

3^{ème} Partie : Le régime quantique

⑦ Insuffisances du traitement semiclassique

- Le traitement des paragraphes ci-dessus suppose l'atome en mouvement à une vitesse imposée v . Il néglige les changements de vitesse aléatoires, de l'ordre de $v_R = \hbar k / m$, communiqués à l'atome par les photons émis spontanément.
- Ces changements de vitesse ont un premier effet : ils augmentent l'énergie cinétique de l'atome à l'issue de chacun des cycles Rayleigh ou Raman des figures 8 b' et 8 c'. Ce chauffage lié au recul est ignoré dans les bilans d'échanges d'énergie décrits plus haut. Le coefficient de diffusion estimé au § 6 ne tient compte que des fluctuations des forces dipolaires.
- Une autre conséquence très importante du changement aléatoire de vitesse de l'atome est liée à la dépendance en vitesse du temps de départ $\Gamma'_{NC}(v)$ de l'état non couplé, temps qui varie en v^2 (voir Eq. 3.6). Après avoir émis spontanément un photon, l'atome a une probabilité plus grande ou moins grande d'absorber un nouveau photon, suivant que sa vitesse a augmenté ou diminué. En particulier, s'il retombe dans l'état $|\Psi_{NC}\rangle$ avec une vitesse très proche de 0, il peut rester piégé un temps très long dans cet état. Cette sélection en vitesse, liée à la dépendance en v du temps d'excitation, et la marche aléatoire dans l'espace des vitesses, liée aux reculs aléatoires subis par l'atome, constituent des ingrédients essentiels des méthodes de refroidissement subrecoil (VSCPT et Raman). Il est donc indispensable de tenir compte des changements de vitesse de l'atome.
- Quand la dispersion en impulsions δp de l'atome se rapproche de $\hbar k$ sous l'effet du pré-refroidissement Sisyphe, on descend même en dessous de $\hbar k$ sous l'effet du refroidissement VSCPT, la longueur d'onde de de Broglie de l'atome, $\lambda_{dB} = \hbar / \delta p$, devient de l'ordre de ou supérieure à la longueur d'onde laser $\lambda_L = \hbar / \hbar k$. L'atome devient alors délocalisé dans l'onde laser et il n'est plus possible de négliger la longueur de cohérence spatiale de l'atome, comme le fait le traitement semiclassique. Un traitement quantique de tous ces degrés de liberté, internes et externes, devient indispensable. Deux représentations sont couramment utilisées.

Représentation impulsion

Les états de base sont caractérisés par 1. nombre quantique interne, g_+ , g_- ou g_0 et un nombre quantique externe p , impulsion du centre de masse. Par exemple, l'état $|g_+, p\rangle$ représente un atome dans l'état $|g_+\rangle$ avec une impulsion p .

Représentation position

Le ket $|\Psi\rangle$ décrivant l'état de la particule est représenté par autant de fonctions d'onde qu'il y a d'états internes. Par exemple, $\langle g_-, \vec{r} | \Psi \rangle = \Psi_{g_-}(\vec{r})$ est l'amplitude de probabilité de trouver la particule au point $\vec{r}$ dans $|g_-\rangle$.

⑧ Les ingrédients essentiels du refroidissement subrecoil (par VSCPT)

8.1 Existence d'états non couplés au champ laser (pour une transition $1 \leftrightarrow 1$)

- Nous rappelons ici, sous une forme légèrement différente, la démonstration de la référence [14], valable pour une transition $1 \leftrightarrow 1$ et pour une configuration

laser quelconque, à 1, 2 ou 3 dimensions (plus générale que la configuration lin $\Delta \oplus$ lin considérée dans ce chapitre).

- Soit $\vec{E}_L^{(+)}(\vec{r})$ la partie de fréquence positive du champ laser qui peut s'écrire, dans le cas le plus général

$$\vec{E}_L^{(+)}(\vec{r}) = E_+(\vec{r}) \vec{e}_{+1} + E_0(\vec{r}) \vec{e}_0 + E_-(\vec{r}) \vec{e}_{-1} \quad (4.1)$$

$$\text{avec} \quad \vec{e}_{\pm 1} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{e}_x \pm i \vec{e}_y) \quad \vec{e}_0 = \vec{e}_z \quad (4.2)$$

- Soit par ailleurs
$$\Psi_{g_+}(\vec{r}) |g_{+1}\rangle + \Psi_{g_0}(\vec{r}) |g_0\rangle + \Psi_{g_-}(\vec{r}) |g_{-1}\rangle \quad (4.3)$$

l'état le plus général d'un atome dans l'état fondamental. Les 3 composantes $E_m(\vec{r})$ et les 3 composantes $\Psi_{g_m}(\vec{r})$ (avec $m = +, 0, -$) sont les composantes sphériques de 2 champs vectoriels $\vec{E}_L^{+}(\vec{r})$ et $\vec{\Psi}_g(\vec{r})$ [Dans l'état fondamental, l'atome a un spin 1 et sa fonction d'onde est bien un champ vectoriel].

- Posons nous alors la question suivante : Peut-on choisir les Ψ_{g_m} de façon que, par interaction avec le champ laser, l'amplitude de probabilité d'arriver dans n'importe quel sous niveau excité e_m soit nulle ?

