

2^{ème} Partie : Un nouveau type d'effet Sisyphé

(4) Transfert induit par le mouvement entre $|\psi_{NC}\rangle$ et $|\psi_C\rangle$

4.1 Origine physique du transfert

Niveaux habillés et processus radiatifs pour $\Omega = 0$, $v = 0$ (Fig. 8a)

- Supposons d'abord la fréquence de Rabi Ω nulle ($V_{AL} = 0$) et l'atome immobile ($v = 0$) en un point donné z .
- Les niveaux d'énergie du système atome + photons laser se groupent en multiplicités de dimension 3: $\{|e_0, N\rangle, |g_{+1}, N+1\rangle, |g_{-1}, N+1\rangle\} \dots$, N étant le nombre de photons laser. La distance entre 2 multiplicités est $\hbar\omega_L$. A l'intérieur d'une multiplicité, $|g_{+1}, N+1\rangle$ et $|g_{-1}, N+1\rangle$ sont dégénérées et à une distance $\hbar\delta$ au dessus de $|e_0, N\rangle$ ($\delta > 0$).
- Des 3 niveaux d'une multiplicité donnée, seul $|e_0, N\rangle$ est instable radiativement et a une largeur $\hbar\Gamma$. L'état $|e_0, N\rangle$ peut se désintégrer radiativement par émission spontanée vers les états $|g_{+1}, N\rangle$ et $|g_{-1}, N\rangle$ de la multiplicité inférieure (flèches ondulées de la figure 8.a). Noter que, V_{AL} étant nul, les photons laser restent "spectateurs" au cours d'une transition d'émission spontanée, de sorte que $\Delta N = 0$ pour ① et ②. La figure 8.a' donne une autre représentation diagrammatique de ① et ② où ne figurent pas les nombres quantiques N .

Niveaux habillés et processus radiatifs pour $\Omega \neq 0$, $v = 0$ (Fig. 8b)

- On branche maintenant le couplage V_{AL} ($\Omega \neq 0$), mais l'atome est toujours immobile ($v = 0$) en z .
- La combinaison linéaire $|\psi_C, N+1\rangle$ de $|g_{+1}, N+1\rangle$ et $|g_{-1}, N+1\rangle$ (où $|\psi_C\rangle$ est donné par (2.10.a)) est couplée à $|e_0, N\rangle$ (un atome dans $|\psi_C\rangle$ en présence de $N+1$ photons laser peut absorber un photon laser et passer dans $|e_0\rangle$), alors que la combinaison linéaire orthogonale $|\psi_{NC}, N+1\rangle$ n'est pas couplée à $|e_0, N\rangle$.
- Sous l'effet du couplage $\hbar\Omega(3)/2$ entre $|\psi_C, N+1\rangle$ et $|e_0, N\rangle$, ces 2 états se repoussent: l'état $|\psi_C, N+1\rangle$ est déplacé vers le haut de $\hbar\delta'_C$ (déplacement lumineux de $|\psi_C\rangle$). La "contamination" de $|\psi_C, N+1\rangle$ par $|e_0, N\rangle$ transfère à $|\psi_C, N+1\rangle$ une partie de l'instabilité radiative de $|e_0, N\rangle$: l'état $|\psi_C, N+1\rangle$ acquiert une largeur radiative $\hbar\Gamma'_C$.
- L'instabilité radiative acquise par $|\psi_C, N+1\rangle$ se traduit par l'apparition de transitions radiatives spontanées nouvelles partant de $|\psi_C, N+1\rangle$ et allant vers les états de la multiplicité inférieure. A l'ordre le plus bas en Ω/δ , on obtient les transitions ③ et ④ de la figure 8b, de fréquences égales à ω_L et $\omega_L + \delta'_C$, respectivement.
- La figure 8b' donne une autre représentation diagrammatique de ces 2 processus, les photons laser absorbés étant représentés par des flèches droites montantes, les photons émis spontanément par des flèches ondulées descendantes. La transition ③ correspond à une diffusion Rayleigh, à partir de $|\psi_C\rangle$, la transition ④ à une diffusion Raman spontanée anti-Stokes, l'atome partant de $|\psi_C\rangle$ et aboutissant dans $|\psi_{NC}\rangle$.

Remarque: En toute rigueur, il faudrait une autre notation pour l'état $|\psi_C, N+1\rangle$ de la figure 8.b, car il est perturbé par V_{AL} et contaminé par $|e_0, N\rangle$.

