

Résumé du cours 1995-1996

Au cours des dix dernières années, plusieurs méthodes nouvelles ont été mise au point, comme le refroidissement laser subrecul ou le refroidissement évaporatif permettant d'obtenir des échantillons d'atomes ultrafroids, avec des températures effectives de l'ordre du microkelvin, voire du nanokelvin. Le cours 1995-96 est le premier d'une série de cours se proposant d'analyser de manière quantitative les possibilités de ces méthodes, leur optimisation, les perspectives nouvelles qu'elles ouvrent, concernant notamment l'étude de nouveaux états de la matière que la récente observation d'une condensation de Bose-Einstein d'atomes alcalins permet d'envisager. Ce premier cours a porté plus particulièrement sur le refroidissement laser subrecul et sur la présentation d'approches statistiques nouvelles permettant d'analyser les propriétés asymptotiques d'un tel refroidissement aux longs temps d'interaction.

Le cours commence par une introduction générale faisant le point sur l'état actuel et les tendances d'évolution du domaine de recherches. Le principe des diverses méthodes de refroidissement et de piégeage d'atomes neutres est brièvement rappelé

### Le refroidissement subrecul

#### *La limite associée au recul*

Le refroidissement laser consiste à utiliser des échanges quasi-résonnants d'impulsion entre atomes et photons pour diminuer la dispersion  $\delta p$  des impulsions  $p$  d'un ensemble d'atomes, ou encore la dispersion  $\delta v$  de leurs vitesses  $v$  ( $p$  et  $v$  sont reliées par  $p = Mv$  où  $M$  est la masse de l'atome). Le bilan des échanges d'impulsion lors de cycles absorption-émission (induite ou spontanée) fait en général apparaître une "force de friction" qui diminue la valeur moyenne  $\langle p \rangle$  de  $p$ . Par ailleurs, le caractère aléatoire de la direction d'émission et de l'instant d'émission des photons émis spontanément est à l'origine d'une dispersion  $\delta p$  des valeurs possibles de  $p$  autour de leur valeur moyenne  $\langle p \rangle$ , dispersion qui est en général supérieure à l'impulsion élémentaire  $\hbar k$  des photons. La limite inférieure  $\delta p > \hbar k$  qui apparaît ainsi pour  $\delta p$  lorsque l'atome ne cesse d'absorber et de réémettre des photons est appelée la "limite de recul", car elle est liée au recul aléatoire communiqué à l'atome par les photons qu'il émet spontanément.

#### *Comment franchir une telle limite ?*

En fait, la limite de recul peut être contournée. Deux méthodes pour y parvenir ont été proposées et démontrées : la première, utilisant un piégeage cohérent de population sélectif en vitesses, méthode appelée "VSCPT" ("Velocity Selective Coherent Population Trapping"), mise en œuvre par notre équipe à Paris à partir de 1988 ; la seconde, appelée "refroidissement Raman" car elle utilise des séquences d'impulsions Raman stimulées et spontanées, mise en œuvre à Stanford en 1992. L'idée géné-

rale commune à ces deux méthodes consiste à bloquer l'absorption de lumière par les atomes de vitesse nulle. La probabilité par unité de temps  $\Gamma'(v)$  d'absorber un photon est, pour un atome de vitesse  $v$ , une fonction de  $v$  qui s'annule en  $v = 0$ . Les atomes ultrafroids, de vitesse quasi-nulle  $v \simeq 0$ , sont ainsi protégés des effets néfastes de la lumière puisque, n'absorbant plus de lumière, ils ne subissent plus le recul aléatoire que leur communiqueraient les photons réémis ensuite spontanément. Quant aux autres atomes, de vitesse non nulle  $v \neq 0$ , ils peuvent eux absorber de la lumière. Le recul qu'ils subissent ensuite lors de la réémission spontanée de photons change leur vitesse de manière aléatoire. Si la vitesse finale, après un cycle absorption-émission spontanée, se retrouve proche de zéro, les atomes sont piégés dans l'état  $v \simeq 0$ , appelé "état noir". Le refroidissement subrecul consiste donc en un transfert des atomes des états  $v \neq 0$  dans lesquels ils peuvent absorber de la lumière vers les états  $v \simeq 0$  dans lesquels ils se retrouvent piégés et s'accumulent.

### *Quelques problèmes posés par le refroidissement subrecul*

(i) L'image donnée plus haut du refroidissement subrecul est celle d'une marche au hasard dans l'espace des vitesses, avec un "piège" dans cet espace autour de  $v = 0$ . Le refroidissement est d'autant plus efficace que les atomes tombent plus facilement dans le piège. Le problème qui se pose alors est celui de l'efficacité d'une marche au hasard pour aboutir en un point donné, notamment lorsqu'on essaie de généraliser la première expérience réalisée à une dimension à deux et trois dimensions, c'est-à-dire lorsqu'on essaie de refroidir non plus une seule composante de la vitesse, mais les trois. Il est bien connu en effet qu'une marche au hasard dans un espace à  $D$  dimensions est d'autant moins efficace pour revenir en un point donné que  $D$  est plus grand. On peut donc se demander s'il n'est pas possible d'augmenter l'efficacité du refroidissement subrecul en combinant le mécanisme décrit plus haut de marche au hasard, en présence d'un piège, avec un mécanisme de refroidissement plus habituel, comme le refroidissement Doppler où le refroidissement Sisyphe, qui donne naissance à une force de friction poussant les atomes vers le point  $v = 0$ .

(ii) Lorsque la limite de recul est franchie,  $\delta p$  est inférieur à  $\hbar k$ , et  $h/\delta p$ , c'est-à-dire la longueur d'onde de de Broglie des atomes, devient supérieure à  $h/\hbar k$ , qui n'est autre que la longueur d'onde des lasers utilisés pour refroidir les atomes. Le caractère ondulatoire du mouvement du centre de masse de l'atome ne peut plus alors être ignoré, de sorte qu'un traitement entièrement quantique du mouvement atomique devient nécessaire. Les équations de Bloch optiques, qui sont utilisées habituellement pour analyser le refroidissement laser, deviennent alors beaucoup plus complexes, puisque les éléments de la matrice densité atomique dépendent de deux types de nombres quantiques, les nombres quantiques internes et les nombres quan-

tiques externes décrivant l'état du centre de masse. Des solutions analytiques de ces équations deviennent impossibles à obtenir, surtout aux dimensions  $D=2$  et  $D=3$ . Les calculs numériques deviennent également trop imprécis car l'apparition de structures de plus en plus étroites dans la distribution des vitesses nécessite de discrétiser l'impulsion  $p$  sur une grille de plus en plus fine quand le temps d'interaction  $\theta$  croît, et le nombre d'équations différentielles couplées à résoudre devient de plus en plus élevé.

