

- 1 - Introduction - Problèmes abordés dans ce cours T.25
- 2 - Brefs rappels sur la cohérence en optique T.26 à T.32
 - Quelques états du champ quantifié
 - Fonctions de corrélation $G^{(1)}$ et $G^{(2)}$
 - Résultats du calcul de $G^{(1)}$ et $G^{(2)}$ dans quelques cas simples
- 3 - Fonctions de corrélation pour un système de bosons T.33 à T.37
 - Opérateurs champs $\hat{\psi}$ et $\hat{\psi}^\dagger$
 - Quelques états possibles pour un condensat
 - Fonctions de corrélation de $\hat{\psi}$ et $\hat{\psi}^\dagger$
 - Calcul des fonctions de corrélation dans un état de Fock
- 4 - Fonction de corrélation $G^{(1)}$ et longueur de cohérence pour un gaz de bosons en équilibre thermodynamique T.38 à T.53
 - 4.1 Bosons dans une boîte - Système homogène
 - Expression de $G^{(1)}$
 - Gaz parfait. Evolution de la cohérence spatiale quand on augmente N à T fixée.
 - Effet des interactions à $T = 0^\circ \text{K}$
 - 4.2 Bosons dans un piège harmonique
- 5 - Fonctions de corrélation d'ordre supérieur $G^{(2)}$ et $G^{(3)}$ T.53 à T.6
 - Difficultés - Solutions adoptées ici
 - Théorème de Wick
 - Calcul de $G^{(2)}$
 - Calcul de $G^{(3)}$

Propriétés de cohérence d'un condensatQuelques problèmes

- En quel sens peut-on dire qu'un condensat est un objet "cohérent"?
- Quelles propriétés le différencient d'un nuage thermique?
- Peut-on parler de phase d'un condensat?
- Quelles fonctions permettent de caractériser les propriétés de cohérence d'un condensat?
- Peut-on établir un parallèle avec le problème de la cohérence en optique?
- Quelles sont les expériences qui ont abordé l'étude de ces problèmes?

On se limite dans ce cours à l'étude d'un seul condensat. Le problème de la phase relative de 2 condensats sera abordé ultérieurement

Champ optique classique (monomode)

$$E^+(\vec{r}) e^{-i\omega t} + \text{c.c.}$$

$E^+(\vec{r})$: nombre complexe ayant un module et une phase

La phase d'un tel champ est mesurable

Etat quantique d'un champ monomode

- Etat à N photons (état de Fock)

$$|N\rangle$$

- Etat le plus général du champ

$$|\psi\rangle = \sum_{N=0}^{\infty} c_N |N\rangle$$

- Opérateur champ de ce mode

$$\hat{E}^+(\vec{r}) = E^+(\vec{r}) \hat{a} \quad \hat{E}(\vec{r}) = \hat{E}^+(\vec{r}) + \text{h.c.}$$

$E^+(\vec{r})$: Amplitude du champ du vide dans ce mode

$\hat{a}$ ($\hat{a}^+$): Opérateur de destruction (création) d'un photon dans ce mode

Etats cohérents

- Etats quantiques qui se rapprochent le plus possible d'un état classique

$$\hat{a} |\alpha\rangle = \alpha |\alpha\rangle$$

α : Nombre complexe

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{\alpha^N}{\sqrt{N!}} |N\rangle$$

- Probabilité $P(N)$ d'avoir N photons dans l'état $|\alpha\rangle$

$$P(N) = e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2N}}{N!} \quad \text{Loi de Poisson}$$

$$\langle \hat{N} \rangle = \langle \hat{a}^+ \hat{a} \rangle = |\alpha|^2$$

$$\Delta N^2 = \langle \hat{N}^2 \rangle - \langle \hat{N} \rangle^2 = |\alpha|^2 = \langle \hat{N} \rangle$$