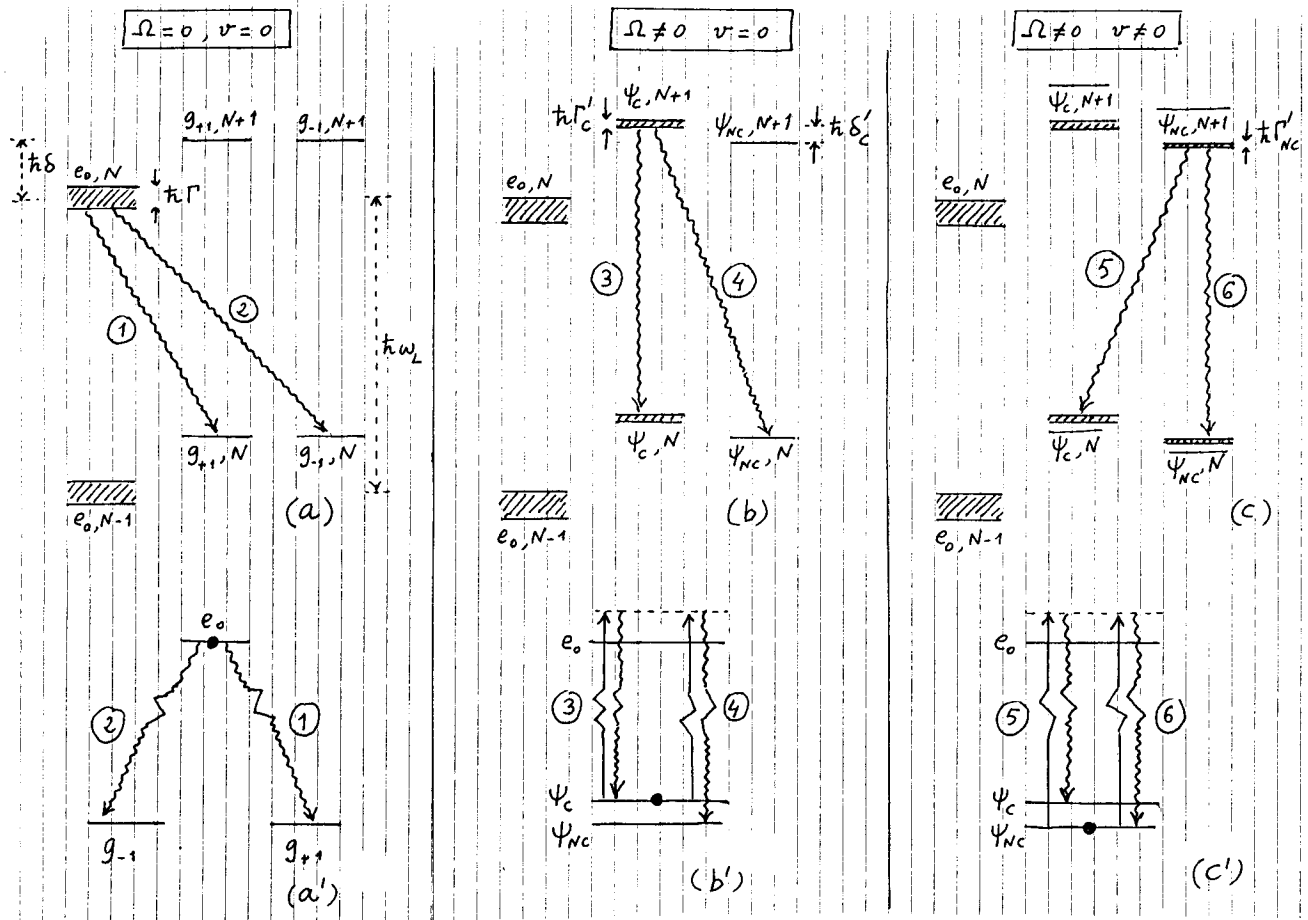


Fig. 8

Niveaux habillés et processus radiatifs pour $\Omega \neq 0, v \neq 0$ (Fig. 8c)

- Nous supposons maintenant l'atome en mouvement à la vitesse v et essayons de décrire les phénomènes sur des échelles de temps suffisamment courtes pour que l'atome se déplace sur des distances petites devant λ pendant ce temps.
- Le couplage motional introduit par le mouvement entre $|\psi_{nc}, N+1\rangle$ et $|\psi_c, N+1\rangle$ (voir Eq. (2.31)), va faire que les 2 niveaux perturbés $|\psi_c, N+1\rangle$ et $|\psi_{nc}, N+1\rangle$ se repoussent légèrement (Ici, nous utilisons des notations différentes pour désigner les états non perturbés par V_{mot} et les états perturbés par V_{mot}). De plus, la contamination de $|\psi_{nc}, N+1\rangle$ par $|\psi_c, N+1\rangle$ va conférer une petite largeur radiative $\hbar \Gamma'_{nc}$ à $|\psi_{nc}, N+1\rangle$.

Remarque Le couplage V_{mot} peut être traité perturbativement si l'élément de matrice de V_{mot} entre $|\psi_{nc}, N+1\rangle$ et $|\psi_c, N+1\rangle$, de l'ordre de $\hbar kv$ est petit devant l'écart entre les 2 états, de l'ordre de $\hbar \delta'_c$ (rappelons que $|\delta| \gg \Gamma$, de sorte que $|\delta'_c| \gg \Gamma'_c$). La largeur Γ'_{nc} est alors très petite devant Γ'_c . Aux plus grandes vitesses, quand kv devient de l'ordre de δ'_c ou plus grand, V_{mot} mélange complètement les 2 états qui se partagent alors la largeur $\hbar \Gamma'_c$, chacun ayant une largeur de l'ordre de $\hbar \Gamma'_c/2$.

- L'instabilité radiative de $|\psi_{nc}, N+1\rangle$ se traduit par l'apparition de transitions radiatives spontanées supplémentaires à partir de cet état. A l'ordre le plus bas en Ω/δ et kv/δ'_c , ce sont les transitions (5) et (6) de la figure (8.c), ou encore de la figure (8.c'). En particulier, la transition $|\psi_c, N+1\rangle \rightarrow |\psi_c, N\rangle$ correspond à une diffusion Raman spontanée Stokes, avec passage de l'atome de ψ_{nc} à ψ_c (voir processus (5) sur la Fig. 8c').

En conclusion, le mouvement rend possibles des transitions de $|\psi_{NC}\rangle$ vers $|\psi_C\rangle$, transitions qui sont interdites pour $v=0$. Ces transitions sont des transitions Raman spontanées Stokes qui deviennent permises à cause de la distribution de l'état non couplé par l'hamiltonien motionnel V_{mot} . La double flèche verticale de la figure 7 doit être remplacé par le processus Raman spontané Stokes (5) de la figure 8c'. Le bilan énergétique devient également très clair. L'énergie interne gagnée par l'atome lors du passage $\psi_{NC} \rightarrow \psi_C$ est perdue par le champ puisqu'un photon laser $\hbar\omega_L$ disparaît et est remplacé par un photon $\hbar(\omega_L - \delta'_C)$ d'énergie plus faible.

4.2 Calcul simple du temps de transfert

Expression générale

- Après élimination adiabatique de l'état excité, on peut se limiter aux 2 états $|\psi_{C,N+1}\rangle$ et $|\psi_{NC,N+1}\rangle$ de chaque multiplicité 3×3 de la figure 8. L'évolution réduite à l'intérieur de chaque multiplicité $\{|\psi_{C,N+1}\rangle, |\psi_{NC,N+1}\rangle\}$ est alors décrite par l'hamiltonien effectif non hermitique [voir Ref [13], chap. III] :

$$H_{\text{eff}} = \hbar \begin{bmatrix} \delta'_C(z) - i \frac{\Gamma'_C(z)}{2} & i w(z) \\ -i w(z) & 0 \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

où les éléments diagonaux représentent des déplacements lumineux et largurs radiatives dus à V_{AL} et où les éléments non diagonaux sont les couplages motionnels entre $|\psi_C(z)\rangle$ et $|\psi_{NC}(z)\rangle$ (voir Eqs. 2.31 et 2.32)

$$\langle \psi_C(z) | V_{\text{mot}} | \psi_{NC}(z) \rangle = i \hbar w(z) = \frac{i \hbar k v \sin \theta}{D(z)} = \frac{i \hbar k v \sin \theta}{1 + \cos \theta \cos 2kz} \quad (3.2)$$