Des questions importantes se posent cependant, auxquelles il semble difficile de répondre en utilisant les méthodes traditionnelles de l'optique quantique. Comment évolue la largeur de la distribution des vitesses quand  $\theta$  croît ? Tend-elle vers zéro ? Quelle est la proportion d'atomes refroidis ? Quelle augmentation de la densité atomique dans l'espace des phases peut-on espérer obtenir avec le refroidissement subrecul ? Le but du cours de cette année est précisément de présenter des modèles simples et des approches théoriques nouvelles apportant un éclairage physique nouveau et quantitatif sur les deux types de problèmes évoqués ci-dessus.

### **Etude d'un modèle simple combinant effet Sisyphe et refroidissement subrecul**

Le refroidissement Sisyphe, étudié en détail dans un cours antérieur, repose sur l'existence d'une modulation spatiale des niveaux d'énergie d'un atome et des taux de transitions radiatives d'un niveau à l'autre. Ces deux modulations spatiales sont corrélées de telle manière que l'atome en mouvement gravit plus souvent des collines de potentiel qu'il n'en descend, comme le héros de la mythologie grecque. Son énergie cinétique diminue donc au profit de son énergie potentielle, le gain d'énergie potentielle étant dissipé par les photons émis spontanément qui ont en moyenne une énergie supérieure à celle des photons absorbés. Plusieurs séances du cours 1995-96 ont été consacrées à l'étude d'un modèle montrant qu'un tel refroidissement Sisyphe peut coexister avec un refroidissement subrecul VSCPT. Le but fixé était d'identifier, de manière plus approfondie que dans la littérature existante sur ce sujet, l'origine physique des transitions d'un niveau à l'autre et d'évaluer l'ordre de grandeur de la force de friction associée.

#### *Traitement semiclassique*

Le modèle choisi consiste en une transition atomique reliant deux niveaux atomiques  $g$  et  $e$  de moment cinétique égal à 1,  $J_g = J_e = 1$ , excitée par deux faisceaux laser se propageant en sens opposés le long de l'axe  $z$  avec des polarisations linéaires faisant entre elles un angle  $\theta$  (configuration "Lin $\theta$ Lin"). Si  $\theta$  est différent de  $\pi/2$ , l'intensité totale  $I(z)$  au point  $z$  est une fonction oscillante de  $z$ .

On commence par utiliser une description semiclassique des degrés de liberté de translation, l'atome étant considéré comme une particule classique de vitesse imposée  $v$ . Les degrés de liberté internes sont par contre traités quantiquement. Les déplacements lumineux des divers sous-niveaux de l'état fondamental  $g$  sont calculés en chaque point  $z$ . On trouve qu'il existe en chaque point  $z$  un état non couplé aux lasers,  $|\psi_{\text{NC}}(z)\rangle$ , dont le déplacement lumineux est nul. Dans cet état, qui est une superposition linéaire des deux sous-niveaux Zeeman  $|g_{-1}\rangle$  et  $|g_{+1}\rangle$ , les deux amplitudes d'excitation vers l'état  $|e_0\rangle$ ,  $|g_{-1}\rangle \rightarrow |e_0\rangle$  et  $|g_{+1}\rangle \rightarrow |e_0\rangle$ , interfèrent destructivement. Par contre, l'état  $|\psi_{\text{C}}(z)\rangle$  orthogonal à  $|\psi_{\text{NC}}(z)\rangle$  est lui couplé aux champs laser et son déplacement lumineux  $\hbar\delta'_{\text{C}}(z)$  est une fonction oscillante de  $z$  comme l'intensité totale  $I(z)$ . Pour un désaccord positif,  $\delta = \omega_L - \omega_A > 0$ , entre la fréquence laser  $\omega_L$  et la fréquence atomique  $\omega_A$ , l'état couplé  $|\psi_{\text{C}}(z)\rangle$  est au dessus de l'état  $|\psi_{\text{NC}}(z)\rangle$ .

L'interprétation qualitative habituellement donnée du refroidissement Sisyphe apparaissant pour une telle configuration est la suivante. Par suite de la variation spatiale des états  $|\psi_{\text{NC}}(z)\rangle$  et  $|\psi_{\text{C}}(z)\rangle$ , un atome en mouvement, initialement dans l'état  $|\psi_{\text{NC}}(z)\rangle$ , peut subir une transition non adiabatique vers l'état  $|\psi_{\text{C}}(z)\rangle$ , cette transition étant la plus probable au point où les deux niveaux sont les plus proches. L'atome ainsi transféré dans l'état  $|\psi_{\text{C}}(z)\rangle$  gravit alors une colline de potentiel, la possibilité de retourner par pompage optique vers l'état non couplé  $|\psi_{\text{NC}}(z)\rangle$  étant la plus grande au sommet de la colline de potentiel, et ainsi de suite... L'atome ne fait ainsi que gravir des collines de potentiel, d'où l'apparition d'un effet Sisyphe.

Les grandes lignes du calcul semiclassique utilisant les équations de Bloch optiques sont ensuite exposées. Les vitesses de variations de la matrice densité atomique sous l'effet de l'interaction avec les lasers et sous l'effet du mouvement sont explicitées. Les équations de Bloch optiques sont enfin résolues de manière perturbative, à la limite des très faibles vitesses. On trouve une force de friction variant en  $v^3$ .

#### *Identification des mécanismes physiques*

L'explication habituelle du transfert de l'atome de l'état  $|\psi_{\text{NC}}(z)\rangle$  à l'état  $|\psi_{\text{C}}(z)\rangle$  sous l'effet d'une transition non adiabatique laisse dans l'ombre un certain nombre de points. Est-ce une transition du type Landau-Zener ? Fait-elle intervenir des processus radiatifs dissipatifs ? D'où vient l'énergie qu'il faut fournir à l'atome pour le faire passer de l'état  $|\psi_{\text{NC}}(z)\rangle$  à  $|\psi_{\text{C}}(z)\rangle$  ?