Considérons d'abord l'état $|e_{-1}\rangle$. D'après la figure 5 (page II-2), on peut arriver dans $|e_{-1}\rangle$, soit à partir de g_{-1} (fonction d'onde Ψ_{g_-}) par absorption d'un photon π (composante E_0 de $\vec{E}_L^{+}$, coefficient de Clebsch-Gordan $-1/\sqrt{2}$); soit à partir de g_0 (fonction d'onde Ψ_{g_0}) par absorption d'un photon σ^- (composante E_- de $\vec{E}_L^{+}$, coef. de C.G. : $+1/\sqrt{2}$). La fonction d'onde obtenue dans $|e_{-1}\rangle$ après interaction avec le champ (4.1) est donc proportionnelle à

$$\Psi_{g_-}(\vec{r}) \cdot E_0(\vec{r}) \cdot (-1/\sqrt{2}) + \Psi_{g_0}(\vec{r}) \cdot E_-(\vec{r}) \cdot (+1/\sqrt{2}) \quad (4.4)$$

Si l'on veut que l'amplitude d'arriver dans $|e_{-1}\rangle$ soit nulle, il faut donc que

$$\Psi_{g_-}(\vec{r}) / E_-(\vec{r}) = \Psi_{g_0}(\vec{r}) / E_0(\vec{r}) \quad (4.5)$$

Un raisonnement analogue montrerait que l'amplitude d'arriver dans $|e_0\rangle$ est nulle si

$$\Psi_{g_-}(\vec{r}) / E_-(\vec{r}) = \Psi_{g_+}(\vec{r}) / E_+(\vec{r}) \quad (4.6)$$

et que celle d'arriver dans $|e_{+1}\rangle$ est nulle si

$$\Psi_{g_+}(\vec{r}) / E_+(\vec{r}) = \Psi_{g_0}(\vec{r}) / E_0(\vec{r}) \quad (4.7)$$

- En fait, les 3 équations (4.5), (4.6) et (4.7) sont compatibles et sont satisfaites si

$$\Psi_{g_m}(\vec{r}) = \alpha(\vec{r}) E_m(\vec{r}) \quad \forall \vec{r} \text{ et } \forall m \quad (4.8)$$

On en déduit que tout état fondamental décrit par une fonction d'onde vectorielle $\vec{\Psi}_g(\vec{r})$, proportionnelle en chaque point au champ laser $\vec{E}_L^{(+)}(\vec{r})$

$$\vec{\Psi}_g(\vec{r}) = \alpha(\vec{r}) \vec{E}_L^{(+)}(\vec{r}) \quad \forall \vec{r} \quad (4.9)$$

est un état non couplé au champ laser. Plusieurs amplitudes d'absorption d'un photon partent des sous-niveaux de g pour arriver dans les sous-niveaux de e , mais elles interfèrent toutes destructivement.

- Dans (4.8), $\alpha(\vec{r})$ est une fonction scalaire quelconque de $\vec{r}$, qui peut toujours être développée en ondes planes $e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}/\hbar}$. On peut donc introduire un ensemble d'états non couplés $\vec{\Psi}_{NC}^{\vec{p}}(\vec{r})$ paramétrés par $\vec{p}$

$$\vec{\Psi}_{NC}^{\vec{p}}(\vec{r}) = e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}/\hbar} \vec{E}_L^{(+)}(\vec{r}) \quad (4.10)$$

Remarque : Une autre démonstration de (4.9) peut être donnée en utilisant l'invariance par rotation de l'amplitude de transition [voir Ref. 14 et cours 1991-92 pages VI-8 et VI-9]

Revenons à la configuration lin $\Delta\theta$ lin étudiée dans ce chapitre. Nous allons étudier la structure des états non couplés de cette configuration en représentation p et comparer les résultats obtenus avec ceux de la configuration $\sigma^+ \sigma^-$ (voir Ref. 15 et cours 1991-92).

Expression de l'état non couplé en représentation p

- Partons de l'expression (2.2) du champ laser. Développons les 2 fonctions $\cos(kz \pm \theta/2)$ en $\exp(\pm i k z) \exp(\pm i \theta/2)$. Pour obtenir l'état non couplé (4.10) à partir de cette expression, il faut remplacer $\vec{e}_{\pm 1}$ par $|g_{\pm 1}\rangle$ et multiplier la fonction d'onde ainsi obtenue par $\exp(i p z / \hbar)$ (à 1 dimension, $\vec{p} \cdot \vec{r} / \hbar = p z / \hbar$). On obtient ainsi (en notations de Dirac)

$$|\Psi_{NC}^P\rangle = \frac{1}{2} [e^{i\theta/2} |g_{+1}, p+\hbar k\rangle + e^{-i\theta/2} |g_{+1}, p-\hbar k\rangle + e^{-i\theta/2} |g_{-1}, p+\hbar k\rangle + e^{i\theta/2} |g_{-1}, p-\hbar k\rangle] \quad (4.11)$$

- Les 4 états à l'intérieur du crochet sont orthogonaux et normés (avec des conditions aux limites périodiques pour p). $|\Psi_{NC}^P\rangle$ est donc lui aussi normé.

Couplages induits par l'interaction atome-laser V_{AL}

- Dans un traitement quantique du mouvement atomique, $\hat{z}$ doit être remplacé par l'opérateur position $\hat{z}$ dans l'expression (2.8) de V_{AL} . Le développement en exponentielles de $\cos(k\hat{z} \pm \theta/2)$ fait alors apparaître les opérateurs de translation de l'impulsion $\exp(\pm i k \hat{z}) = \sum_P |p \pm \hbar k\rangle \langle p|$, de sorte que

$$V_{AL} = \frac{\hbar \Omega}{4} \sum_P [-e^{i\theta/2} |e_0, p+\hbar k\rangle \langle g_{-1}, p| - e^{-i\theta/2} |e_0, p-\hbar k\rangle \langle g_{-1}, p| + e^{-i\theta/2} |e_0, p+\hbar k\rangle \langle g_{+1}, p| + e^{i\theta/2} |e_0, p-\hbar k\rangle \langle g_{+1}, p|]_{+h.c.} \quad (4.12)$$

L'expression (4.12) permet de calculer tous les éléments de matrice non nuls de V_{AL} . Le champ laser est une superposition linéaire de 2 ondes stationnaires σ^+ et σ^- d'après (2.2). L'onde stationnaire σ^+ (σ^-) ne peut exciter les atomes qu'à partir de $|g_{-1}\rangle$ ($|g_{+1}\rangle$) et change p de $+\hbar k$ ou $-\hbar k$.