- Soit $\hbar \left(\delta'_{NC} - i \frac{\Gamma'^{\text{mot}}_{NC}}{2} \right)$ la valeur propre de (3.1) qui tend vers 0 quand $w \rightarrow 0$. $\hbar \delta'_{NC}$ et $\hbar \Gamma'^{\text{mot}}_{NC}$ sont le déplacement radiatif et l'élargissement radiatif de $|\psi_{NC}\rangle$ induits par le mouvement. $\Gamma'^{\text{mot}}_{NC}(z)$ est le taux de départ de l'état $|\psi_{NC,N+1}\rangle$ de la figure 8c, c-à-d la somme des taux des transitions (5) et (6). Comme ces 2 transitions sont également probables, on en déduit que le taux de transition (5) des figures 8c ou 8c', c-à-d encore le taux de transfert radiatif $\psi_{NC} \rightarrow \psi_C$ induit par le mouvement est $\Gamma'_{NC}/2$. Nous noterons un tel taux $\Gamma'^{\text{mot}}_{NC \rightarrow C}(z)$. On a donc :

$$\Gamma'^{\text{mot}}_{NC \rightarrow C}(z) = \frac{\Gamma'^{\text{mot}}_{NC}(z)}{2} \quad (3.3)$$

Expression perturbative à la limite des faibles vitesses

- Si les éléments non diagonaux de (3.1) sont petits devant la différence entre éléments diagonaux, c-à-d (puisque $|\delta'_C| \gg \Gamma'_C$) si :

$$|w(z)| \ll \delta'_C(z) \quad (3.4)$$

ce qui implique une faible vitesse

$$|k v \sin \theta| \ll \delta'_C D(z) \quad (3.4.b)$$

le calcul de la valeur propre de (3.1) qui tend vers 0 quand $w \rightarrow 0$ peut être fait perturbativement et donne

$$\delta'_{NC}(z) - i \frac{\Gamma'^{\text{mot}}_{NC}(z)}{2} = \frac{w^2(z)}{-\delta'_C(z) + i \Gamma'_C(z)/2} \quad (3.5)$$

d'où l'on tire

$$\Gamma'^{\text{mot}}_{NC}(z) = \Gamma'_C(z) \frac{w^2(z)}{\delta'^2_C(z) + \frac{\Gamma'^2_C(z)}{4}} \quad (3.6)$$

- De (3.3) et (3.6), on déduit (en négligeant $\Gamma_c'^2$ devant $\delta_c'^2$ dans 3.6): III-4

$$|w(3)| \ll |\delta_c'(3)| \rightarrow \Gamma_{NC \rightarrow C}'^{mot}(3) \approx \frac{1}{2} \Gamma_c'(3) \frac{w^2(3)}{\delta_c'^2(3)} \quad (3.7)$$

- La dépendance spatiale du temps de transfert est contenue dans les facteurs $D(3) = 1 + \cos \theta \cos 2kz$ qui apparaissent dans $\Gamma_c'(3)$ et $\delta_c'(3)$ [voir (2.15)] et dans $w(3)$ [voir (2.32)]. On trouve ainsi

$$\Gamma_{NC \rightarrow C}'^{mot}(3) \sim \frac{1}{[D(3)]^3} \frac{1}{2} k^2 v^2 \sin^2 \theta \frac{\Gamma_c'}{\delta_c'^2} \quad (3.8)$$

Le transfert est donc maximal aux minima d'intensité, quand ψ_{NC} et ψ_c sont les plus proches l'un de l'autre, et varie plus rapidement avec z que l'intensité lumineuse [variation en $D(3)^{-3}$ au lieu de $D(3)$].

Limite des grandes vitesses

- On prend maintenant la limite opposée de (3.4), kv restant cependant très petit devant Γ pour que le traitement du § (3.5) reste valable [voir (2.36)]. Les 2 valeurs propres de (3.1) ont alors la même valeur imaginaire $-\frac{1}{2}\Gamma_c'(3)$. On déduit alors de (3.3)

$$|w(3)| \gg |\delta_c'(3)| \rightarrow \Gamma_{NC \rightarrow C}'^{mot}(3) \approx \frac{1}{4} \Gamma_c'(3) \quad (3.9)$$

- Alors qu'aux très faibles vitesses le temps de transfert varie en v^2 , il devient indépendant de v aux grandes vitesses.

4.3 Population stationnaire de l'état couplé aux très faibles vitesses

Régime de vitesses considéré

- Nous supposons maintenant

$$kv \ll \Gamma_c'(3) \quad (3.10)$$

condition plus restrictive que (3.4) puisque $\delta_c'(3) \gg \Gamma_c'(3)$.

- La condition (3.10) exprime que l'atome se déplace très peu devant λ pendant le temps de vie $(\Gamma_c')^{-1}$ de l'état couplé ψ_c . Nous verrons plus loin que $(\Gamma_c')^{-1}$ est le temps d'établissement d'un régime stationnaire pour les populations des états $|\psi_c N\rangle$ et $|\psi_{NC} N\rangle$ de la figure 8.c. Nous supposons donc ici que l'atome se déplace suffisamment lentement pour que les populations des niveaux habillés aient le temps d'atteindre un équilibre local en chaque point z .

Equations du bilan détaillé

- Soient $\pi_c(3)$ et $\pi_{NC}(3)$ les "populations réduites" des niveaux habillés de la figure 8.c, sommes sur N des populations des états $|\psi_c N+1\rangle$ et $|\psi_{NC} N+1\rangle$ de la figure 8.c (voir Ref. 13 § VI.D.2). Leur évolution lors de la cascade radiative de l'atome habillé est régie par les équations de taux

$$\dot{\pi}_c(3) = -\Gamma_{c \rightarrow NC}'(3) \pi_c(3) + \Gamma_{NC \rightarrow c}'^{mot}(3) \pi_{NC}(3) \quad (3.11.a)$$

$$\dot{\pi}_{NC}(3) = +\Gamma_{c \rightarrow NC}'(3) \pi_c(3) - \Gamma_{NC \rightarrow c}'^{mot}(3) \pi_{NC}(3) \quad (3.11.b)$$

Dans (3.11), $\Gamma_{NC \rightarrow c}'^{mot}$ est donné par (3.7). L'effet du couplage motionnel V_{mot} sur $|\psi_c N\rangle$ est négligeable, de sorte que le taux de départ de $|\psi_c N\rangle$ est $\Gamma_c'(3)$. Comme l'atome a une chance sur 2 d'arriver dans chacun des 2 états de la multiplicité inférieure on a

$$\Gamma_{c \rightarrow NC}'(3) = \frac{\Gamma_c'(3)}{2} \quad (3.12)$$

- La constante de temps du régime transitoire des équations (3.11) est $[\Gamma_{c \rightarrow NC}' + \Gamma_{NC \rightarrow c}'^{mot}]^{-1} \sim (\Gamma_{c \rightarrow NC}')^{-1} = 2 \Gamma_c'(3)^{-1}$. Si (3.10) est vérifiée, l'atome a donc le temps d'atteindre en chaque point un état d'équilibre donné par l'équation de bilan détaillé

$$\pi_c^{st}(3) \Gamma_{c \rightarrow NC}'(3) = \pi_{NC}^{st}(3) \Gamma_{NC \rightarrow c}'^{mot}(3) \quad (3.13)$$