On présente une étude approfondie des divers types de transitions radiatives spontanées entre niveaux d'énergie du système global atome + photons laser, appelé encore "atome habillé par les photons laser". L'effet essentiel est la contamination de l'état non couplé  $|\psi_{\text{NC}}(z)\rangle$  par l'état couplé  $|\psi_{\text{C}}(z)\rangle$  sous l'effet du Hamiltonien  $V_{\text{mot}}$ ,

proportionnel à la vitesse  $v$  de l'atome, et décrivant l'effet du mouvement. Quand  $v = 0$ , aucune transition radiative ne peut partir de l'état non couplé  $|\psi_{\text{NC}}(z)\rangle$ , alors que des transitions Raman spontanées (anti-Stokes) se produisent à partir de  $|\psi_{\text{C}}(z)\rangle$  et font passer l'atome de  $|\psi_{\text{C}}(z)\rangle$  à  $|\psi_{\text{NC}}(z)\rangle$ . Quand  $v$  est non nul,  $|\psi_{\text{NC}}(z)\rangle$  est contaminé par  $|\psi_{\text{C}}(z)\rangle$  et des transitions Raman spontanées (Stokes) peuvent apparaître à partir de  $|\psi_{\text{NC}}(z)\rangle$  et faire passer l'atome de  $|\psi_{\text{NC}}(z)\rangle$  à  $|\psi_{\text{C}}(z)\rangle$ . La probabilité de ces transitions est d'autant plus élevée que la contamination de  $|\psi_{\text{NC}}(z)\rangle$  par  $|\psi_{\text{C}}(z)\rangle$  est plus grande, c'est-à-dire que la vitesse  $v$  est plus élevée et que les niveaux  $|\psi_{\text{NC}}(z)\rangle$  et  $|\psi_{\text{C}}(z)\rangle$  sont plus proches. Le transfert  $|\psi_{\text{NC}}(z)\rangle \rightarrow |\psi_{\text{C}}(z)\rangle$  est donc en fait une transition Raman spontanée Stokes induite par le mouvement et non une transition Landau-Zener. L'énergie fournie à l'atome provient du rayonnement, le photon Raman Stokes émis ayant une énergie inférieure à l'énergie du photon laser absorbé.

Un calcul simple du taux de transition associé à un tel processus physique redonne le même résultat que celui obtenu à partir d'une résolution perturbative des équations de Bloch optiques à la limite des faibles vitesses. On retrouve en particulier la force de friction en  $v^3$  avec le bon coefficient. Une telle approche a l'avantage supplémentaire de permettre d'évaluer l'ordre de grandeur de la force de friction aux vitesses plus élevées et de montrer qu'elle devient alors linéaire en  $v$  avant de décroître en  $1/v$  aux vitesses très élevées. Le coefficient de diffusion de l'impulsion est également estimé, ce qui permet d'évaluer l'ordre de grandeur de la température d'équilibre à laquelle un tel effet Sisyphe conduit.

### *Le régime quantique*

On présente également, dans le cadre du modèle simple choisi, les grandes lignes d'un traitement entièrement quantique du refroidissement qui devient indispensable quand la dispersion d'impulsion  $\delta p$  devient inférieure à  $\hbar k$ .

Deux représentations différentes sont choisies pour décrire l'état du centre de masse : la représentation position et la représentation impulsion. Les états couplés par absorption et émission induite de photons laser forment des familles infinies d'états  $\mathcal{F}(p)$ , indicées par le nombre  $p$ . La situation est donc plus complexe que pour la configuration  $\sigma^+ - \sigma^-$  étudiée dans un cours antérieur et où les deux ondes laser se propageant en sens opposés ont des polarisations circulaires droite et gauche. Dans ce dernier cas en effet, les familles  $\mathcal{F}(p)$  étaient de dimension finie, égale à 3.

On montre ensuite que dans chaque famille  $\mathcal{F}(p)$  il y a un ensemble d'états non couplés faisant intervenir les états fondamentaux  $|g_{-1}\rangle$  et  $|g_{+1}\rangle$  et on identifie les interférences destructives à l'origine de cette absence de couplage. Lorsque l'effet du Hamiltonien d'énergie cinétique  $P^2/2M$  est pris en compte, tous ces états non couplés sont déstabilisés par des couplages motionnels qui les contaminent par des états

couplés, sauf un état particulier de la famille  $\mathcal{F}(p=0)$ , qui demeure non contaminé et non couplé, et qui est l'état noir dans lequel le refroidissement subrecul accumule les atomes.

Une interprétation physique du paramètre  $p$  qui repère les familles  $\mathcal{F}(p)$  est donnée dans le cadre de la théorie des bandes. L'interaction atome-laser donne en effet naissance à un potentiel effectif modulé spatialement, comme l'intensité totale  $I(z)$ , et les niveaux d'énergie de l'atome, en l'absence d'émission spontanée, se regroupent en bandes, les fonctions propres de l'énergie (états de Bloch) étant repérés par une quasi-impulsion et un indice de bande. Il se trouve en fait que  $\mathcal{F}(p)$  est le sous-espace formé par tous les états de Bloch de même quasi-impulsion  $p$ . L'indice  $p$  est donc la quasi-impulsion de Bloch, définie dans la première zone de Brillouin.

Un autre éclairage physique intéressant est donné par la fonction délai  $W(\tau)$  qui donne la distribution des intervalles de temps séparant deux émissions spontanées successives de photons par le même atome. On montre que  $W(\tau)$  peut s'obtenir en diagonalisant, à l'intérieur de chaque famille  $\mathcal{F}(p)$ , un Hamiltonien effectif non hermitique décrivant l'amortissement dû à l'émission spontanée. L'évolution au cours du temps d'un atome apparaît ainsi comme formée par une suite de périodes d'évolution cohérente à l'intérieur d'une famille  $\mathcal{F}(p)$ , séparées par des sauts quantiques correspondant à l'émission spontanée d'un photon et faisant passer l'atome d'une famille  $\mathcal{F}(p)$  à une autre famille  $\mathcal{F}(p')$  avec  $|p-p'| \leq \hbar k$ . Des résultats de simulations Monte Carlo de l'évolution de  $p$  au cours du temps dans le cas simple des configurations  $\sigma^+ - \sigma^-$  (où les familles  $\mathcal{F}(p)$  sont de dimension 3) sont présentés. Ils mettent très clairement en évidence le caractère anormal de la suite aléatoire des délais  $\tau$ , cette suite étant dominée par un petit nombre d'évènements rares.