- On voit ainsi que les états de base du système se groupent en familles de dimension infinie d'états couplés de proche en proche par V_{AL} . La figure 10 représente une telle famille. Les états sont rangés, verticalement suivant le nombre quantique interne (g_{+1}, g_0, g_{-1}), horizontalement suivant la valeur de l'impulsion. Les flèches obliques représentent les couplages induits par V_{AL} . Les quantités $\pm e^{\pm i\theta/2}$ écrites à côté de ces flèches représentent les valeurs correspondantes des éléments de matrice de V_{AL} (au facteur $\hbar \Omega / 4$ global près, le même pour toutes les transitions), l'état g figurant dans le ket, l'état e dans le bra (sinon il faut prendre les complexes conjugués).

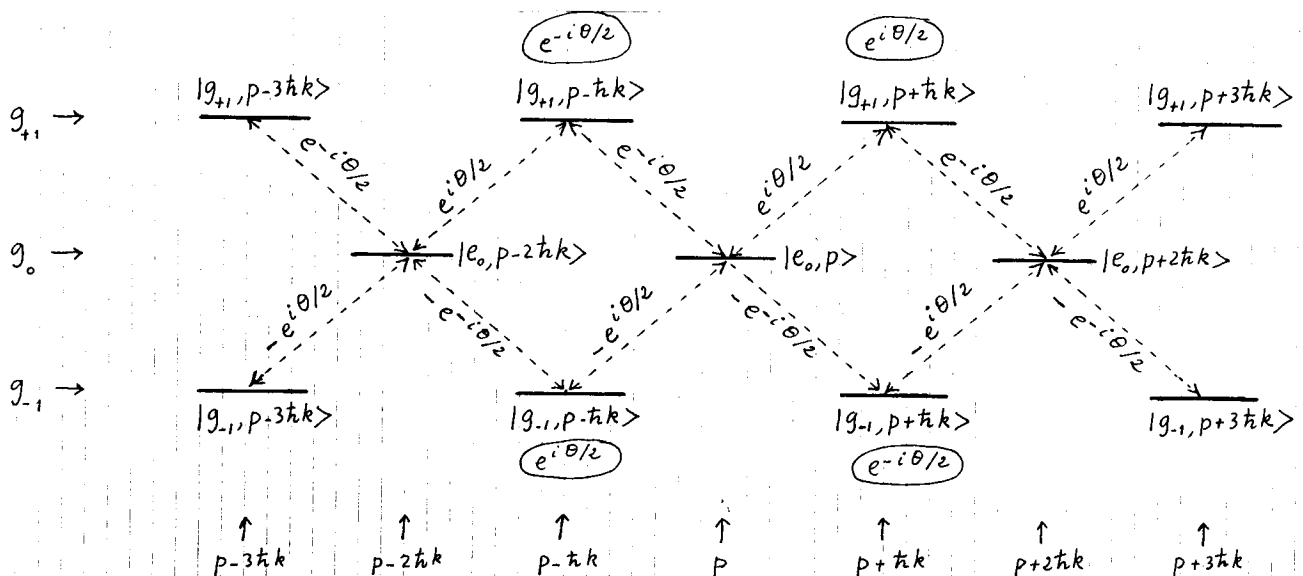
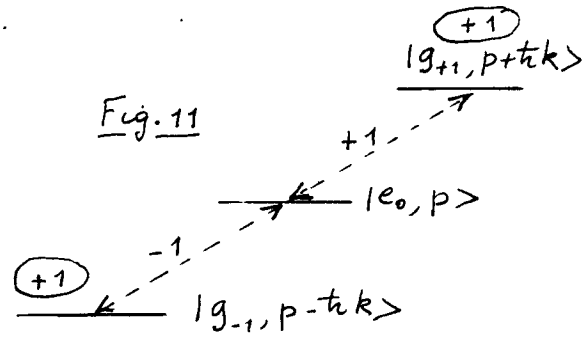


Fig. 10

- Sous l'effet des seuls couplages dûs à V_{AL} , l'impulsion de l'atome pourrait 1V-4
augmenter ou diminuer indéfiniment par multiples de $\pm \hbar k$. Il s'agit là d'un processus de redistribution de photons entre les 2 ondes progressives formant chaque onde stationnaire σ^+ ou σ^- . On peut interpréter ainsi, en termes de photons, les forces dipolaires associées, dans le traitement semiclassique, au gradient spatial du niveau couplé $|\psi_c\rangle$.

- Dans le cas de la configuration $\sigma^+ - \sigma^-$, le champ laser est une superposition de 2 ondes progressives σ^+ et σ^- (et non plus stationnaires) se propageant en sens inverses. Les états de base couplés par V_{AL} se groupent alors en familles finies de 3 états (voir Fig. 11). Il n'y a plus alors de redistribution de photons. Dans le traitement semiclassique, l'énergie de l'état couplé ne dépend pas de z .

Fig. 11



Interférences destructives apparaissant pour l'état non couplé

- L'état non couplé (4.11) est une superposition linéaire de 4 des états de base de la famille infinie représentée sur la figure 10. Les coefficients de cette superposition sont les quantités entourées d'un rond sur la figure (au facteur $1/2$ près, le même pour les 4 états). On voit alors clairement les interférences destructives à l'origine du caractère non couplé de $|\psi_{NC}^P\rangle$.