- Comme $\Gamma'_{NC \rightarrow C}^{\text{mot}}(3)$ est déjà d'ordre 2 en $k\nu$ [voir (3.8)], on peut remplacer dans (3.13), $\pi_{NC}^{\text{st}}(3)$ par sa valeur d'ordre 0, qui vaut 1, et obtenir ainsi

$$\pi_C^{\text{st}}(3) \approx \frac{\Gamma'_{NC \rightarrow C}^{\text{mot}}(3)}{\Gamma'_{C \rightarrow NC}(3)} = \frac{W^2(3)}{\delta_C'^2(3)} = \frac{k^2 v^2 \sin^2 \theta}{\delta_C'^2(3) D^2(3)} \quad (3.14)$$

Comparaison avec la solution des équations de Bloch optiques (E.B.O.)

- La comparaison de (3.14) et (2.43), (2.44), (2.46) montre que

$$\pi_C^{\text{st}}(3) = \frac{1}{2} [P_{CC}^{(0)} + P_{CC}^{(1)} + P_{CC}^{(2)}] \quad (3.15)$$

$\pi_C^{\text{st}}(3)$ ne coïncide donc pas avec la solution des E.B.O. à l'ordre 2 inclus

- La différence (facteur $\frac{1}{2}$) est due au fait que la solution des E.B.O. est calculée dans la base des états non perturbés par V_{mot} (fig. 8b), alors que $\pi_C^{\text{st}}(3)$ est calculée dans la base des états perturbés (fig. 8c). En utilisant le développement perturbatif des états $|\Psi_{C,N}\rangle$ et $|\Psi_{NC,N}\rangle$, compte tenu de (3.2), on démontre aisément que

$$\sum_N \langle \Psi_{C,N} | P | \Psi_{C,N} \rangle = P_{CC}^{(2)} + \frac{i W(3)}{\delta_C'(3)} [P_{NC,C}^{(1)} - P_{C,NC}^{(1)}] + \frac{W^2(3)}{\delta_C'^2(3)} P_{NC,NC}^{(0)} \quad (3.16)$$

ce qui redonne bien $\pi_C^{\text{st}}(3)$, compte tenu de (2.43), (2.45), (2.46). On trouve également que, à l'ordre 1 inclus en $k\nu$, $\sum_N \langle \Psi_{NC,N} | P | \Psi_{C,N} \rangle = 0$, alors que $P_{C,NC}^{(1)} = \sum_N \langle \Psi_{C,N} | P | \Psi_{NC,N} \rangle$ ne l'est pas [voir 2.45].

⑤ Force de friction moyenne - Discussion physique

5-1 Calcul simple aux très faibles vitesses

Principe du calcul

- Considérons un atome arrivant de la gauche à la vitesse v sur l'état non couplé (Fig. 9).

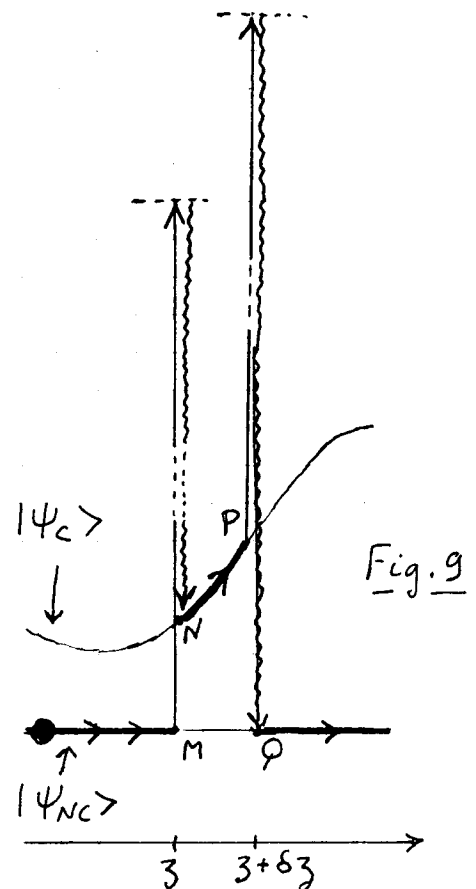
- L'atome a une certaine probabilité par unité de temps d'effectuer une transition Raman spontanée Stokes induite par le mouvement qui l'amène de $|\Psi_{NC}\rangle$ à $|\Psi_C\rangle$ (§ 4 ci-dessus). Supposons qu'une telle transition se produise au point M d'abscisse z . L'atome passe du point M au point N (Fig. 9). Au cours d'une telle transition, l'énergie du champ de rayonnement diminue de MN , puisque le photon réémis spontanément est moins énergétique que le photon absorbé.

- L'atome reste un certain temps dans l'état $|\Psi_C\rangle$ avant de retourner dans l'état $|\Psi_{NC}\rangle$ par un processus Raman spontané anti-Stokes (flèche ④ de la Fig. 8b). Supposons que cette transition se produise au point P, d'abscisse $z + \delta z$, ramenant l'atome de P à Q.

δz est de l'ordre de $v (\Gamma'_{C \rightarrow NC})^{-1}$ où $\Gamma'_{C \rightarrow NC}$ est donné en (3.12). La condition (3.10) de très faible vitesse signifie que $\delta z \ll \lambda$. Au cours d'une telle transition, l'énergie du champ de rayonnement augmente de PQ . Globalement, à l'issue du cycle $MNPQ$, l'énergie du rayonnement a augmenté de

$$(\delta W)_{\text{ray}} = \hbar [\delta_C'(P) - \delta_C'(Q)] = \hbar [\delta_C'(z + \delta z) - \delta_C'(z)] \quad (3.17)$$

- Après le point Q, l'atome reste dans l'état $|\Psi_{NC}\rangle$ jusqu'au prochain cycle, le temps moyen entre 2 tels cycles étant de l'ordre de $(\Gamma'_{NC \rightarrow C}^{\text{mot}})^{-1}$.