### Une nouvelle description du refroidissement subrecul : Piégeage et recyclage

Toutes les approches théoriques que nous venons de mentionner deviennent de plus en plus difficiles à mettre en œuvre aux temps d'interaction  $\theta$  très longs où il serait pourtant très important de préciser les performances du refroidissement subrecul. Le cours se poursuit alors par la présentation d'une nouvelle approche à ces problèmes reposant sur une schématisation des mécanismes suffisamment simple pour permettre des calculs analytiques, tout en conservant les ingrédients essentiels qui caractérisent le refroidissement subrecul.

Comme le suggèrent les simulations Monte Carlo évoquées plus haut et utilisant la fonction délai, on peut associer au refroidissement subrecul une marche au hasard dans l'espace des impulsions, la longueur de chaque pas étant de l'ordre de  $\hbar k$  et la probabilité par unité de temps  $\Gamma'(p)$  d'effectuer un saut étant une fonction de  $p$  qui

s'annule en  $p = 0$ . On peut se demander si une telle marche aléatoire classique peut représenter correctement un processus fondamentalement quantique comme le refroidissement subrecul. En fait, l'approche Monte Carlo quantique décrite plus haut associe rigoureusement au refroidissement subrecul une marche aléatoire classique d'un paramètre  $p$  que nous avons identifié comme étant la quasi-impulsion. Certes, l'état de l'atome n'est pas décrit de la même manière dans les deux approches. Entre deux sauts, l'état de l'atome est caractérisé par un seul nombre,  $p$ , dans la description classique, alors qu'il est décrit dans l'approche quantique par une fonction d'onde évoluant dans un sous-espace  $\mathcal{F}(p)$ . Un tel modèle se révèle cependant suffisant pour rendre compte du refroidissement subrecul, et c'est celui qui sera adopté dans la suite.

On commence donc par introduire les divers paramètres qui caractérisent le modèle : forme de  $\Gamma'(p)$  au voisinage de  $p = 0$ , choisie de la forme  $\Gamma'(p) \simeq p^\alpha$ , où  $\alpha$  est un exposant positif (qui vaut 2 pour le refroidissement VSCPT) ; comportement de  $\Gamma'(p)$  aux grandes valeurs de  $p$ , avec éventuellement des "murs" réfléchissants en  $|p| = p_{\max}$  pour schématiser la présence d'une force de friction.

Plutôt que d'effectuer des simulations Monte Carlo classiques à partir d'une telle probabilité de saut  $\Gamma'(p)$ , il semble alors plus intéressant de définir un piège dans l'espace des  $p$  autour de  $p = 0$  par la condition  $|p| < p_{\text{trap}}$ . La valeur exacte de  $p_{\text{trap}}$  est arbitraire car, au bout d'un temps  $\theta$  suffisamment long, la largeur  $\delta p$  de la distribution d'impulsion sera plus petite que  $p_{\text{trap}}$ . Un atome sera dit piégé si  $|p| < p_{\text{trap}}$ . Il sera considéré comme diffusant hors du piège si  $|p| > p_{\text{trap}}$ . L'évolution temporelle de l'atome apparaît alors comme une suite de phases de piégeage, de durées  $\tau_1, \tau_2, \tau_3 \dots$  alternant avec des phases de diffusion hors du piège, de durées  $\hat{\tau}_1, \hat{\tau}_2, \hat{\tau}_3 \dots$ . Les temps  $\hat{\tau}_i$  sont en fait des temps de premier retour dans le piège.

Les  $\tau_i$  sont des variables aléatoires indépendantes, comme les  $\hat{\tau}_i$ . Soient  $P(\tau)$  la distribution des temps de piégeage  $\tau$ ,  $\hat{P}(\hat{\tau})$  la distribution des temps de premier retour  $\hat{\tau}$ . Ces deux fonctions caractérisent les deux propriétés essentielles du refroidissement subrecul : le *filtrage* des atomes autour de  $p = 0$  et le *recyclage* des atomes qui permet à ceux qui s'échappent du piège d'y revenir au bout d'un certain temps. Le calcul de  $P(\tau)$  et  $\hat{P}(\hat{\tau})$  est effectué dans un certain nombre de cas, pour plusieurs valeurs de l'exposant  $\alpha$  et de la dimension d'espace  $D$ , en présence ou en l'absence de friction.

Le résultat important est que, dans de nombreux cas, les distributions sont larges, avec des ailes décroissant lentement, comme des lois de puissances :  $P(\tau) \simeq \tau^{-(1+\mu)}$  quand  $\tau \rightarrow \infty$ , ou  $\hat{P}(\hat{\tau}) \simeq \hat{\tau}^{-(1+\hat{\mu})}$  quand  $\hat{\tau} \rightarrow \infty$ . Par exemple, pour le refroidissement VSCPT à une dimension, on trouve  $\mu = 1/2$ . Considérons alors le temps total passé dans le piège après  $N$  entrées et  $N$  sorties :  $T_N = \sum_{i=1}^N \tau_i$ . En

général, la distribution de la somme de  $N$  variables aléatoires indépendantes tend vers une gaussienne quand  $N \rightarrow \infty$ . C'est le théorème de la limite centrale. Dans le cas étudié ici, si  $\mu < 1$ , la distribution  $P(\tau)$  est si large que la valeur moyenne de  $\tau$ ,  $\langle \tau \rangle = \int_0^\infty \tau P(\tau) d\tau$ , diverge ! Le théorème de la limite centrale ne peut plus s'appliquer. Il se trouve que, pour des distributions larges avec des ailes décroissant comme des lois de puissance, le théorème de la limite centrale peut être généralisé. Les statistiques correspondantes sont appelées "statistiques de Lévy". L'approche développée ici, qui résulte d'une collaboration avec Jean-Philippe Bouchaud, et qui a fait l'objet de la thèse de doctorat de François Bardou, a donc l'avantage de montrer d'emblée qu'il existe un lien étroit entre statistiques de Lévy et refroidissement subrecul.