Si $\langle \hat{N} \rangle \gg 1$, $\Delta N = \sqrt{\langle \hat{N} \rangle}$ est très grand en valeur absolue tout en étant très petit en valeur relative $\Delta N / \langle \hat{N} \rangle = \frac{1}{\sqrt{\langle \hat{N} \rangle}} \ll 1$

$$\hat{E}^+(\vec{r}) |\alpha\rangle = \alpha E^+(\vec{r}) |\alpha\rangle$$

$$\sqrt{\langle \hat{N} \rangle} e^{i\varphi(\vec{r})} E^+(\vec{r}) = E_{cl}^+(\vec{r})$$

- Généralisation à des champs multimodes

Mélange statistique d'états cohérents

$$\alpha = |\alpha| e^{i\varphi} = \sqrt{\langle N \rangle} e^{i\varphi}$$

Mélange statistique d'états cohérents de même $|\alpha|$ et de phase φ équipartie entre 0 et 2π

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi |\alpha| e^{i\varphi} \langle \alpha| e^{i\varphi} |$$

$$\langle N | \hat{\rho} | N' \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$\langle N | \alpha | e^{i\varphi} \rangle \langle \alpha | e^{i\varphi} | N' \rangle$$

$$e^{-|\alpha|^2/2} \frac{|\alpha|^N}{\sqrt{N!}} e^{iN\varphi} e^{-|\alpha|^2/2} \frac{|\alpha|^{N'}}{\sqrt{N'!}} e^{-iN'\varphi}$$

$$= e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{N+N'}}{\sqrt{N!} \sqrt{N'!}} \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi e^{i(N-N')\varphi}}_{\delta_{NN'}}$$

$$= e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2N}}{N!} \delta_{NN'}$$

$$\hookrightarrow \hat{\rho} = \sum_{N=0}^{\infty} P(N) |N\rangle \langle N|$$

$\hat{\rho}$ apparaît aussi comme un mélange statistique d'états de Fock $|N\rangle$ avec une distribution de Poisson des valeurs possibles de N

Fonctions de corrélation

Ordre 1

$$G^{(1)}(\vec{r}, \vec{r}') = \langle \hat{E}^-(\vec{r}) \hat{E}^+(\vec{r}') \rangle$$

Caractérise les corrélations qui existent entre les valeurs du champ en 2 points différents $\vec{r}$ et $\vec{r}'$

Même si la phase globale du champ n'est pas bien définie, la différence de phase entre 2 points peut l'être

Généralisation quantique des fonctions de corrélation classiques caractérisant le contraste des franges d'interférence obtenues avec les champs issus des 2 points $\vec{r}$ et $\vec{r}'$

Généralisation à des fonctions de corrélation faisant intervenir 2 instants différents t et t'

Normalisation souvent utile

$$g^{(1)}(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{G^{(1)}(\vec{r}, \vec{r}')}{\sqrt{G^{(1)}(\vec{r}, \vec{r}) G^{(1)}(\vec{r}', \vec{r}')}}$$

Ordre 2

$G^{(1)}$ ne caractérise pas entièrement un champ. Deux champs peuvent être différents tout en ayant le même $G^{(1)}$

Nécessité d'introduire des fonctions de corrélation d'ordre supérieur $G^{(2)}, G^{(3)}, \dots$

$$G^{(2)}(\vec{r}, \vec{r}') = \langle \hat{E}^-(\vec{r}) \hat{E}^-(\vec{r}') \hat{E}^+(\vec{r}') \hat{E}^+(\vec{r}) \rangle$$

$G^{(2)}(\vec{r}, \vec{r}')$ caractérise les corrélations d'intensité du champ en 2 points différents $\vec{r}$ et $\vec{r}'$ et la tendance des photons à se grouper.