- Soit F la force radiative exercée par le champ laser sur l'atome. Pour déplacer l'atome à la vitesse v , il faut appliquer à l'atome une force $-F$. La puissance moyenne nécessaire pour déplacer l'atome à la vitesse v est donc $-Fv$, où la barre horizontale signifie une moyenne spatiale. Cette puissance moyenne dépensée pour déplacer l'atome se retrouve dissipée en régime stationnaire sous forme de rayonnement. On peut donc écrire

$$-Fv = \overline{(dW/dt)}_{\text{ray}} \quad (3.18)$$

Le principe du calcul de F consiste donc à calculer la puissance dissipée dans le rayonnement au moyen de (3.17) et des divers taux calculés dans le §4, à en effectuer la moyenne spatiale, puis à utiliser (3.18).

Puissance moyenne dissipée dans le rayonnement

- Cette puissance moyenne s'écrit, compte tenu de (3.17) :

$$\overline{\left(\frac{dW}{dt}\right)}_{\text{ray}} = \frac{2}{\lambda} \int_0^{\lambda/2} dz \Gamma'_{NC \rightarrow C}(z) \hbar [\delta'_c(z+\delta z) - \delta'_c(z)] \quad (3.19)$$

$(2/\lambda) \int_0^{\lambda/2} dz$ correspond à la moyenne spatiale sur une période $\lambda/2$ de l'intensité lumineuse ; $\Gamma'_{NC \rightarrow C}(z)$ est la probabilité par unité de temps pour que le cycle MNPQ de la figure 9 commence au point d'abscisse z . $\hbar [\delta'_c(z+\delta z) - \delta'_c(z)]$ est l'énergie gagnée par le rayonnement quand un tel cycle se produit.

- Comme $\delta z \ll \lambda$ d'après (3.10), on peut faire un développement limité du crochet de (3.19)

$$\delta'_c(z+\delta z) - \delta'_c(z) = \delta z \left(\frac{d}{dz} \delta'_c(z) \right) + \frac{1}{2} \delta z^2 \left(\frac{d^2}{dz^2} \delta'_c(z) \right) + \dots \quad (3.20)$$

En fait, le temps δt passé par l'atome dans l'état $1\psi_c$ (portion NP du cycle) n'est pas une variable certaine, mais une variable aléatoire distribuée suivant la loi $\Gamma'_{C \rightarrow NC}(z) e^{-\Gamma'_{C \rightarrow NC}(z) \delta t}$. Il en est de même de $\delta z = v \delta t$. Il faut donc remplacer dans (3.20) δz et δz^2 par leur valeur moyenne calculée à partir de cette loi exponentielle. On trouve, compte tenu de (3.12)

$$\begin{cases} \overline{\delta z} = v (\Gamma'_{C \rightarrow NC}(z))^{-1} = 2v / \Gamma'_c(z) & (3.21.a) \\ \overline{\delta z^2} = 2 \overline{\delta z}^2 = 8v^2 / \Gamma'^2_c(z) & (3.21.b) \end{cases}$$

- Reportons (3.21) dans (3.20), puis (3.20) dans (3.19). Il vient, compte tenu de (3.8) et (2.15)

$$\begin{aligned} \overline{\left(\frac{dW}{dt}\right)}_{\text{ray}} &= \frac{2}{\lambda} \int_0^{\lambda/2} dz \left[\frac{1}{2} k^2 v^2 \sin^2 \theta \frac{\Gamma'}{\delta'^2} \frac{1}{D^3(z)} \right] \left[\frac{2 \hbar \delta' v}{\Gamma'} \frac{1}{D(z)} \frac{d}{dz} D(z) \right] \\ &+ \frac{2}{\lambda} \int_0^{\lambda/2} dz \left[\frac{1}{2} k^2 v^2 \sin^2 \theta \frac{\Gamma'}{\delta'^2} \frac{1}{D^3(z)} \right] \left[\frac{4 \hbar \delta' v^2}{\Gamma'^2} \frac{1}{D^2(z)} \frac{d^2}{dz^2} D(z) \right] + \dots \end{aligned} \quad (3.22)$$

Toute la dépendance en z apparaît via la fonction $D(z) = 1 + \cos \theta \cos 2kz$ qui caractérise les variations spatiales de l'intensité lumineuse et qui est une fonction paire de z . Comme $dD(z)/dz$ est une fonction impaire de z l'intégrale de la 1^{ère} ligne de (3.22), qui représente la contribution du terme d'ordre 1 de (3.20) s'annule. Compte tenu de $d^2 D(z) dz^2 = -4 k^2 \cos \theta \cos 2kz$ le terme de la 2^{ème} ligne donne

$$\overline{\left(\frac{dW}{dt}\right)}_{\text{ray}} = -8(kv)^4 \frac{\hbar}{\delta' \Gamma'} \cos \theta \sin^2 \theta \frac{2}{\lambda} \int_0^{\lambda/2} dz \frac{\cos 2kz}{(1 + \cos \theta \cos 2kz)^5} \quad (3.23)$$

Dans l'intégrale sur z , effectuons le changement de variable $2kz = u$. Puis divisons (3.23) par $-v$ pour obtenir F d'après (3.18). On obtient finalement

$$\overline{F} = - \frac{4}{\pi} \hbar k (k v)^3 \frac{\sin^2 \theta \cos \theta}{\delta' \rho'} \left| \int_0^{2\pi} du \frac{\cos u}{(1 + \cos \theta \cos u)^5} \right| \quad (3.24)$$

- Comparons (3.24) à (2.47). On voit que le raisonnement physique suivi dans ce paragraphe redonne pour la force moyenne des résultats quasiment identiques à ceux fournis par le calcul utilisant les équations de Bloch optique. La seule différence est le facteur numérique en tête de la formule qui vaut $-4/\pi = -20/5\pi$ au lieu de $-16/5\pi$.

- En fait, la différence précédente entre les facteurs numériques peut être comprise physiquement et corrigée séparément. Revenons à la 1^{ère} ligne de (3.22). Pour calculer $\overline{\delta z}$ (voir Eq. 3.21.a), nous avons négligé la variation de $\Gamma'_{c \rightarrow nc}(z)$ avec z quand l'atome parcourt le segment NP de la figure 9. Il s'agit là d'une petite correction. Mais comme le terme de la 1^{ère} ligne de (3.22) est d'un ordre en $k v / \rho'_c$ inférieur à celui de la 2^{ème} ligne, une petite correction sur ce terme peut donner une contribution du même ordre que celle de la 2^{ème} ligne. En fait, c'est bien ce que donne un calcul de cette correction (voir Appendice A).