Par exemple, l'amplitude de probabilité d'aller de $|g_{+1}, p + \hbar k\rangle$ à $|e_0, p\rangle$ est égale au produit de l'amplitude, $e^{i\theta/2}$, d'être dans $|g_{+1}, p + \hbar k\rangle$ par l'amplitude, $e^{i\theta/2}$, de la transition, soit en tout $e^{i\theta}$. Cette amplitude est l'opposée de celle d'aller de $|g_{-1}, p - \hbar k\rangle$ à $|e_0, p\rangle$, égale à $e^{i\theta/2} \times (-e^{i\theta/2}) = -e^{i\theta}$. On verrait de la même façon que les 2 amplitudes d'aller de $|g_{+1}, p - \hbar k\rangle$ et $|g_{-1}, p + \hbar k\rangle$ à $|e_0, p\rangle$ valent, respectivement, $e^{-i\theta/2} \times e^{-i\theta/2} = e^{-i\theta}$ et $e^{-i\theta/2} \times (-e^{-i\theta/2}) = -e^{-i\theta}$ et se compensent exactement. Enfin, l'état $|e_0, p + 2\hbar k\rangle$ peut être atteint, soit à partir de $|g_{+1}, p + \hbar k\rangle$, soit à partir de $|g_{-1}, p + \hbar k\rangle$, avec des amplitudes respectivement égales à $e^{i\theta/2} e^{-i\theta/2} = 1$ et $e^{-i\theta/2} \times (-e^{i\theta/2}) = -1$, qui interfèrent donc destructivement. Un même raisonnement s'applique à $|e_0, p - 2\hbar k\rangle$.

- Finalement, les 4 états de base figurant dans (4.11) peuvent être couplés individuellement à 2 des 3 états excités $|e_0, p - 2\hbar k\rangle$, $|e_0, p\rangle$, $|e_0, p + 2\hbar k\rangle$. Mais les coefficients de la superposition linéaire (4.11) sont tels que les amplitudes d'excitation interfèrent destructivement 2 par 2.

- Dans le cas de la configuration $\sigma^+ - \sigma^-$ (Fig. 4.11), l'état non couplé est la superposition linéaire symétrique de $|g_{+1}, p + \hbar k\rangle$ et $|g_{-1}, p - \hbar k\rangle$.

8-3 Existence d'un état noir.

- Dans le traitement quantique de cette partie, l'hamiltonien total doit contenir l'opérateur énergie cinétique $\hat{p}^2/2M$ où $\hat{p}$ est l'opérateur impulsion. Les états de base de la figure 10 sont des états propres de $\hat{p}^2/2M$. En particulier, les 4 états apparaissant dans (4.11) ont des énergies cinétiques égales à $(p + \hbar k)^2/2M$ pour $|g_{\pm 1}, p + \hbar k\rangle$, à $(p - \hbar k)^2/2M$ pour $|g_{\pm 1}, p - \hbar k\rangle$.

- Considérons à $t=0$ un atome dans l'état $|\psi(t=0)\rangle = |\psi_{NC}^P\rangle$. Un tel état n'évoluera pas sous le seul effet de V_{AL} puisque $V_{AL}|\psi_{NC}^P\rangle = 0$. Il ne se désintègrera pas par émission spontanée puisque les états g sont des états fondamentaux. Par contre $|\psi_{NC}^P\rangle$ peut évoluer à cause de $\hat{p}^2/2M$ (évolution propre). Comme $|\psi_{NC}^P\rangle$ est une superposition d'états d'énergies cinétiques différentes, il va apparaître un déphasage entre les exponentielles d'évolution propre qui multiplieront $|g_{+1}, p + \hbar k\rangle$ et celles qui multiplieront $|g_{-1}, p - \hbar k\rangle$. L'état $|\psi(t)\rangle$ pour $t > 0$ ne coïncide plus avec $|\psi_{NC}^P\rangle$ et les amplitudes d'excitation à partir des diverses composantes de $|\psi(t)\rangle$ n'interfèrent plus destructivement.

- Le raisonnement précédent montre alors que l'état $|\Psi_{NC}^{P=0}\rangle$ est privilégié. Les énergies cinétiques des 4 états de base de (4.11) sont en effet égales à $\hbar^2 k^2 / 2M$ quand $p=0$. Les exponentielles d'évolution libre sont alors toutes égales à $e^{-i\hbar k^2 t / 2M}$ et n'introduisent qu'un facteur de phase global qui ne change pas l'état physique. L'état
- $$|\Psi_{NC}^{P=0}\rangle = \frac{1}{2} [e^{i\theta/2} |g_{+1}, +\hbar k\rangle + e^{-i\theta/2} |g_{+1}, -\hbar k\rangle + e^{-i\theta/2} |g_{-1}, +\hbar k\rangle + e^{i\theta/2} |g_{-1}, -\hbar k\rangle] \quad (4.13)$$
- est donc un piège parfait pour les atomes qui ne peuvent le quitter, ni par absorption d'un photon, ni par émission spontanée, ni par évolution propre. L'état (4.13) est appelé "état noir".