$G^{(2)}(\vec{r}, \vec{r})$ caractérise les fluctuations d'intensité en un point $\vec{r}$

$$g^{(2)}(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{G^{(2)}(\vec{r}, \vec{r}')}{G^{(1)}(\vec{r}, \vec{r}) G^{(1)}(\vec{r}', \vec{r}')}$$

Ordre 3

$$G^{(3)}(\vec{r}, \vec{r}', \vec{r}'') = \langle \hat{E}^-(\vec{r}) \hat{E}^-(\vec{r}') \hat{E}^-(\vec{r}'') \hat{E}^+(\vec{r}'') \hat{E}^+(\vec{r}') \hat{E}^+(\vec{r}) \rangle$$

Résultats du calcul des fonctions de corrélation $G^{(1)}$ et $G^{(2)}$ dans quelques cas simples

① Cas d'un champ Gaussien

- Cas de l'équilibre thermodynamique de Maxwell-Boltzmann
- Cas d'un champ résultant de la superposition de plusieurs champs indépendants (théorème limite centrale)

$|g^{(1)}(\vec{r}, \vec{r}')|$ décroît de 1 à 0 quand $|\vec{r} - \vec{r}'|$ croît de 0 à $+\infty$, sur une distance caractéristique λ_c appelée "longueur de cohérence"

Notion de volume de cohérence

$|g^{(2)}(\vec{r}, \vec{r}')|$ décroît de 2 à 1 quand $|\vec{r} - \vec{r}'|$ croît de 0 à $+\infty$ sur la même distance caractéristique λ_c

$$g^{(2)}(\vec{r}, \vec{r}') = 1 + |g^{(1)}(\vec{r}, \vec{r}')|^2$$

Effet Hanbury-Brown et Twiss

Grouperment de photons

② Cas d'un état cohérent

$$\hat{E}^+(\vec{r})|\alpha\rangle = E_{cl}^+(\vec{r})|\alpha\rangle \quad \langle\alpha|\hat{E}^-(\vec{r}) = E_{cl}^-(\vec{r})\langle\alpha|$$

$$E_{cl}^+(\vec{r}) = [E_{cl}^-(\vec{r})]^*$$

$$G^{(1)}(\vec{r}, \vec{r}') = \langle\alpha|\hat{E}^-(\vec{r})\hat{E}^+(\vec{r}')|\alpha\rangle = E_{cl}^-(\vec{r})E_{cl}^+(\vec{r}')\langle\alpha|\alpha\rangle = E_{cl}^-(\vec{r})E_{cl}^+(\vec{r}')$$

On aurait de même

$$G^{(2)}(\vec{r}, \vec{r}') = E_{cl}^-(\vec{r})E_{cl}^-(\vec{r}')E_{cl}^+(\vec{r}')E_{cl}^+(\vec{r}) = \underbrace{E_{cl}^-(\vec{r})E_{cl}^+(\vec{r})}_{I_{cl}(\vec{r})} \underbrace{E_{cl}^-(\vec{r}')E_{cl}^+(\vec{r}')}_{I_{cl}(\vec{r}')}$$

Toutes les fonctions de corrélation se factorisent en produits de fonctions de $\vec{r}, \vec{r}'$. Définition d'un champ cohérent (Glauber)

On en déduit

$$|g^{(1)}(\vec{r}, \vec{r}')| = 1 \quad g^{(2)}(\vec{r}, \vec{r}') = 1$$

Plus d'effet Hanbury-Brown et Twiss

Condensats de Bose-Einstein

Etat $|\psi_0\rangle$ dans lequel sont condensés les atomes bosoniques

Fonction d'onde normée $\psi_0(\vec{r})$

La phase absolue de $\psi_0(\vec{r})$ n'a pas de sens physique. Les 2 états $\psi_0(\vec{r})$ et $\psi_0(\vec{r}) e^{i\chi}$ représentent le même état physique.

Différence avec le champ optique
La phase relative de $\psi_0(\vec{r})$ et $\psi_0(\vec{r}')$ est par contre importante

Opérateurs $\hat{a}_0^+$ et $\hat{a}_0$

Créent et détruisent un atome dans l'état $\psi_0(\vec{r})$

Opérateurs $\hat{\Psi}^+(\vec{r})$ et $\hat{\Psi}(\vec{r})$

Créent et détruisent un atome au point $\vec{r}$

$$\hat{\Psi}(\vec{r}) = \hat{a}_0 \psi_0(\vec{r}) + \sum_{i \neq 0} \hat{a}_i \psi_i(\vec{r})$$

$\{\psi_i(\vec{r})\}$ base orthonormée d'états à 1 particule incluant l'état $\psi_0(\vec{r})$

Etat de Fock $|N\rangle$

N bosons dans l'état $\psi_0(\vec{r})$

Etat cohérent $|\alpha\rangle$

On peut formellement introduire les états $|\alpha\rangle$, états propres de $\hat{a}_0$, de valeur propre $\alpha = |\alpha| e^{i\varphi}$

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^N}{\sqrt{N!}} e^{iN\varphi} |N\rangle$$

Superposition d'états correspondant à des nombres différents N de bosons.

