{max}
- $P(\vec{p})$ s'arrête d'évoluer, sauf pour la proportion de plus en plus petite d'atomes d'impulsion p inférieure à p_0
- Moyennes d'ensemble et moyennes temporelles coïncident

Forme des distributions d'impulsion (le long d'un axe)

Largeur des pics

- Largeur égale à p_0 , quel que soit μ .
- Le meilleur compromis finesse-remplissage est réalisé pour $\alpha = D$. On a alors $\mu = 1$ (tous les atomes sont dans le pic) et la décroissance de p_0 avec θ est la plus rapide possible

Hauteur du pic (densité maximale dans l'espace des $\vec{p}$)

La hauteur du pic croît toujours avec θ

- comme θ^μ si $\mu < 1$
- comme θ si $\mu > 1$

Ailes de la distribution d'impulsion

Pour θ fixé

- Décroissent aux grands p comme $1/p^\alpha$, quel que soit μ .
 - Pour VSCPT, $\alpha = 2$. Les profils expérimentaux s'ajustent mieux avec des lorentziennes qu'avec des gaussiennes.
- En toute rigueur, on ne peut définir une température. On définit une "température effective", en mesurant la 1/2 largeur à $1/\sqrt{e}$, $\delta p_{1/\sqrt{e}}$ et en posant $(\delta p_{1/\sqrt{e}})^2 / 2M = k_B T / 2$

Pour p fixé ($p > p_0$)

- $P(p, \theta)$ décroît avec θ comme $1/\theta^{1-\mu}$ si $\mu < 1$
- $P(p, \theta)$ est indépendant de θ pour $\mu > 1$

Problème physique

Exemples de déstabilisations de l'état noir par des mécanismes parasites

- Champ magnétique parasite B_0 introduisant un couplage entre l'état noir $|\Psi_{NC}(p=0)\rangle$ et des états couplés $|\Psi_C\rangle$
 - Couplage $\propto$ fréquence de Larmor Ω_L associé à B_0
 - Largeur Γ'_{NC} de $|\Psi_{NC}(p=0)\rangle$ due à la "contamination" magnétique de $|\Psi_{NC}\rangle$ par $|\Psi_C\rangle$

$$\Gamma'_{NC} \simeq \frac{\Omega_L^2}{\Gamma'_C} \quad \text{si } \Omega_L \ll \Gamma'_C \quad (C.1)$$

- Chute des atomes dans le champ de pesanteur.
- Lumière parasite résonnante qui peut être absorbée par les atomes piégés dans l'état $|\Psi_{NC}\rangle$.

Remarque : Nous ne considérons pas ici la déstabilisation par diffusion multiple due à la réabsorption par les atomes piégés dans l'état noir de la lumière émise par les atomes en train de diffuser vers l'état noir. Ce mécanisme dépend de la densité d'atomes déjà piégés et ne peut être décrit par le modèle simplifié introduit ci-dessous. Il nécessite un traitement spécial (voir thèse F. Bardou).

Modélisation

- On ajoute au taux de départ $\frac{1}{\tau_0} \left(\frac{p}{p_0} \right)^\kappa$ considéré jusqu'ici un taux de départ constant $\Gamma_{dissip.}$, indépendant de p , décrivant les processus de dissipation responsables de la déstabilisation de l'état noir

$$\Gamma'(p) = \Gamma_{dissip.} + \frac{1}{\tau_0} \left(\frac{p}{p_0} \right)^\kappa \quad (C.2)$$

On appelle $T_{dissip} = \frac{1}{\Gamma_{dissip.}}$ (C.3)

le temps de relaxation correspondant.