Remarque : Le résultat précédent demeure valable à un nombre quelconque de dimensions. Si l'on fait $\vec{p} = \vec{0}$ dans (4.10), on obtient pour $\vec{\Psi}_{NC}^{\vec{p}=\vec{0}}$ une fonction d'onde isomorphe au champ laser. Or le champ laser monochromatique, de fréquence ω_L , peut toujours être développé en ondes planes dont les vecteurs d'onde $\vec{k}_i$ ont le même module $|\vec{k}_i| = \omega_L / c$. Il en est donc de même pour $\Psi_{NC}^{\vec{p}=\vec{0}}$. Comme l'énergie cinétique des diverses ondes planes $e^{i\vec{k}_i \cdot \vec{r}}$ est égale à $\hbar^2 k_i^2 / 2M = \hbar^2 \omega_L^2 / 2Mc^2$, et est donc indépendante de i , on en déduit que $|\Psi_{NC}^{\vec{p}=\vec{0}}\rangle$ est état propre de $\hat{p}^2 / 2M$ et est donc un état stationnaire.

8-4 Durée de vie des états quasi-noirs

- Faisons agir $\hat{p}^2 / 2M$ sur l'expression (4.11) de $|\Psi_{NC}^P\rangle$. Les énergies cinétiques des 4 états de base contiennent toutes un terme $p^2 / 2M + \hbar^2 k^2$ indépendant de l'état et un terme $\pm \hbar k p / M$ qui varie d'un état à l'autre. On obtient donc :

$$\frac{\hat{p}^2}{2M} |\Psi_{NC}^P\rangle = \left(\frac{p^2}{2M} + \frac{\hbar^2 k^2}{2M} \right) |\Psi_{NC}^P\rangle + \frac{\hbar k p}{M} |\Phi_C^P\rangle \quad (4.14)$$

avec

$$|\Phi_C^P\rangle = \frac{1}{2} \left[e^{i\frac{\theta}{2}} |g_{+1}, p+\hbar k\rangle - e^{-i\frac{\theta}{2}} |g_{+1}, p-\hbar k\rangle + e^{-i\frac{\theta}{2}} |g_{-1}, p+\hbar k\rangle - e^{i\frac{\theta}{2}} |g_{-1}, p-\hbar k\rangle \right] \quad (4.15)$$

A cause des changements de signe dans les 2^{ème} et 4^{ème} termes de (4.15) par rapport à (4.11), les transitions de $|\Phi_C^P\rangle$ vers les états excités comme $|e_0, p\rangle$ ne sont plus destructives. L'état $|\Phi_C^P\rangle$ est donc couplé au laser. Il va se désintégrer radiativement avec un taux de l'ordre de Γ' et acquies un déplacement lumineux de l'ordre de $\hbar \delta'$ [voir Eq. (2.16)].

- L'équation (4.14) montre que $\hat{p}^2 / 2M$ couple $|\Psi_{NC}^P\rangle$ à $|\Phi_C^P\rangle$ et contamine donc l'état $|\Psi_{NC}^P\rangle$ par l'état instable $|\Phi_C^P\rangle$. On en déduit que $|\Psi_{NC}^P\rangle$ va se désintégrer radiativement avec un taux qui, à la limite $\hbar k p / M \ll \Gamma'$, va varier en $\frac{\hbar^2 p^2}{M^2} \Gamma' / \delta'^2$.

Remarques

- (i) Le raisonnement précédent n'est que qualitatif. L'état $|\Phi_C^P\rangle$ ne se désintègre pas avec une seule constante de temps. D'autres états fondamentaux de la figure 10 sont couplés aux mêmes états excités que $|\Phi_C^P\rangle$ et ces autres états fondamentaux sont eux mêmes couplés par $\hat{p}^2 / 2M$ à d'autres états $|\Psi_{NC}^{P+2n\hbar k}\rangle$ ($n = \pm 1, \pm 2, \dots$) analogues à $|\Psi_{NC}^P\rangle$. Il faudrait en toute rigueur déterminer les modes propres de désintégration radiative de l'état fondamental. L'approche utilisant la théorie des bandes (voir § 9.2 plus loin) est mieux adaptée que la représentation p à ce genre de problème car elle tient compte de la périodicité spatiale du potentiel lumineux associé à $V_A L$. On peut alors justifier plus rigoureusement qu'il existe, en plus de l'état noir (4.13), de durée de vie infinie, d'autres états quasi-noirs, repérés par une quasisimpulsion P , dont la largeur radiative tend vers 0 comme p^2 quand $p \rightarrow 0$.

(ii) Le cas de la configuration $\sigma^+ \sigma^-$ est beaucoup plus simple. La combinaison linéaire antisymétrique de $|g_{-1}, p - \hbar k\rangle$ et $|g_{+1}, p + \hbar k\rangle$ est un état $|\psi_c^p\rangle$ couplé à $|e_0, p\rangle$, ayant une durée de vie radiative bien définie (voir Fig. 11). Il en est de même de $|\psi_{nc}^p\rangle$ sous l'effet du couplage motional introduit par $\hat{p}^2/2M$ entre $|\psi_{nc}^p\rangle$ et $|\psi_c^p\rangle$.

En conclusion de ce paragraphe, on peut dire que l'utilisation de la représentation p nous a permis de généraliser, au moins de manière qualitative, à la configuration lin $\Delta \theta$ lin les résultats essentiels obtenus précédemment dans le cas plus simple de la configuration $\sigma^+ \sigma^-$: existence dans l'état fondamental d'un état noir $p=0$ et d'états quasis noirs $p \neq 0$ qui deviennent de plus en plus noirs quand $p \rightarrow 0$. Cette sélectivité en impulsions, jointe aux changements aléatoires d'impulsions lors des processus d'émission spontanée est à la base du mécanisme de refroidissement VSCPT qui accumule les atomes dans l'état noir [voir Fig. 4 page I.6]. La signature d'un tel refroidissement est d'apparition d'un double pic dans la distribution d'impulsions, puisqu'une mesure de $\hat{p}$ sur l'état noir (4.13) donne 2 valeurs possibles $+\hbar k$ et $-\hbar k$.