Sens physique d'un tel état ?

Toutes les observables physiques commutent avec l'opérateur $\hat{N}$ nombre de particules - Règles de supersélection.

Mélange statistique $\hat{\rho}$ d'états $|\alpha\rangle$

de même $|\alpha|$ et de phase φ équipartie entre 0 et 2π

$\hat{\rho}$ est aussi un mélange statistique d'états de Fock $|N\rangle$ et a un sens physique

Fonctions de corrélation

T-35

Ordre 1

$$G^{(1)}(\vec{r}, \vec{r}') = \langle \hat{\Psi}^+(\vec{r}) \hat{\Psi}(\vec{r}') \rangle$$

Remarque: $\hat{\Psi}^+(\vec{r}) \hat{\Psi}(\vec{r}')$ est l'opérateur en seconde quantification associé à l'opérateur à 1 particule $\sum_{i=1}^N |i, \vec{r}'\rangle \langle i, \vec{r}|$, de sorte que $G^{(1)}(\vec{r}, \vec{r}')$ peut également s'écrire $N \langle \vec{r}' | \hat{\rho}^{(1)} | \vec{r} \rangle$ où $\rho^{(1)}$ est l'opérateur densité à 1 particule

$$g^{(1)}(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{G^{(1)}(\vec{r}, \vec{r}')}{\sqrt{G^{(1)}(\vec{r}, \vec{r}) G^{(1)}(\vec{r}', \vec{r}')}}}$$

Ordre 2

$$G^{(2)}(\vec{r}, \vec{r}') = \langle \hat{\Psi}^+(\vec{r}) \hat{\Psi}^+(\vec{r}') \hat{\Psi}(\vec{r}') \hat{\Psi}(\vec{r}) \rangle$$

$$g^{(2)}(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{G^{(2)}(\vec{r}, \vec{r}')}{G^{(1)}(\vec{r}, \vec{r}) G^{(1)}(\vec{r}', \vec{r}')}$$

Ordre 3

$$G^{(3)}(\vec{r}, \vec{r}', \vec{r}'') = \langle \hat{\Psi}^+(\vec{r}) \hat{\Psi}^+(\vec{r}') \hat{\Psi}^+(\vec{r}'') \hat{\Psi}(\vec{r}'') \hat{\Psi}(\vec{r}') \hat{\Psi}(\vec{r}) \rangle$$

$$g^{(3)}(\vec{r}, \vec{r}', \vec{r}'') = \frac{G^{(3)}(\vec{r}, \vec{r}', \vec{r}'')}{G^{(1)}(\vec{r}, \vec{r}) G^{(1)}(\vec{r}', \vec{r}') G^{(1)}(\vec{r}'', \vec{r}'')}$$

Calcul des fonctions de corrélation

T-36

dans un état de Fock $|N\rangle$

- N bosons dans le même état $\psi_0(\vec{r})$.

Un tel état correspond à la description du condensat dans une théorie de champ moyen

ψ_0 est la solution de l'équation de G.P.