On trouve que la correction sur le terme d'ordre 1 de (3.22), liée à la variation spatiale de $\Gamma'_{c \rightarrow nc}(z)$ a la même forme que (3.24) au remplacement près de $-4/\pi$ par $+4/5\pi$. Ajoutée à (3.24), elle redonne bien un coefficient $(-4/\pi) + (4/5\pi) = -16/5\pi$ égal à celui de (2.47). Interprétons ici le signe de la correction. Considérons pour cela 2 points symétriques par rapport à un minimum de $\Gamma'_{c \rightarrow nc}(z)$. A gauche du minimum, l'atome dévale la pente sur le segment NP du cycle, alors qu'à droite il gravit une colline. Si les durées des 2 temps passés dans $|\psi_c\rangle$ à droite et à gauche sont égales, les contributions du terme linéaire en v se compensent. C'est pourquoi la moyenne spatiale de (3.22) est nulle. Tenons compte maintenant des variations spatiales de $\Gamma'_{c \rightarrow nc}(z)$. Sur le segment de gauche, l'atome se rapproche du minimum de $D(z)$; $\Gamma'_{c \rightarrow nc}(z)$ diminue donc (puisque $\Gamma'_c(z) = \rho'_c D(z)$) et l'atome reste plus longtemps sur la pente qu'il dévale. A droite du minimum, l'atome s'éloigne du minimum, $\Gamma'_{c \rightarrow nc}(z)$ augmente et l'atome reste moins longtemps sur $|\psi_c\rangle$. L'atome est donc davantage accéléré à gauche qu'il n'est ralenti à droite, ce qui explique pourquoi cette correction diminue la friction calculée en (3.24).

5.2 Bilan des divers échanges d'énergie

- Les divers termes qui apparaissent dans la 2^{ème} ligne de (3.22), $\Gamma'_{nc \rightarrow c}(z)$, δz^2 , $d^2 D(z)/dz^2$ présentent tous un maximum quand z varie au voisinage d'un minimum d'intensité (minimum de $D(z)$). La fonction figurant dans l'intégrale de (3.24), qui décrit les variations spatiales de $(\delta W)_{\text{ray}}$, est très "piquée" au voisinage des valeurs $\cos u = \cos 2kz = -1$, c'est à dire aux minima de $D(z)$. Or, en ces points la pente du niveau d'énergie ψ_c est nulle (c'est la courbure qui est importante en ces points). Un tel résultat peut paraître surprenant à 1^{ère} vue, puisque l'image des forces dipolaires, reliant les forces aux gradients spatiaux des niveaux habillés, suggérerait plutôt que les points importants sur l'axe des z pour la force de friction sont les points où la pente des niveaux est maximale.
- Pour résoudre un tel paradoxe, faisons le bilan des énergies reçues par le système quand on le déplace de z à $z+dz = z+v dt$. Il faut exercer sur lui une force équilibrant la force radiative $F(z)$. On fournit donc au système un travail

$$dW = -F(z) v dt = -F(z) dz \quad (3.25) \quad \text{III-8}$$

L'énergie dissipée sous forme de rayonnement peut être considérée comme une énergie de ordonnée, une "chaleur" fournie à l'extérieur. Le système reçoit donc une chaleur dQ , opposée à cette énergie dissipée

$$dQ = -\left(\frac{dW(z)}{dt}\right)_{\text{ray}} dt = -\left(\frac{dW(z)}{dt}\right)_{\text{ray}} \frac{dz}{v} \quad (3.26)$$

En appliquant le 1^{er} principe de la thermodynamique, l'énergie interne U du système change de

$$dU = dW + dQ \quad (3.27)$$

En utilisant la périodicité spatiale des énergies et des populations de niveaux d'énergie, on trouve que U prend la même valeur en 2 points distants de $\lambda/2$. On en déduit que

$$\int_0^{\lambda/2} dU = U(\lambda/2) - U(0) = 0 \quad (3.28)$$

Il suffit alors d'intégrer (3.27) entre 0 et $\lambda/2$ pour obtenir, compte tenu de (3.25) et (3.26)

$$\int_0^{\lambda/2} F(z) dz = -\frac{1}{v} \int_0^{\lambda/2} \left(\frac{dW}{dt}(z)\right)_{\text{ray}} dz \quad (3.29)$$

ce qui n'est autre que l'égalité (3.18) utilisée plus haut pour calculer $\bar{F}$.

- Le raisonnement précédent montre que dW et dQ n'ont aucune raison d'être opposés en chaque point z puisque leur somme vaut dU qui n'est pas nulle. Les maxima de $|F(z)|$ n'ont donc aucune raison de coïncider avec les maxima de $|(dW/dt)_{\text{ray}}|$. Par contre leurs intégrales coïncident au signe près, ce qui permet de calculer la moyenne spatiale de F à partir de la moyenne spatiale de l'énergie dissipée.

5.3 Etude qualitative d'autres régimes de vitesse

- Le comportement en $-v^3$ de la force moyenne que nous venons de calculer n'est valable qu'aux très faibles vitesses : $kv \ll \Gamma'_c$ (voir 3.10)

- Comme nous avons supposé $\delta \gg \Gamma$, on a $\delta'_c \gg \Gamma'_c$, et on peut donc envisager un autre domaine de vitesse

$$\Gamma'_c \ll kv \ll \delta'_c \quad (3.30)$$

Comme $kv \ll \delta'_c$ (voir 3.4), on peut continuer à utiliser l'expression perturbative (3.7) du taux de transfert $\Gamma'_{nc \rightarrow c}^{\text{mot}}$, qui varie donc en $k^2 v^2 \Gamma'_c / \delta_c'^2$. Par contre, comme $kv \gg \Gamma'_c$, l'atome parcourt plusieurs λ dans $|\psi_c\rangle$ avant de retourner dans $|\psi_{nc}\rangle$. Comme il passe préférentiellement de ψ_{nc} à ψ_c aux minima de $D(z)$, et ensuite de ψ_c à ψ_{nc} aux maxima de $D(z)$, l'énergie moyenne perdue par cycle est de l'ordre de $\hbar \delta'_c$. On en déduit que

$$\left(\frac{dW}{dt}\right)_{\text{ray}} \sim k^2 v^2 \frac{\Gamma'_c}{\delta_c'^2} \times \hbar \delta'_c \sim \hbar k^2 v^2 \frac{\Gamma'_c}{\delta'_c} \quad (3.31)$$

et par suite compte tenu de (3.18)

$$\bar{F} = -\hbar k^2 v \Gamma'_c / \delta'_c \quad (3.32)$$

Dans le domaine (3.30), on a donc une force de friction linéaire en v du même ordre que celle trouvée dans les configurations $\sigma^+ - \sigma^-$ dans une transition $J_g=1 \leftrightarrow J_e=2$ (voir Ref. 3). Le taux d'amortissement

de la vitesse dans ce régime est $(\hbar k^2/M) \rho'_c/\delta'_c$, comme dans une mélasse sub-Doppler $\sigma^+ \sigma^-$.