⑨ - Revue de quelques approches quantitatives

9.1 Equations de Bloch optiques généralisées

Une telle approche a déjà été utilisée pour la configuration $\sigma^+ \sigma^-$ (voir Ref. 15). Elle peut se généraliser à la configuration lin $\Delta \theta$ lin. Les éléments de matrice de l'opérateur densité ρ évoluent sous l'effet de V_{AL} , de $\hat{p}^2/2M$, de l'hamiltonien atomique interne $H_A^{int} = \hbar \omega_A |e_0\rangle\langle e_0|$. Il faut introduire en plus les termes de relaxation radiative dus à l'émission spontanée. Les équations sont beaucoup plus complexes que dans le cas $\sigma^+ \sigma^-$. Tout d'abord, V_{AL} couple entre eux une infinité d'états (voir Fig. 10). Il y a également des cohérences entre états d'impulsions différentes, comme $\langle e_0, p | \rho | e_0, p' \rangle$ ou $\langle g_m, p | \rho | g_{m'}, p' \rangle$ ($m, m' = \pm 1$). Ces cohérences reflètent le caractère non homogène de la distribution spatiale des atomes, dû aux ondulations spatiales du potentiel optique associé à V_{AL} . Comme nous l'avons vu plus haut dans les 2 premières parties de ce chapitre, la dépendance spatiale des vamps de départ des états fondamentaux et des déplacements lumineux joue un rôle essentiel dans le pré-refroidissement Sisyphus.

9.2 Approches utilisant la théorie des bandes

- Le principe d'une telle approche, particulièrement commode à la limite des grands désaccords ($| \delta | \gg \Gamma$), est le suivant (voir Ref. 16): On commence par diagonaliser l'hamiltonien $H_0 = \hat{p}^2/2M + H_A^{int} + V_0(\hat{z})$ où $V_0(\hat{z})$ est l'opérateur décrivant le déplacement lumineux de l'état fondamental. $V_0(\hat{z})$ dépend non seulement de l'opérateur position $\hat{z}$, mais agit aussi sur les degrés

de liberté internes. En un point donné z_0 , les valeurs propres de $U_0(z_0)$ sont les sous-niveaux de l'état fondamental ayant un déplacement lumineux bien défini, égal à la valeur propre correspondante de $U_0(z_0)$, de l'ordre de $\hbar \delta'$ [voir § 2.3.]. Comme $U_0(z)$ est périodique, de période $\lambda/2$, les valeurs propres de H_0 forment des bandes d'énergie dont les niveaux sont repérés par un nombre quantique n (indice de bande) et une quasi-impulsion p variant dans la 1^{ère} zone de Brillouin $-\hbar k \leq p \leq +\hbar k$. On tient ensuite compte des transitions radiatives entre bandes d'énergie dues aux absorptions et réémissions spontanées de photons (caractérisées par des taux de l'ordre de Γ'). La condition $|\delta| \gg \Gamma'$, qui entraîne $|\delta'| \gg \Gamma'$, permet alors de simplifier les équations d'évolution dans la base des bandes (approximation séculaire) et de les remplaçant par des équations de taux reliant les seules populations des diverses bandes. Une telle approche a été appliquée au problème du refroidissement laser d'une transition $1 \leftrightarrow 1$ en configurations lin $\Delta \theta$ lin [voir Ref. 9].

- Illustrons les considérations générales précédentes en montrant comment on peut calculer les modes propres de désintégration radiative du système en configuration lin $\Delta \theta$ lin [problème évoqué dans la remarque (i) du bas de la page IV-5].

Commençons par le cas plus simple de la configuration $\sigma^+ - \sigma^-$. Les modes propres de désintégration pour la famille des 3 états de la figure 11 s'obtiennent en diagonalisant un hamiltonien effectif non hermitique H_{eff} , tenant compte des couplages de Rabi dus à V_{AL} entre les 3 états, de l'énergie cinétique et de l'énergie interne de chaque état, et de l'instabilité radiative de l'état $|e_0, p\rangle$ décrite en ajoutant un terme imaginaire, $-i\hbar\Gamma/2$ à l'énergie interne de cet état. La diagonalisation de H_{eff} donne 3 valeurs propres dont les parties imaginaires sont de l'ordre, respectivement, de $\Gamma/2$ (désintégration de e), $\Gamma'_c/2$ (désintégration de l'état couplé $|\psi_c\rangle$), $\Gamma'_{nc}(p)/2 \sim p^2$ (désintégration de l'état quasi-noir $|\psi_{nc}(p)\rangle$).

Un calcul analogue peut être fait pour la configuration lin $\Delta \theta$ lin. Mais il faut alors diagonaliser un hamiltonien effectif H_{eff} , de dimension infinie, ayant la même structure que le précédent, mais agissant maintenant dans la multiplicité infinie d'états de la figure 10. On note sur cette figure que, sur chaque ligne horizontale (c-à-d pour chaque état interne), les impulsions des états diffèrent par des nombres pairs de $\hbar k$: $2n\hbar k$ ($n = \pm 1, \pm 2 \dots$). Si l'on considère une superposition linéaire quelconque $|\psi\rangle$ des états de la figure 10, les fonctions d'onde multipliant $|g_{+1}\rangle$, $|g_0\rangle$ ou $|g_{-1}\rangle$ sont donc de la forme $e^{ipz/\hbar} u(z)$, où $-\hbar k \leq p \leq +\hbar k$, et où $u(z)$ est une fonction périodique de z (dont les coefficients du développement en série de Fourier sont les coefficients du développement de $|\psi\rangle$). On reconnaît là une fonction de Bloch, de quasi-impulsion p . La diagonalisation de H_{eff} dans la famille infinie d'états de la figure 10 va donc donner tous les états de même quasi-impulsion p dans le diagramme d'énergie des bandes. Les parties imaginaires des valeurs propres seront les taux de désintégration des états propres correspondants, qui peuvent donc être considérés comme des modes propres de désintégration radiative, de quasi-impulsion p .