- Allure des variations avec p de $\Gamma'(p)$.
Elles sont données sur la figure 1

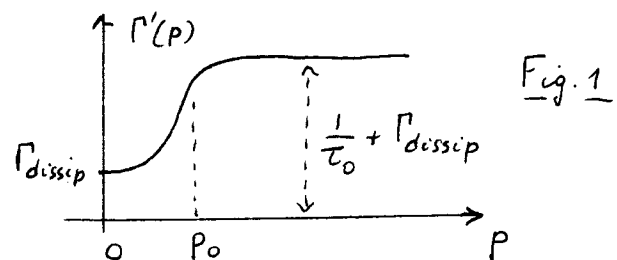


Fig. 1

Distribution stationnaire d'impulsion (le long d'un axe).Largeur à mi-hauteur

- Comme tous les temps de piégeage τ sont maintenant inférieurs à T_{dissip} , la valeur moyenne $\langle \tau \rangle$ de τ est finie et la distribution d'impulsion (le long d'un axe) tend vers une distribution stationnaire quand $\Theta \rightarrow \infty$.
- Comme dans le cours VIII, nous supposons qu'un atome d'impulsion p reste dans le piège pendant un temps $\tau(p)$ bien défini

$$\tau(p) = \frac{1}{\Gamma'(p)} \quad (C.4)$$

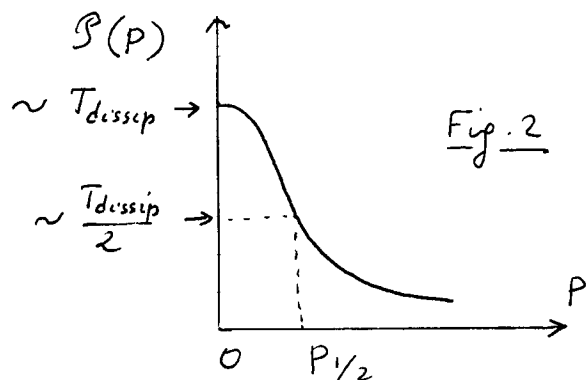
- Les résultats du § 5.4 du cours VIII s'appliquent ici. Voir en particulier la première ligne de l'équation (8.43) qui exprime que le poids d'une impulsion p donnée, dans la distribution d'impulsion $\mathcal{P}(p)$, est proportionnelle au temps $\tau(p)$ de piégeage d'un atome d'impulsion p .

On en déduit que la forme de $\mathcal{P}(p)$ est la même que celle de $\frac{1}{\Gamma'(p)}$. La hauteur du pic est proportionnelle à $\frac{1}{\Gamma_{\text{dissip}}} = T_{\text{dissip}}$. La 1/2 largeur à mi-hauteur $p_{1/2}$ est la valeur de p telle que $\Gamma'(p_{1/2}) = 2\Gamma_{\text{dissip}}$ (voir Fig. 2). L'équation (C.2) donne alors pour $p_{1/2}$

$$\frac{1}{\tau_0} \left(\frac{p_{1/2}}{p_0} \right)^\alpha = \Gamma_{\text{dissip}} = \frac{1}{T_{\text{dissip}}} \quad (\text{C.5})$$

c'est-à-dire encore

$$p_{1/2} = p_0 \left(\frac{\tau_0}{T_{\text{dissip}}} \right)^{1/\alpha} \quad (\text{C.6})$$



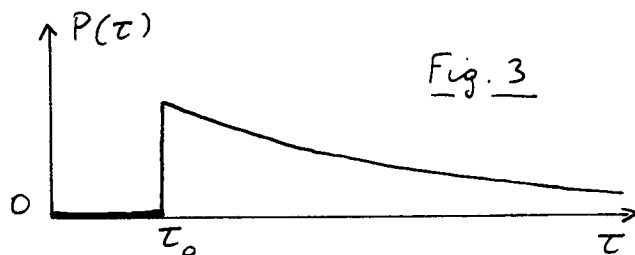
Discussion physique

- On obtient en (C.6) la même largeur à mi-hauteur que pour un processus sans dissipation ($\Gamma_{\text{dissip}} = 0$), pour lequel on aurait un temps d'interaction Θ égal à T_{dissip} .
- Les processus dissipatifs introduisent donc une coupure naturelle, à T_{dissip} , dans les temps d'interaction. Il ne sert à rien d'augmenter Θ au delà de cette valeur car les processus dissipatifs arrachent alors l'atome à l'interaction cohérente avec les champs laser.
- Dans une expérience donnée, où l'on dispose d'un temps d'interaction Θ , il faut s'efforcer de minimiser les processus de dissipation parasite pour réaliser $T_{\text{dissip}} > \Theta$.