### Distributions larges - Lois de Lévy

Le cours se poursuit par un rappel des résultats essentiels concernant le théorème de la limite centrale généralisé de Lévy et Gnedenko et les statistiques de Lévy, de manière à pouvoir appliquer ensuite ces résultats au problème de la limite asymptotique du refroidissement subrecul. On se contente en fait de présenter des arguments simples permettant de rendre plausibles ces résultats, l'accent étant mis sur les caractéristiques originales des statistiques de Lévy et sur leurs différences avec les statistiques gaussiennes usuelles.

Après avoir énoncé le théorème de la limite centrale généralisé et donné la définition des lois de Lévy, on passe en revue un certain nombre de propriétés importantes des "sommes de Lévy"  $T_N = \sum_{i=1}^N \tau_i$  : comportement en  $N^{1/\mu}$  pour  $\mu < 1$ , et non en  $N$  comme cela serait le cas si  $\langle \tau \rangle$  était fini ; ordre de grandeur du terme le plus grand de la somme qui est comparable à la somme  $T_N$  elle-même. Des résultats de simulation Monte Carlo sont présentés permettant d'illustrer l'importance d'évènements rares dans les marches au hasard associées aux lois de Lévy, et d'introduire la notion de "vols de Lévy".

On considère également un processus ponctuel associé à toute loi large  $P(\tau)$  ayant des ailes décroissant en  $\tau^{-(1+\mu)}$  avec  $\mu < 1$ . Il s'agit d'un ensemble de points  $M_1, M_2, \dots, M_i, \dots$  sur l'axe des  $\tau$ , la distance entre deux points successifs  $M_i$  et  $M_{i+1}$  étant distribuée suivant  $P(\tau)$ . Une quantité intéressante et qui sera utile pour la suite est la densité moyenne  $A(t)$  de ces points, moyennée sur plusieurs réalisations différentes de l'ensemble  $M_1, M_2, \dots, M_i, \dots$ . Un calcul simple montre que, si la valeur moyenne  $\langle \tau \rangle$  de  $\tau$  est finie,  $A(t)$  est indépendant de  $t$  et égal à  $1/\langle \tau \rangle$ , ce qui se comprend bien, la densité de points étant inversement proportionnelle à la distance moyenne entre points. Par contre, si  $P(\tau)$  est une loi large avec  $\mu < 1$ , on montre que  $A(t)$  varie au cours du temps et décroît comme  $t^{\mu-1}$ . Au fur et à mesure qu'on attend, des intervalles de temps de plus en plus longs peuvent apparaître et la densité

de points décroît. Le fait que  $A(t)$  dépend du temps indique également qu'il n'y a plus d'invariance du processus par translation dans le temps.

### Calcul de la proportion d'atomes piégés

Une première application du formalisme précédent consiste à calculer la proportion  $f(\theta)$  d'atomes piégés au bout d'un temps d'interaction  $\theta$ , quantité qui caractérise l'efficacité du refroidissement.

Un raisonnement simple est tout d'abord présenté dans le cas où les deux distributions  $P(\tau)$  et  $\hat{P}(\hat{\tau})$  sont des distributions larges, d'exposant  $\mu$  et  $\hat{\mu}$  inférieurs à 1. Après  $N$  entrées et  $N$  sorties, l'atome a passé un temps  $T_N = \sum_{i=1}^N \tau_i$  dans le piège et un temps  $\hat{T}_N = \sum_{i=1}^N \hat{\tau}_i$  hors du piège. D'après les résultats donnés plus haut,  $T_N$  et  $\hat{T}_N$  varient, respectivement, comme  $N^{1/\mu}$  et  $N^{1/\hat{\mu}}$ , quand  $N \rightarrow \infty$ . On en déduit que, si  $\mu < \hat{\mu}$ , l'atome passe la plus grande partie de son temps dans le piège, de sorte que  $f(\theta) \rightarrow 1$  si  $\theta \rightarrow \infty$ . Les conclusions sont inversées si  $\hat{\mu} < \mu$  et  $f(\theta) \rightarrow 0$  si  $\theta \rightarrow \infty$ .

Il est tentant alors de rendre ce raisonnement plus quantitatif et de relier la proportion d'atomes piégés à  $T_N / (T_N + \hat{T}_N)$ , c'est-à-dire à la proportion relative du temps passé dans le piège après un grand nombre d'entrées et de sorties. En fait, un tel résultat est erroné car il peut dans certains cas différer du résultat exact donné par le raisonnement plus rigoureux présenté plus loin. La raison est que  $T_N / (T_N + \hat{T}_N)$  est une *moyenne temporelle*, alors que  $f(\theta)$ , probabilité de trouver l'atome dans le piège à l'instant  $\theta$ , est une *moyenne d'ensemble*. Or, pour un processus non ergodique comme le refroidissement subrecul, ces deux moyennes peuvent être différentes.

L'expression exacte de  $f(\theta)$  est la suivante :

$$f(\theta) = \int_0^\theta d\tau \ E(\theta - \tau) \mathcal{X}(\tau)$$

où  $E(\theta - \tau)$  est la probabilité pour que l'atome rentre dans le piège à l'instant  $\theta - \tau$ , quel que soit le nombre d'entrées et de sorties effectuées auparavant, et où  $\mathcal{X}(\tau)$  est la probabilité pour que l'atome rest piégé entre  $\theta - \tau$  et  $\theta$ , c'est-à-dire la probabilité pour qu'il reste piégé un temps plus long que  $\tau$

$$\mathcal{X}(\tau) = \int_\tau^\infty d\tau' \ P(\tau')$$

La probabilité  $E(t)$  est calculée par une généralisation simple du calcul de la densité  $A(t)$  introduite à la fin du paragraphe précédent, et est reliée à un processus ponctuel formé par la suite alternée d'entrées dans le piège et de sorties du piège.