La démarche que nous venons d'esquisser ne fait aucune hypothèse sur la saturation et sur les valeurs respectives de δ et Γ . Si la transition n'est pas saturée, on peut éliminer adiabatiquement les états $|e_0, p + 2n\hbar k\rangle$ et se ramener au problème de la désintégration du seul état fondamental.

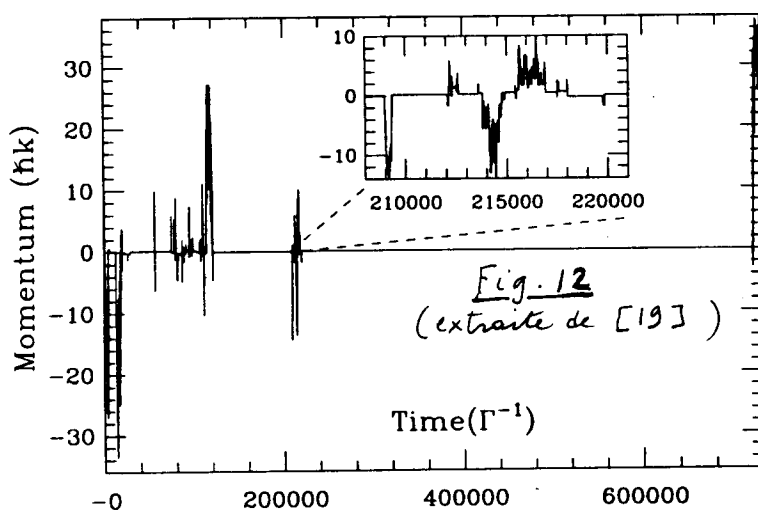
Si $|\delta| \gg \Gamma$, le problème peut être encore simplifié en négligeant Γ' dans une première étape. L'hamiltonien à diagonaliser est alors $\hat{p}^2/2m + H_A^{\text{int}} + U_0(\hat{z})$. Les termes en Γ' sont ensuite traités perturbativement.

9.3 - Simulations Monte Carlo

- L'application de telles méthodes au refroidissement VSCPT a été faite tout d'abord dans le cas simple d'une configuration $5^+ - 5^-$ [Refs 17 à 19]. Entre 2 émissions spontanées consécutives, un atome donné évolue à l'intérieur d'un sous-espace fini à 3 états (voir Fig. 11). L'évolution de son état $|\psi(t)\rangle$ est régie par l'hamiltonien effectif non hermitique H_{eff} mentionné plus haut. L'indice p , qui caractérise les 3 états du sous espace, est une constante du mouvement au cours d'une telle évolution. Connaissant $|\psi(t)\rangle$, on peut calculer la probabilité $W(t)dt = \Gamma |\langle e_0, p | \psi(t) \rangle|^2 dt$ pour que l'atome quitte ce sous-espace par émission spontanée entre t et $t+dt$ et saute dans une nouvelle multiplicité de 3 états couplés par V_{AL} , caractérisée par un nouvel indice p' , avec $|p-p'| \leq \hbar k$. Comme $|\psi(t)\rangle$ est une superposition linéaire de 3 modes de désintégration radiative, de taux $\Gamma_1 \sim \Gamma$, $\Gamma_2 \sim \Gamma'_2$, $\Gamma_3 = \Gamma'_{NC}(p)$, la fonction délai $W(t)$, qui donne la distribution de probabilité des intervalles de temps séparant 2 émissions spontanées successives est une superposition d'exponentielles décroissantes dont certaines peuvent avoir un temps d'amoortissement très long quand $p \rightarrow 0$. On peut alors, connaissant $W(t)$ et le diagramme angulaire d'émission spontanée, tirer au sort l'instant où l'émission spontanée se produit et la direction d'émission du photon. On connaît alors la nouvelle famille p' dans laquelle l'atome arrive après le saut, et ainsi de suite. On remplace ainsi l'étude de l'évolution de l'opérateur densité ρ d'un ensemble statistique d'atomes (équations de Bloch optiques généralisées) par l'étude de l'évolution stochastique d'un seul atome. On recommence le même calcul sur un grand nombre N d'atomes et on moyenne les résultats correspondant à l'observable mesurée au bout d'un temps d'interaction Θ .

La figure 12 représente les résultats d'une telle évolution stochastique individuelle et montre les variations aléatoires de p au cours du temps, mesuré en unités de Γ^{-1} . Chaque discontinuité correspond à un saut quantique d'émission spontanée au cours duquel p change brusquement. On constate que, plus p est proche de 0, plus long peut être le temps séparant 2 sauts. Cette propriété se retrouve à toutes les échelles (voir encart). La marche au hasard sur l'axe de t est également dominée par quelques rares événements. Un seul événement, correspondant au délai le plus long, parmi 4000 événements (nombre de sauts sur cette figure) représente 70% du temps total. Nous reviendrons plus loin en détail sur les propriétés de telles marches aléatoires "anormales".