Transition entre le régime des lois de Lévy et celui de la loi normale

Modèle simple de distribution tronquée pour les temps de piégeage

- Supposons tout d'abord $\Gamma_{\text{dissip}} = 0$ et revenons à la distribution (6.26) des temps de piégeage considérée dans le cours VI (voir Fig. 3)

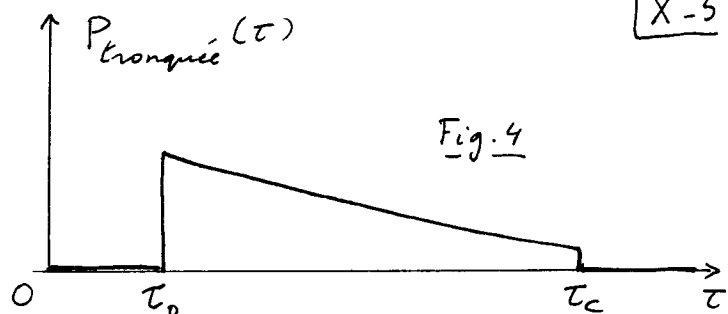


$$\begin{cases} P(\tau) = 0 & \text{si } \tau < \tau_0 \\ P(\tau) = \mu \frac{\tau_0^\mu}{\tau^{1+\mu}} & \text{si } \tau \geq \tau_0 \end{cases} \quad (\text{C.7})$$

Nous supposons ici $\mu < 1$

- Les processus dissipatifs interdisent à τ de dépasser une certaine valeur maximale. Nous modéliserons ici une telle situation en tronquant la distribution de la figure 3 au delà d'une certaine valeur τ_c .

- La distribution tronquée correspondante, notée $P_{\text{tronquée}}(\tau)$, est représentée sur la figure 4. Son expression mathématique s'écrit (en introduisant un coefficient supplémentaire ξ pour assurer la normalisation)



$$\begin{cases} P_{\text{tronquée}}(\tau) = 0 & \text{si } \tau < \tau_0 \text{ et } \tau > \tau_c \\ P_{\text{tronquée}}(\tau) = \xi \mu \frac{\tau_0^\mu}{\tau^{1+\mu}} & \text{si } \tau_0 \leq \tau \leq \tau_c \end{cases} \quad (C.8)$$

Nous allons reprendre certains calculs simples du cours VI avec la distributions (C.8) et voir dans quelle mesure ils diffèrent de ceux obtenus avec (C.7). Pour la suite des calculs, il sera commode d'introduire, à partir de τ_c , un nombre N_c défini par

$$\frac{\tau_c}{\tau_0} = (N_c)^{1/\mu} \quad (C.9)$$

- Calcul du coefficient de normalisation ξ . Il s'obtient à partir de $\int_0^\infty P_{\text{tronquée}}(\tau) d\tau$. Posons $x = \tau/\tau_0$. On a

$$\begin{aligned} \int_0^\infty P_{\text{tronquée}}(\tau) d\tau &= \xi \int_{\tau_0}^{\tau_c} \frac{\mu d\tau}{\tau^{1+\mu}} = \xi \left[x^{-\mu} \right]_{\tau_0}^{\tau_c} \\ &= \xi \left[1 - \left(\frac{\tau_c}{\tau_0} \right)^{-\mu} \right] = \xi \left(1 - \frac{1}{N_c} \right) = 1 \end{aligned} \quad (C.10)$$

d'où l'on tire

$$\xi = \frac{1}{1 - \frac{1}{N_c}} \quad (C.11)$$

Variations avec N de la plus grande valeur de τ obtenue au cours de N tirages successifs

- Faisons N tirages successifs de τ . D'après le § 3.2 du cours VI, la valeur la plus grande $\tau_M(N)$ de τ obtenue au cours de ces N tirages a un ordre de grandeur donné par l'équation

$$\int_{\tau_M(N)}^\infty P_{\text{tronquée}}(\tau) d\tau = \int_{\tau_M(N)}^{\tau_c} P_{\text{tronquée}}(\tau) d\tau = \frac{1}{N} \quad (C.12)$$