La limite de  $f(\theta)$  quand  $\theta \rightarrow \infty$  est calculée dans un certain nombre de cas importants. La manière dont  $f(\theta)$  tend vers sa limite est également calculée. Les résultats analytiques ainsi obtenus sont comparés avec les résultats numériques fournis par des simulations Monte Carlo. L'excellent accord obtenu justifie a posteriori le modèle simple choisi pour le refroidissement subrecul et donne confiance en l'approche utilisant les statistiques de Lévy pour aborder des problèmes plus complexes comme celui de la forme de la distribution d'impulsion.

### Distribution d'impulsion

On commence par rappeler les arguments qualitatifs utilisés dans les premières descriptions du refroidissement VSCPT pour estimer la largeur  $\delta p$  de la distribution d'impulsion. L'effet du filtrage est seul pris en compte : pour rester dans le piège pendant un temps  $\theta$ , l'atome doit avoir une impulsion suffisamment petite pour que la probabilité d'absorber un photon pendant le temps  $\theta$  soit faible, ce qui donne  $|p| < \delta p$  avec

$$\Gamma'(\delta p) \cdot \theta \simeq 1$$

Une telle équation définit une largeur  $\delta p$  qui décroît comme  $\theta^{-1/\alpha}$  quand  $\theta \rightarrow \infty$ . En fait, le raisonnement précédent ne considère que les atomes restant dans le piège pendant toute la durée d'interaction  $\theta$ . Or les atomes quittent le piège et y retournent en permanence. A l'instant  $\theta$ , ceux qui sont dans le piège peuvent y séjourner depuis un temps bien inférieur à  $\theta$ .

Une expression exacte, analogue à celle donnée plus haut pour  $f(\theta)$ , est établie pour le probabilité  $\mathcal{P}(p, \theta)$  d'être dans le piège à l'instant  $\theta$  avec une impulsion  $p$ . Elle fait intervenir la même fonction  $E(\theta)$  que celle apparaissant dans l'expression de  $f(\theta)$ . Le calcul de la distribution d'impulsion est alors effectué pour  $\mu < 1$  et  $\mu > 1$ . On se limite au cas important en pratique où une force de friction favorise le retour dans le piège. Des expressions analytiques sont établies pour tous les paramètres importants de la distribution d'impulsion : largeur à mi-hauteur  $\delta p$  ; hauteur  $h$  en  $p = 0$  ; proportion  $r$  d'atomes refroidis, c'est-à-dire ayant une impulsion inférieure en module à  $\delta p$ , ou de l'ordre de  $\delta p$  ; décroissance des ailes.

Le cas  $\mu < 1$  est particulièrement intéressant. Quant  $\theta \rightarrow \infty$ , tous les atomes sont refroidis : leur proportion  $r$  tend vers 1, la largeur  $\delta p$  tend vers 0 et la hauteur  $h$  tend vers l'infini. La forme de la distribution d'impulsion ne s'arrête jamais d'évoluer, ce qui montre l'absence d'état stationnaire et le caractère non ergodique du refroidissement. L'équation écrite plus haut pour  $\delta p$  demeure valable, ce qui montre l'importance des événements de piégeage très longs, de l'ordre du temps total  $\theta$  lui-même. On retrouve là une caractéristique importante des statistiques de Lévy.

Quand  $\mu > 1$ , on retrouve toujours dans  $\mathcal{P}(p, \theta)$  la présence d'un pic étroit dont la largeur  $\delta p$  est toujours donnée par l'équation écrite plus haut. Par contre, la proportion d'atomes contribuant à ce pic tend vers zéro quand  $\theta \rightarrow \infty$ , la hauteur du pic en  $p = 0$  continuant cependant à croître quand  $\theta \rightarrow \infty$ . La distribution d'impulsion s'arrête d'évoluer sauf dans un intervalle de largeur  $\delta p$  autour de  $p = 0$ .

Notons enfin que dans les deux cas, les ailes de la distribution décroissent en  $1/p^\alpha$ . La distribution d'impulsion n'est donc pas Maxwellienne et on ne peut donc pas, en toute rigueur, définir une température d'équilibre thermodynamique.

### Optimisation du refroidissement subrecul

Le fait de disposer d'expressions analytiques pour les diverses caractéristiques de la distribution d'impulsion des atomes refroidis permet, pour des conditions expérimentales données, de guider le choix des paramètres expérimentaux pour optimiser telle ou telle grandeur physique. Ces idées sont illustrées sur le refroidissement Raman pour lequel il est possible, en jouant sur la forme des impulsions laser, de changer l'exposant  $\alpha$  caractérisant la croissance de la probabilité de saut  $\Gamma'(p)$  au voisinage de  $p = 0$ . Pour le refroidissement VSCPT, on a toujours  $\alpha = 2$  (départ parabolique en  $p^2$  de  $\Gamma'(p)$ ). Les premières impulsions laser utilisées pour le refroidissement Raman étaient des "impulsions Blackman", dont les profils spectraux n'ont pas de maxima secondaires et dont les ailes décroissent très vite. En fait, on peut montrer que, pour de telles impulsions,  $\Gamma'(p)$  croît en  $p^4$  au voisinage de  $p = 0$  de sorte que  $(\alpha)_{\text{Blackman}} = 4$ . Par contre, si l'on utilise des impulsions temporelles carrées, dont la puissance spectrale est le carré d'une fonction de diffraction, et si l'on ajuste la fréquence centrale du spectre pour que le premier zéro de la fonction de diffraction coïncide avec la fréquence de résonance des atomes d'impulsion nulle, on trouve alors que  $\Gamma'(p)$  a un départ parabolique en  $p^2$ , de sorte que  $(\alpha)_{\text{carré}} = 2$ .

Après un rappel du principe du refroidissement Raman, on se pose le problème du choix de la forme optimale d'impulsion à utiliser pour réaliser le refroidissement à une dimension. Le paramètre  $\mu = D/\alpha$  qui caractérise la distribution  $P(\tau)$  des temps de piégeage est égal à  $1/\alpha$  puisque  $D = 1$ . Il vaut donc  $1/2$  pour des impulsions carrées,  $1/4$  pour des impulsions Blackman. Comme dans les deux cas on a  $\mu < 1$ , la proportion  $r$  d'atomes refroidis tend vers 1 quand  $\theta \rightarrow \infty$ . Par contre, la largeur  $\delta p$  de la distribution d'impulsion, qui décroît comme  $\theta^{-1/\alpha}$ , décroît comme  $\theta^{-1/2}$  pour des impulsions carrées, et comme  $\theta^{-1/4}$  pour des impulsions Blackman. Une telle analyse permet donc de prévoir très simplement que les impulsions carrées sont plus avantageuses que les impulsions Blackman. Elles sont non seulement plus faciles à réaliser, mais elles permettent de plus un refroidissement plus rapide.