La figure 13 montre la distribution d'impulsion obtenue en laissant évoluer 10000 atomes comme sur la figure 12 et en mesurant au bout d'un temps $\Theta = 5000 \Gamma^{-1}$ l'impulsion de chaque atome. La figure 13 a montré



le nuage de points obtenues en portant en ordonnées l'impulsion de chaque atome dont le numéro est repéré sur l'axe des abscisses. La figure 13.b donne l'histogramme des valeurs de p déduit de la figure 13.a en prenant une largeur de canal d'échantillonnage de 0.25 $\hbar k$ pour la figure principale et de 0.05 $\hbar k$ pour l'encart

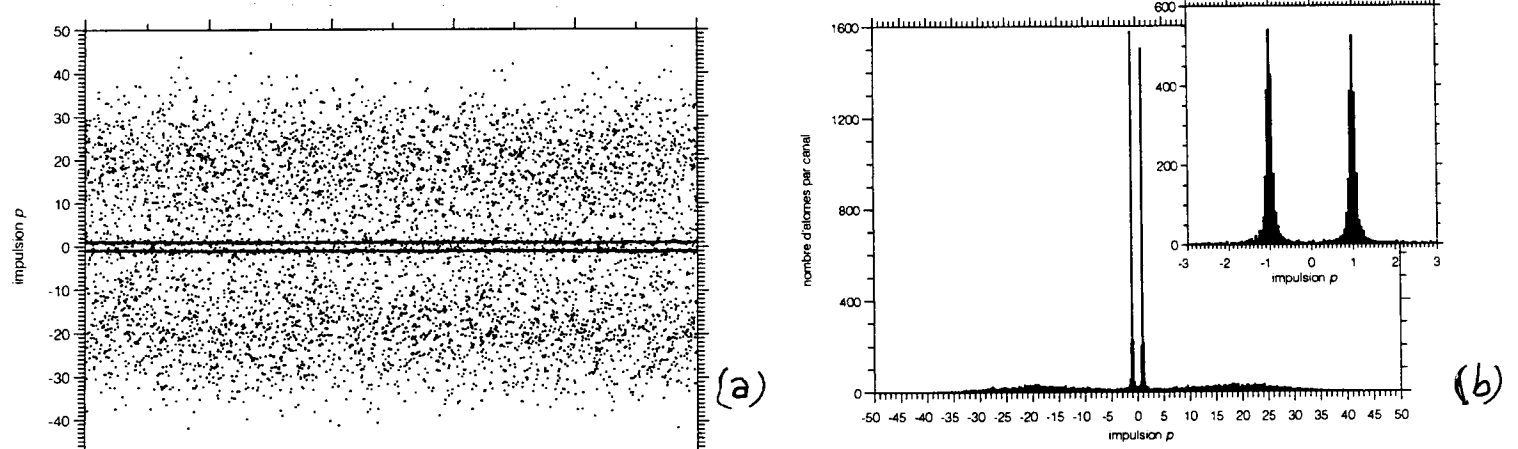


Fig. 13 (extraite de [18])

- Le cas de la configuration lin $\Delta 0$ lin est plus complexe. Entre 2 émissions spontanées consécutives, l'atome évolue dans une multiplicité infinie d'états (Fig. 10), et il n'est plus possible de calculer analytiquement la fonction délai comme précédemment. D'autres méthodes Monte Carlo plus générales ont été développées pour traiter ce genre de problèmes : méthodes "Monte Carlo Wave Function", ou MCWF (voir Refs 20, 21). Le temps est découpé en petits intervalles Δt . Entre t et $t+\Delta t$, l'état $|\psi(t)\rangle$ de l'atome change de $|\Delta\psi(t)\rangle = -iH_{\text{eff}}|\psi(t)\rangle\Delta t/\hbar$, où H_{eff} est l'hamiltonien effectif mentionné plus haut (§ 9.2). A l'issue de l'intervalle Δt , on fait un tirage au sort pour déterminer si une émission spontanée se produit ou non, et si oui, dans quelle direction le photon est émis. Si l'émission spontanée ne s'est pas produite, on renormalise à 1 l'état obtenu $|\psi(t+\Delta t)\rangle = |\psi(t)\rangle + |\Delta\psi(t)\rangle$ et on laisse l'évolution se poursuivre sous l'effet du même H_{eff} entre $t+\Delta t$ et $t+2\Delta t$. Si par contre une émission spontanée s'est produite, on détermine l'état de l'atome juste après le saut correspondant et on reprend une nouvelle évolution stochastique sous l'effet du nouvel hamiltonien effectif correspondant à la nouvelle famille d'états dans laquelle l'atome se trouve, et ainsi de suite. Plusieurs courbes de la référence [9] ont été obtenues par une telle méthode.

Références (suite des références des pages II-11 et III-11)

[14] - M.A. Ol'shanii, V. Munogin, in *Proceedings of Light Induced Kinetic Effects*, ed. by L. Moi et al. (Pise, 1991) - Mêmes auteurs, *Optics Comm.* **89**, 393 (1992)
 [15] - A. Aspect, E. Arimondo, R. Kaiser, N. Vansteenkiste, C. Cohen-Tannoudji, *JOSA* **B6**, 2112 (1989)
 [16] - Y. Castin, J. Dalibard, *Europhys. Lett.* **14**, 761 (1991)
 [17] - C. Cohen-Tannoudji, F. Bardou, A. Aspect, in *Laser Spectroscopy X*, ed. by M. Ducloy et al., World Scientific, 1992
 [18] - F. Bardou, Thèse de Doctorat, Paris 1995
 [19] - F. Bardou, J.P. Bouchaud, O. Emile, A. Aspect, C. Cohen-Tannoudji, *P.R.L.* **72**, 203 (1994)
 [20] - J. Dalibard, Y. Castin, K. Mølmer, *P.R.L.* **68**, 580 (1992) et *JOSA* **B10**, 524 (1993)
 [21] - P. Marte, R. Dum, R. Taieb, P. Zoller, *Phys Rev* **A47**, 1107 et 1378 (1993), *Phys. Rev. Lett.* **71**, 1335 (1993).