- Supposons maintenant

$$(\delta'_c)_{\min} < kv < (\delta'_c)_{\max} \quad (3.32)$$

où $(\delta'_c)_{\min}$ et $(\delta'_c)_{\max}$ sont les valeurs minimale et maximale de δ'_c . Comme $kv > (\delta'_c)_{\min}$, on peut maintenant utiliser l'expression (3.9) du taux de transfert aux minima de $D(3)$ où ce taux est maximum. On a donc $\Gamma'_{NC \rightarrow C} \sim \rho'_c$. Comme plus haut, le fait que l'atome parcourt plusieurs λ dans ψ_c avant de repasser dans ψ_{NC} et le fait que les niveaux d'énergie ne sont pas trop perturbés puisque $kv < (\delta'_c)_{\max}$, entraînent que l'énergie moyenne perdue par cycle est de l'ordre de $\hbar \delta'_c$. On en déduit

$$\overline{F} \sim -\frac{1}{v} \rho'_c \hbar \delta'_c \quad (3.33)$$

La force moyenne doit donc partir en $-v^3$, puis varier linéairement en $-v$, enfin décroître en $-\frac{1}{v}$.

Il ne faut pas oublier cependant que, quand kv devient de l'ordre de δ'_c , la perturbation V_{mot} , qui apparaît dans le référentiel au repos de l'atome comme une perturbation périodique, de fréquence kv , peut induire des transitions résonnantes entre ψ_c et ψ_{NC} . Il en résulte des variations résonnantes de F pour certaines valeurs de v (Dopplers).

- Notons enfin que dans tout ce qui précède on a supposé $kv \ll \rho$ (pour pouvoir éliminer adiabatiquement les cohérences optiques - voir § 3.5). Physiquement, une telle condition exprime ici que chacune des 2 transitions Raman de la figure 9 peut être considérée comme instantanée. La différence entre les abscisses de M et N, ou P et Q, est extrêmement petite à l'échelle de λ .

⑥ Diffusion en impulsion

6-1 Ordre de grandeur du coefficient de diffusion $\mathcal{D}$

- Partons de l'expression donnant $\mathcal{D}$ (ref. [11]).

$$\mathcal{D} \sim \int_0^\infty \langle F(t) F(t-\tau) \rangle d\tau \quad (3.34)$$

où $F(t)$ est la force instantanée agissant sur l'atome (en toute rigueur, il faut prendre $\delta F = F(t) - \langle F(t) \rangle$, mais la contribution de $\langle F(t) \rangle$ à (3.34) est ici négligeable). L'étude de la cascade radiative de l'atome habillé conduit pour F à l'image d'une force dont la valeur instantanée est liée au gradient spatial de l'énergie du niveau habillé dans lequel l'atome se trouve, force qui change brusquement quand l'atome saute par émission spontanée d'un niveau habillé à l'autre (ref. [1]). Ici, $F(t)$ n'est non nulle que quand l'atome est dans l'état ψ_c . Cette force vaut alors $-d(\hbar \delta'_c)/dz$. Comme l'atome ne reste dans ψ_c qu'un temps de l'ordre de $1/\rho'_c$, le temps de corrélation τ_c de la fonction de corrélation de F apparaissant dans (3.34) est de l'ordre de $1/\rho'_c$. On peut donc écrire, en ordre de grandeur

$$\mathcal{D} \sim \langle F^2(t) \rangle \tau_c \sim \pi_c^{st}(3) \left(-\frac{d}{dz} \hbar \delta'_c(3) \right)^2 \frac{1}{\rho'_c(3)} \quad (3.35)$$

- En utilisant (3.14), (2.15.a) et (2.15.b), on obtient en ordre de grandeur (et en ignorant toutes les dépendances spatiales, décrites par $D(z)$ et sur lesquelles nous reviendrons plus loin)

$$D(v) \sim \frac{k^2 v^2}{\delta_c'^2} \frac{\hbar^2 k^2 \delta_c'^2}{\Gamma_c'} \frac{1}{\Gamma_c'} = \beta v^2 \quad \text{avec} \quad \beta = \frac{\hbar^2 k^4}{\Gamma_c' \Gamma_c'} \quad (3.36)$$

6.2 Température de quasi-équilibre

- A partir de l'équation de Fokker-Planck décrivant l'évolution de la fonction de distribution des vitesses $p(v)$ d'une particule soumise à une force $F(v)$ et dont l'impulsion diffuse avec un coefficient $D(v)$, on peut montrer que $p(v)$ tend vers un état d'équilibre donné par

$$p_{eq}(v) \sim e^{+M \int dv' \frac{F(v')}{D(v')}} \quad (3.37)$$

D'après (3.24) $F(v) \sim -\alpha v^3$ avec $\alpha = \frac{\hbar k^4}{\delta_c' \Gamma_c'} \quad (3.38)$

On en déduit que $p_{eq}(v) \sim e^{-\frac{M v^2}{2} \frac{\alpha}{\beta}} \quad (3.39)$

ce qui correspond à une température d'équilibre donnée par

$$k_B T_{eq} \sim \frac{\beta}{\alpha} \sim \hbar \delta_c' \quad (3.40)$$

Comme dans tous les effets SiSyphé, on retrouve une température correspondant à la profondeur des puits de potentiel formés par les modulations spatiales des niveaux d'énergie (ref. [3]).

- En toute rigueur, il n'y a pas dans le problème étudié ici d'état d'équilibre. Pour une transition $J_g=1 \leftrightarrow J_e=1$, il y a un vrai état noir quantique dans lequel les atomes viennent s'accumuler. Après la phase de pré-refroidissement SiSyphé, étudiée dans ce chapitre, et durant un temps de l'ordre de $(E_{rec} \Gamma_c' / \hbar \delta_c')^{-1}$ [voir haut de la page III-9], il y a une phase VSCPT qui dure un temps beaucoup plus long [voir les calculs et les résultats de la ref. [9]] et qui n'a pas de limite inférieure en T . L'état (3.39) n'est donc pas un vrai état d'équilibre, mais un état de quasi-équilibre atteint rapidement par effet SiSyphé, avant que le refroidissement VSCPT, beaucoup plus lent, n'ait eu le temps de se manifester.