- On peut écrire $|N\rangle$ sous la forme

$$|N\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}} (\hat{a}_0^+)^N |0\rangle$$

$|0\rangle$: Vide de particules

$$\hat{\Psi}(\vec{r}) = \sum_{i=0}^{\infty} \hat{a}_i \psi_i(\vec{r}) \quad \hat{\Psi}^+(\vec{r}) = \sum_{i=0}^{\infty} \hat{a}_i^+ \psi_i^*(\vec{r})$$

Comme $\hat{a}_i$ et $\hat{a}_i^+$ avec $i \neq 0$ commutent avec $\hat{a}_0$ et $\hat{a}_0^+$ on peut remplacer $\hat{\Psi}(\vec{r})$ par $\hat{a}_0 \psi_0(\vec{r})$ et $\hat{\Psi}^+(\vec{r})$ par $\hat{a}_0^+ \psi_0^*(\vec{r})$ dans le calcul de $G^{(1)}$, $G^{(2)}$, $G^{(3)}$... pour un système de bosons dans l'état $|N\rangle$

En effet, l'ordre normal et la commutation de $\hat{a}_i$ avec $(\hat{a}_0^+)^N$ font apparaître $\hat{a}_i |0\rangle = 0$

Calcul de $G^{(1)}$

$$G^{(1)}(\vec{r}, \vec{r}') = \psi_0^*(\vec{r}) \psi_0(\vec{r}') \frac{\langle N | \hat{a}_0^+ \hat{a}_0 | N \rangle}{= N \langle N | N \rangle = N}$$

$$G^{(1)}(\vec{r}, \vec{r}') = N \psi_0^*(\vec{r}) \psi_0(\vec{r}')$$

Calcul de $G^{(2)}$

$$G^{(2)}(\vec{r}, \vec{r}') = \psi_0^*(\vec{r}) \psi_0^*(\vec{r}') \psi_0(\vec{r}') \psi_0(\vec{r}) \frac{\langle N | \hat{a}_0^+ \hat{a}_0^+ \hat{a}_0 \hat{a}_0 | N \rangle}{= N(N-1) \langle N-2 | N-2 \rangle = N(N-1)}$$

$$G^{(2)}(\vec{r}, \vec{r}') = N(N-1) |\psi_0(\vec{r})|^2 |\psi_0(\vec{r}')|^2$$

$$g^{(2)}(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{N(N-1)}{N^2} = 1 - \frac{1}{N} \approx 1 \quad \text{si } N \gg 1$$

Calcul de $G^{(3)}$

$$G^{(3)}(\vec{r}, \vec{r}', \vec{r}'') = \psi_0^*(\vec{r}) \psi_0^*(\vec{r}') \psi_0^*(\vec{r}'') \psi_0(\vec{r}'') \psi_0(\vec{r}') \psi_0(\vec{r}) \frac{\langle N | \hat{a}_0^+ \hat{a}_0^+ \hat{a}_0^+ \hat{a}_0 \hat{a}_0 \hat{a}_0 | N \rangle}{= N(N-1)(N-2) \langle N-3 | N-3 \rangle = N(N-1)(N-2)}$$

$$G^{(3)}(\vec{r}, \vec{r}', \vec{r}'') = N(N-1)(N-2) |\psi_0(\vec{r})|^2 |\psi_0(\vec{r}')|^2 |\psi_0(\vec{r}'')|^2$$

$$g^{(3)}(\vec{r}, \vec{r}', \vec{r}'') = \frac{N(N-1)(N-2)}{N^3} = \left(1 - \frac{1}{N}\right) \left(1 - \frac{2}{N}\right) \approx 1 \quad \text{si } N \gg 1$$

Fonction de corrélation $G^{(1)}$ et longueur T-38

de cohérence pour un gaz de bosons en équilibre thermodynamique

① Bosons dans une boîte

Base orthonormée d'états

$$\psi_i(\vec{r}) = \frac{1}{L^{3/2}} e^{i\vec{k}_i \cdot \vec{r}} \quad k_{i\frac{x}{3}} = \frac{2\pi}{L} n_{\frac{x}{3}}$$

$$\hat{\psi}(\vec{r}) = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{\vec{k}} \hat{a}_{\vec{k}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \quad \hat{\psi}^\dagger(\vec{r}) = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{\vec{k}} \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}}$$

$$G^{(1)}(\vec{r}, \vec{r}') = \text{Tr}[\hat{\rho}_{eq} \hat{\psi}^\dagger(\vec{r}) \hat{\psi}(\vec{r}')] = \sum_{\vec{k}} \frac{1}{L^3} e^{i\vec{k} \cdot (\vec{r}' - \vec{r})} \text{Tr}(\hat{\rho}_{eq} \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}}) = \langle n_{\vec{k}} \rangle$$