La durée  $\tau_0$  de l'impulsion Raman la plus longue est également un paramètre

physique important. Les autres impulsions plus brèves, nécessaires pour recycler les atomes dont les vitesses tombent en dehors du spectre de l'impulsion la plus longue, contribuent en effet de manière négligeable à la durée globale du cycle d'impulsions Raman qui est égale à  $\tau_0$ , à un facteur 2 près. Si  $\tau_0$  est très long, la courbure de  $\Gamma'(p)$  au voisinage de  $p = 0$  est très élevée et le filtrage très efficace. Par contre, le nombre de cycles pouvant être répétés pendant le temps  $\theta$ , de l'ordre de  $\theta/\tau_0$ , est peu élevé et le recyclage est insuffisant. Par contre, si  $\tau_0$  est très court, un plus grand nombre de cycles est possible, conduisant à un très bon recyclage. Mais le filtrage est alors moins bon. On conçoit donc qu'il doit y avoir une valeur optimale de  $\tau_0$  si l'on veut refroidir le plus grand nombre possible d'atomes dans l'intervalle  $\delta p$  le plus étroit possible. Cette valeur optimale de  $\tau_0$  est déterminée analytiquement à partir des expressions obtenues précédemment à partir des statistiques de Lévy.

Toutes ces considérations ont fait l'objet de vérifications expérimentales dans notre laboratoire. Les expériences correspondantes, qui ont permis notamment de refroidir à une dimension des atomes de Césium en dessous de 3 nK, sont brièvement décrites.

## Conclusion

Le cours se termine par une récapitulation générale des résultats obtenus. Le cas, important en pratique, où une imperfection expérimentale empêche  $\Gamma'(p)$  d'être rigoureusement nul en  $p = 0$  est brièvement analysé. Supposons que  $\Gamma'(p)$  soit, au voisinage de  $p = 0$ , de la forme

$$\Gamma'(p) \simeq \Gamma_{\text{dissip}} + Cp^\alpha$$

où  $\Gamma_{\text{dissip}}$  est une constante décrivant les processus dissipatifs parasites. On montre que le paramètre  $\Gamma_{\text{dissip}}$  fait apparaître une nouvelle échelle de temps  $T_{\text{dissip}} = 1/\Gamma_{\text{dissip}}$ . Pour les temps d'interaction  $\theta$  inférieurs à  $T_{\text{dissip}}$ , l'effet de  $\Gamma_{\text{dissip}}$  est négligeable et le comportement du système est très voisin de celui prédit à partir des statistiques de Lévy. Par contre, pour  $\theta \gg T_{\text{dissip}}$ , on retrouve un comportement plus normal, en accord avec le théorème de la limite centrale et les statistiques gaussiennes. De telles "lois de Lévy tronquées" permettent ainsi de faire le raccord entre les statistiques de Lévy et les statistiques gaussiennes.

1 - Thème choisi et motivations de ce choix

"Atomes ultrafroids - Piégeage non dissipatif et refroidissement évaporatif."

- Les développements récents ayant conduit à l'observation d'une condensation de Bose-Einstein portent sur des atomes alcalins piégés dans des gradients de champ magnétique et portés à des températures très basses grâce à un refroidissement laser suivi d'un refroidissement évaporatif.
- Les pièges magnéto-statiques et le refroidissement évaporatif étaient en fait utilisés déjà depuis plusieurs années dans les expériences essayant de mettre en évidence une condensation de Bose-Einstein sur des atomes d'Hydrogène polarisés. Les 2 méthodes d'étude se situent donc à un carrefour où se rejoignent 2 lignes de recherches différentes, les gaz quantiques polarisés et la manipulation laser des atomes. Il semble donc intéressant d'étudier en détail ces 2 méthodes, leurs performances et leurs limites, de manière à pouvoir ensuite analyser les problèmes physiques nouveaux qu'elles permettent d'explorer.

2 - Evolution des recherches sur l'Hydrogène polarisé

(Recherches poursuivies depuis une vingtaine d'années à Amsterdam et MIT)

Problème de gaz quantique

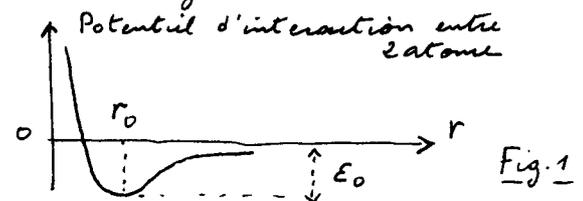
Peut-on avoir un ensemble d'atomes restant dans un état métastable gazeux pendant un temps très long avant de se condenser sous forme liquide ou solide ?

Plusieurs indicateurs d'un tel régime quantique.

- (i) Energie de point zéro,  $\hbar^2/2m r_0^2$ , due au confinement de l'atome dans une région de dimensions  $r_0$ , comparée à l'énergie de liaison  $E_0$

$$\eta = \frac{\hbar^2}{m r_0^2 E_0} \quad (1.1)$$

Plus ce paramètre est grand, plus grandes sont les chances d'observer un gaz quantique



Intérêt de l'Hydrogène polarisé : L'interaction se fait par l'intermédiaire du potentiel triplet qui est très peu profond et qui n'a pas d'état lié.  $E_0$  est très petit, de même que  $m$ .  $\eta$  a la valeur la plus grande possible.