- Le même changement de variables, $x = \tau/\tau_0$, que celui fait plus haut, permet de transformer (C.12) en

$$\xi \int_{\frac{\tau_M(N)}{\tau_0}}^{\frac{\tau_c}{\tau_0}} \frac{\mu dx}{x^{1+\mu}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{N_c}} \left[\left(\frac{\tau_M(N)}{\tau_0} \right)^{-\mu} - \left(\frac{\tau_c}{\tau_0} \right)^{-\mu} \right] = \frac{1}{N} \quad (C.13)$$

c'est à dire encore

$$\begin{aligned} \left[\frac{\tau_M(N)}{\tau_0} \right]^{-\mu} &= \left(\frac{\tau_c}{\tau_0} \right)^{-\mu} + \frac{1}{N} \left(1 - \frac{1}{N_c} \right) \\ &= \frac{1}{N_c} + \frac{1}{N} \left(1 - \frac{1}{N_c} \right) \end{aligned} \quad (C.14)$$

Supposons tout d'abord $N \ll N_c$

X-6

On peut alors négliger $\frac{1}{N_c}$ devant $\frac{1}{N}$ dans (C.14) qui donne

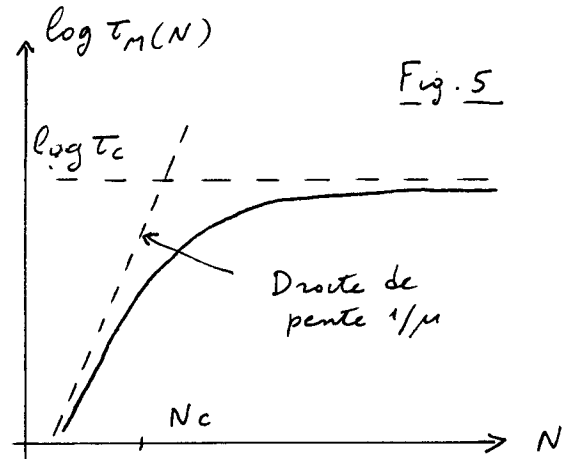
$$\tau_M(N) = \tau_0 N^{1/\mu} \quad (C.15)$$

On obtient alors le même résultat que celui des cours VI [voir équation (6.27)] correspondant à la distribution non tronquée de la Fig. 3.

Quand N se rapproche de N_c et dépasse N_c , $\tau_M(N)$ ne peut évidemment pas dépasser τ_c .

Si l'on porte donc $\log \tau_M(N)$ en fonction de N , on s'attend donc à trouver une courbe qui se rapproche d'une droite de pente $1/\mu$ pour $N \ll N_c$ et tend vers une asymptote horizontale, $\log \tau_c$, quand N se rapproche de N_c et dépasse N_c .

On voit ainsi apparaître clairement le croisement ("crossover") entre le régime des lois de Lévy et celui de la loi normale (Fig. 5)



Généralisation et conclusions

- Les résultats du calcul analytique simple précédent permettent de prévoir qu'une somme $T_N = \sum_{i=1}^N \tau_i$ de N variables aléatoires indépendantes τ_i , décrites toutes par la même distribution large tronquée (C.8), se comporte, pour $N \ll N_c$ (où N_c est donné par (C.9)), comme une somme de Lévy, distribuée suivant une loi de Lévy. Le régime de la loi normale n'est atteint que pour N de l'ordre de N_c , ou supérieur à N_c .
- Alors que pour des lois étroites on atteint très vite le régime de la loi normale (pour N de l'ordre de 5 ou 10), on voit que ce n'est plus vrai pour des distributions larges tronquées, si $N_c \gg 1$. Les lois de Lévy sont alors essentielles pour comprendre le régime $N \ll N_c$.
- Revenant au problème du refroidissement subreuil, on peut dire que l'introduction d'une dissipation parasite permet au système d'atteindre un régime stationnaire pour $\theta > T_{\text{diss}}$. Les lois de Lévy ne sont pas indispensables pour déterminer les propriétés de cet état stationnaire. Elles sont par contre très utiles pour étudier le régime transitoire permettant au système d'atteindre son état stationnaire, régime transitoire qui peut durer un temps très long, plus long que le temps d'observation.

Références

- Des problèmes analogues sont étudiés dans R.N. Mantegna, H.E. Stanley, Phys. Rev. Lett. **73**, 2946 (1994)
- Voir aussi le "Comment" de M.F. Shlesinger dans Phys. Rev. Lett. **74**, 4959 (1994)