Invariance par translation de $\hat{\rho}_{eq}$

- $\langle \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger, \hat{a}_{\vec{k}} \rangle = 0$ si $\vec{k}' \neq \vec{k}$
- $G^{(1)}$ ne dépend que de $\vec{r} - \vec{r}'$

$$\hat{\rho}_{eq} = \frac{1}{Z_G} e^{-\beta(\hat{H} - \mu \hat{N})}$$

$$\hat{H} = \sum_{\vec{k}} \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}} + V_{int}$$

Pour un gaz parfait, $V_{int} = 0$

Gaz parfait de bosons dans une boîte

$$\langle n_{\vec{k}} \rangle = \frac{z e^{-\beta \epsilon_{\vec{k}}}}{1 - z e^{-\beta \epsilon_{\vec{k}}}} = \sum_{l=1}^{\infty} z^l e^{-l \beta \epsilon_{\vec{k}}}$$

$$z = e^{\beta \mu} = \text{Fugacité} \quad \epsilon_{\vec{k}} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \quad \beta = \frac{1}{k_B T}$$

$$G^{(1)}(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{L^3} \sum_{\vec{k}} \langle n_{\vec{k}} \rangle e^{i\vec{k} \cdot (\vec{r}' - \vec{r})}$$

Si l'on remplace $\sum_{\vec{k}}$ par une intégrale, on élimine la contribution de $\vec{k} = \vec{0}$ car la densité d'états s'annule en ce point

Il faut donc séparer la contribution de $\vec{k} = \vec{0}$ du reste qui peut être approximé par une intégrale (étendue jusqu'à 0)

$$G^{(1)}(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{N_0}{L^3} + \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k e^{i\vec{k} \cdot (\vec{r}' - \vec{r})} \sum_{l=1}^{\infty} z^l e^{-l \beta \frac{\hbar^2 k^2}{2m}}$$

$N_0 = \langle n_0 \rangle =$ Population de l'état fondamental

$$G^{(1)}(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{N_0}{L^3} + \frac{1}{\lambda_T^3} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{z^l}{l^{3/2}} e^{-\frac{\pi(\vec{r} - \vec{r}')^2}{l \lambda_T^2}}$$

$$\lambda_T = \sqrt{\frac{2\pi \hbar^2}{m k_B T}} = \text{Longueur d'onde de de Broglie thermique}$$

$$G^{(1)}(\vec{r}, \vec{r}') = \rho(\vec{r}) = \frac{N_0}{L^3} + \frac{1}{\lambda_T^3} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{z^l}{l^{3/2}} = \frac{N}{L^3}$$

Evolution de $G^{(1)}(\vec{r}, \vec{r}')$ quand on augmente progressivement N à T fixéeGaz très dilué $\rho \lambda_T^3 \ll 1$ $\rho = \frac{N}{L^3}$

- On a alors $z \ll 1$ et $N_0 \ll N$. On peut négliger N_0/L^3 . De l'expression

$$\rho(\vec{r}) = \frac{N}{L^3} \approx \frac{1}{\lambda_T^3} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{z^l}{l^{3/2}} = \frac{1}{\lambda_T^3} g_{3/2}(z)$$

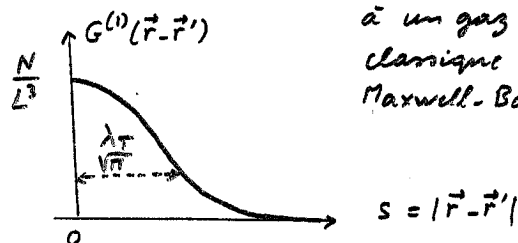
on déduit, comme $g_{3/2}(z) \approx z$ si $z \ll 1$

$$\frac{N}{L^3} \approx \frac{z}{\lambda_T^3} \rightarrow z \approx \lambda_T^3 \frac{N}{L^3}$$