Remarque

Nous avons utilisé en (3.38) la valeur de F aux très faibles vitesses (régime (3.10)). A des vitesses plus élevées (régime 3.30), $F(v)$ est multipliée par un facteur $\Gamma_c'^2 / k^2 v^2 \sim 1 / k^2 v^2 \tau_c^2$ (comparer (3.31) à (3.38)). En fait, dans le régime (3.10), la particule parcourt plusieurs λ dans ψ_c avant de changer d'état et la fonction de corrélation apparaissant dans (3.34) est alors une fonction oscillante de fréquence $\Omega = kv$ et amortie au bout d'un temps $\tau_c = 1/\Gamma_c'$. Son intégrale est alors réduite par rapport à la valeur (3.35) par un facteur $1/\Omega^2 \tau_c^2 = \Gamma_c'^2 / k^2 v^2$ qui est le même que le facteur de réduction de F . Le rapport $F(v')/D(v')$ ne change donc pas dans (3.37) et le résultat (3.40) demeure valable dans le régime (3.10).

6.3 Dépendances spatiales

- Revenons à (3.35). La dépendance spatiale de D est en $\sin^2 kz / D(z)^5$. Le terme en $[D(z)]^{-5}$ provient de $\Pi_c^{st}(z) \sim D(z)^{-4}$ et de $1/\Gamma_c'(z) \sim D(z)^{-1}$. Le terme en $\sin^2 kz$ provient de $[dD(z)/dz]^2$ (carré de la pente des niveaux ψ_c).

- Pour F (voir expression (3.24)), la dépendance spatiale de la fonction III-11
 à intégrer sur $u = 2kz$ est en $\cos 2kz / D(3)^5$. Le terme en $D(3)^{-5}$ provient
 de $\Gamma'_{NC \rightarrow C}(3) \sim D(3)^{-3}$ et de $\delta z^2 \sim 1/\Gamma'_C(3)^2 \sim D(3)^{-2}$. Le terme en $\cos 2kz$ provient
 de $d^2 D(3)/dz^2$ (courbure des niveaux).

- Comme nous l'avons déjà mentionné plus haut, la fonction $D(3)^{-5}$
 est très "piquée" au voisinage des minima de l'énergie, $\hbar \delta_C$ de ψ_C . La
 courbe $\cos 2kz$ a aussi le plus grand module en ces points. En fait, la
 courbure des niveaux ψ_C est également importante au voisinage des
 maxima de $\hbar \delta_C$, avec un signe opposé. Mais alors $D(3)^{-5}$ est très petit.
 C'est ce qui explique pourquoi la moyenne spatiale de (3.24) est non nulle
 et conduit à une friction. Pour le coefficient de diffusion par contre, le
 carré de la pente des niveaux d'énergie est nul aux points où $D(3)^{-5}$ est
 très grand. La moyenne spatiale défavorise donc $D(3)$ par rapport à $F(3)$.
 On peut peut être trouver là l'origine du fait que le refroidissement
 Sisyphe étudié ici conduit à une température d'équilibre plus basse
 que celles obtenues dans les configurations usuelles lin $\perp$ lin sur une
 transition $J_g = 1/2 \leftrightarrow J_e = 3/2$ [voir Ref. [9]]. Rappelons (voir Ref [3])
 que les moyennes spatiales apparaissant dans ce dernier cas (lin $\perp$ lin)
 dans les expressions donnant D et F font intervenir $\cos^4 kz$ et $\cos^2 kz$
 qui ont leur maxima aux mêmes endroits.

Références (suite de la liste de la page II-11)

- [13] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, G. Grynberg, *Processus d'interactions entre
 photons et atomes*, InterEditions et Editions du CNRS, Paris 1988)

Appendice A

- Pour simplifier les notations, appelons $\gamma(3)$ le taux de départ (3.12) de l'état C
 vers l'état NC , et notons $\gamma'(3_0)$ la valeur de la dérivée $d\gamma/dz$ en $z = z_0$. Considérons
 un atome de vitesse v , se trouvant en z_0 à $t = 0$: $z = z_0 + vt$. La population $\Pi_C(t)$ de
 l'état C pour un tel atome obéit à l'équation

$$d\Pi_C(t)/dt = -\gamma(z_0 + vt)\Pi_C(t) \simeq -[\gamma(3_0) + vt\gamma'(3_0)]\Pi_C(t) \quad (A.1)$$

dont la solution, à l'ordre 1 inclus en v , s'écrit, compte tenu de $\Pi_C(0) = 1$:

$$\Pi_C(t) = \exp\left\{-\int_0^t dt' [\gamma(3_0) + vt'\gamma'(3_0)]\right\} \simeq e^{-\gamma(3_0)t} [1 - \gamma'(3_0)v t^2/2] \quad (A.2)$$

- Soit $P(t)dt = -(d\Pi_C(t)/dt)dt$ la probabilité pour l'atome de rester dans
 l'état C un temps compris entre t et $t+dt$. De (A.2) on déduit

$$P(t) = -d\Pi_C(t)/dt = e^{-\gamma(3_0)t} \left\{ \gamma(3_0)[1 - \gamma'(3_0)v t^2/2] + \gamma'(3_0)v t \right\} \quad (A.3)$$

On en déduit que le temps moyen passé dans l'état C par un atome arrivant
 dans cet état au point z_0 et animé d'une vitesse v vaut : $\delta t = \int_0^\infty dt t P(t)$

et que la distance moyenne parcourue vaut $\overline{\delta z} = v \delta t$. De (A.3) on déduit

$$\overline{\delta z} = \frac{v}{\gamma(3_0)} - \frac{\gamma'(3_0)}{\gamma(3_0)^3} v^2 = \frac{2v}{\Gamma'_C(3)} - 4v^2 \left(\frac{d\Gamma'_C}{dz} \right)_{z=3_0} \frac{1}{\Gamma'_C(3_0)^3} \quad (A.4)$$

On est revenu à la notation (3.12) : $\gamma = \Gamma'_C/2$. Le dernier terme de (A.4),
 qui en v^2 , représente la correction qu'il faut apporter à (3.21.a) pour tenir compte
 de la variation avec z de $\Gamma'_C(3)$. La correction correspondante à la 1^{ère} ligne
 de (3.22) donne une contribution du même ordre que la 2^{ème} ligne. On tombe

sur une intégrale en z
$$\int_0^{\lambda/2} dz \frac{\sin^2 2kz}{(1 + \cos \theta \cos 2kz)^6} \quad (A.5)$$

qu'on peut intégrer par parties pour arriver à une correction δF à $\overline{F}$ identique
 à (3.24) au remplacement près du coefficient $-4/\pi$ par $+4/5\pi$