- (ii) Longueur d'onde de de Broglie  $\Lambda = \sqrt{2\pi\hbar^2/mk_B T}$  comparée à la portée ( $\sim r_0$ ) du potentiel

Si  $\Lambda \gg r_0$ , la collision entre 2 bosons identiques polarisés a lieu dans l'onde  $s$  ( $l=0$ ) et est caractérisée par un seul <sup>(de la valeur)</sup> paramètre : la longueur de diffusion  $a$ . Importance du signe et  $\sqrt{a}$  de  $a$  pour caractériser l'énergie de l'état fondamental d'un ensemble d'atomes dans le régime des collisions binaires

- (iii) Paramètre de dégénérescence quantique :  $n \Lambda^3$  ( $n$ : densité)  
Longueur d'onde de de Broglie  $\Lambda$  comparée à la distance moyenne  $n^{-1/3}$  entre 2 atomes

Pour  $n \Lambda^3$  suffisamment grand ( $n \Lambda^3 > 2.612$ ), condensation de Bose Einstein dans l'état fondamental.

Stabilisation d'un gaz d'Hydrogène à très basse température  $T$  dans une cellule placée dans un champ magnétique  $\vec{B}$  intense et dont les parois sont recouvertes d'un film d'Helium liquide (Amsterdam - 1979)

A cause du facteur de Boltzmann  $\exp(-\mu_B/k_B T)$ , les spins électroniques des atomes H sont polarisés dans l'état  $\downarrow$ . Les atomes  $H\downarrow$  interagissent via le potentiel Van der Waals qui est très profond et restent à l'état gazeux pendant un temps très long.

Les seules interactions susceptibles de coupler l'état triplet de spins à l'état singulet (qui a un puits de potentiel beaucoup plus profond) sont les interactions magnétiques (couplage hyperfin entre les spins électronique et nucléaire, couplages magnétiques dipôle-dipôle) qui sont beaucoup plus faibles. C'est ce qui explique pourquoi les temps de recombinaison sont très longs à basse densité.

De plus, dans une collision binaire, l'énergie cinétique des atomes entrant en collision à basse température est insuffisante pour fournir au spin l'énergie nécessaire pour basculer de l'état  $\downarrow$  à l'état  $\uparrow$  qui a une énergie beaucoup plus grande dans un champ  $\vec{B}$  élevé. Le caractère endothermique de la réaction est défavorable.

Les divers chemins suivis initialement pour essayer d'augmenter  $n\Lambda^3$

(i) Augmenter  $n$  à  $T$  fixé (par un environnement cryogénique avec film d'Helium liquide sur les parois du récipient)

On peut augmenter  $n$  de manière considérable par des méthodes de compression, mais le gaz est destabilisé, avant d'atteindre le seuil de la condensation, par des collisions ternaires



Recombinaison induite par interaction dipôle-dipôle. L'énergie libérée dans la recombinaison permet à la réaction de se produire et peut être évacuée sous forme d'énergie cinétique d'un ou plusieurs des partenaires de la collision.

(ii) Pour éviter les collisions ternaires, on reste à des faibles valeurs de  $n$  et on essaie de diminuer  $T$  pour augmenter  $\Lambda^3$ , le système étant toujours enfermé dans une cellule dont les parois sont recouvertes d'Helium liquide.

Bien que l'énergie d'adsorption  $E_a$  d'un atome H soit la plus basse possible pour une surface d'Helium liquide ( $E_a/k_B = 1^\circ K$ ), la densité surfacique des atomes H adsorbés devient trop élevée quand  $T$  décroît. Des processus de recombinaison à 3 corps se produisent sur la surface et empêchent d'atteindre le seuil.

Le piégeage magnéto-statique : un moyen d'éviter toute surface de confinement

- L'idée de piéger les atomes H dans des gradients de champs magnétiques s'est alors imposée pour se débarrasser de tous les effets de recombinaison sur les surfaces de confinement.
- Une difficulté : les pièges magnéto-statiques ne peuvent piéger que  $H\uparrow$  (Théorème de Wigner). Les collisions binaires avec basculement du spin par interactions magnétiques sont exothermiques et se produisent

plus aisément que pour  $H\downarrow$ , ce qui impose de travailler à des densités plus basses I-9

### De nouvelles méthodes de refroidissement

Comme il n'y a plus de refroidissement cryogénique par contact avec une surface et qu'il faut diminuer encore davantage  $T$ , de nouvelles méthodes de refroidissement sont nécessaires.

- Refroidissement laser. Pas facile avec  $H$ , car les longueurs d'onde des raies de résonance tombent dans l'UV. De plus, l'énergie de recul est élevée, car  $m$  est petit.

Un tel refroidissement a été cependant réalisé à Amsterdam.

- Refroidissement évaporatif (suggéré par Hess et réalisé à MIT et Amsterdam).

Méthode très efficace consistant à utiliser les collisions élastiques entre atomes piégés pour faire sortir du piège les atomes les plus énergétiques et obtenir, par rethermalisation, une température beaucoup plus basse pour les atomes qui restent piégés.

Importance d'avoir un taux de collisions élastiques beaucoup plus élevé que celui des collisions inélastiques.

Il a été ainsi possible d'arriver à un facteur 2 ou 3 du seuil de condensation.

L'évolution des recherches sur  $H$  polarisé montre donc clairement que les méthodes de piégeage magnéto-statique et de refroidissement évaporatif se sont avérées comme des outils privilégiés pour ce type de recherches.

### 3 - La situation des alcalins

- A première vue, les alcalins semblent constituer un système peu favorable pour l'étude des gaz quantiques. Même dans l'état triplet, les potentiels d'interaction sont très profonds et admettent plusieurs états liés. La masse  $m$  est élevée et le paramètre  $\eta$  introduit en (1.1) est beaucoup plus petit que pour  $H\downarrow$ .
- Par contre, la manipulation laser de tels atomes est beaucoup plus aisée. On peut les refroidir à des températures très basses de l'ordre de quelques dizaines de mK, en les conservant dans des pièges non dissipatifs (magnéto-statiques ou pièges laser très désaccordés) qui les isolent de parois sur lesquelles ils se condenseraient.
- De plus, les sections efficaces de collisions élastiques sont beaucoup plus élevées pour les alcalins que pour l'hydrogène ce qui permet un refroidissement évaporatif très efficace.

Toutes ces raisons expliquent comment des méthodes mises au point pour l'hydrogène se sont révélées également très efficaces pour les alcalins et ont permis récemment d'observer la condensation de Bose-Einstein sur des systèmes dilués comme des gaz.