- Dans l'expression de $G^{(1)}(\vec{r}, \vec{r}')$, on peut négliger N_0/L^3 et ne garder que le terme $l=1$ dans la série $\sum_{l=1}^{\infty}$

$$G^{(1)}(\vec{r}, \vec{r}') \approx \frac{z}{\lambda_T^3} e^{-\frac{\pi(\vec{r} - \vec{r}')^2}{\lambda_T^2}} = \frac{N}{L^3} e^{-\frac{\pi(\vec{r} - \vec{r}')^2}{\lambda_T^2}}$$

- On retrouve le résultat correspondant à un gaz parfait classique de Maxwell-Boltzmann



On augmente N tout en restant en dessous de la densité critique

N_0 reste négligeable, mais z croît et on ne peut plus négliger les termes $l > 1$ dans la série $\sum_{l=1}^{\infty}$

$G^{(1)}(\vec{r}-\vec{r}')$ est une somme de Gaussiennes de largeurs croissantes $\frac{\lambda_T}{\sqrt{N}}$, $\frac{\lambda_T \sqrt{2}}{\sqrt{N}}$, $\frac{\lambda_T \sqrt{3}}{\sqrt{N}}$, ... La largeur de $G^{(1)}(\vec{r}-\vec{r}')$ croît quand N croît.

On atteint le régime critique Pour $\lambda_T^3 = 2.612$

On a alors $z = 1$. On peut toujours négliger N_0 qui n'a pas encore commencé à croître et faire $z = 1$ dans la série $\sum_{l=1}^{\infty}$

$$G_{\text{crit}}^{(1)}(\vec{r}-\vec{r}') = \frac{1}{\lambda_T^3} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^{3/2}} e^{-\frac{\pi(\vec{r}-\vec{r}')^2}{l\lambda_T^2}}$$

Courbe qui ne dépend plus que de λ_T

$$G_{\text{crit}}^{(1)}(\vec{r}, \vec{r}) = \frac{1}{\lambda_T^3} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^{3/2}} = \frac{2.612}{\lambda_T^3} = \rho_{\text{crit}}$$

On retrouve bien la valeur de la densité critique pour $G^{(1)}(\vec{r}, \vec{r}) = \rho(\vec{r})$

Comportement asymptotique de $G^{(1)}(\vec{r}-\vec{r}')$ pour $|\vec{r}-\vec{r}'| = s \gg \lambda_T$ T-42

- Revenons à l'expression de $\langle n_k \rangle$

$$\langle n_k \rangle = \frac{z e^{-\beta \epsilon_k}}{1 - z e^{-\beta \epsilon_k}} \quad \epsilon_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

Sans faire le développement en puissances de z

- Comme $G^{(1)}(s)$ est la transformée de Fourier de $\langle n_k \rangle$, le comportement de $G^{(1)}(s)$ aux grands s est déterminé par celui de $\langle n_k \rangle$ aux petits k

$$\langle n_k \rangle = \frac{z}{e^{\beta \hbar^2 k^2 / 2m} - z} \xrightarrow{k \rightarrow 0} \frac{z}{1 - z + \frac{\beta \hbar^2}{2m} k^2} = \frac{z}{\beta \hbar^2 / 2m} \frac{1}{k^2 + k_c^2}$$

$$k_c^2 = \frac{1-z}{\beta \hbar^2 / 2m} = \frac{4\pi(1-z)}{\lambda_T^2}$$

On en déduit

$$z < 1 \rightarrow G^{(1)}(s) \underset{s \gg \lambda_T}{\propto} \frac{e^{-s \frac{\sqrt{4\pi(1-z)}}{\lambda_T}}}{s}$$

$$z = 1 \rightarrow G_{\text{crit}}^{(1)}(s) \underset{s \gg \lambda_T}{\propto} \frac{1}{s}$$

Au dessus du seuil $z < 1$ T-43

La somme de la série de Gaussiennes $e^{-\pi s^2 / l \lambda_T^2}$ avec $l = 1, 2, 3, \dots$ tend vers une "courbe de Yukawa" en $\frac{e^{-\gamma s}}{s}$ avec $\gamma = \frac{\lambda_T}{\sqrt{4\pi(1-z)}}$

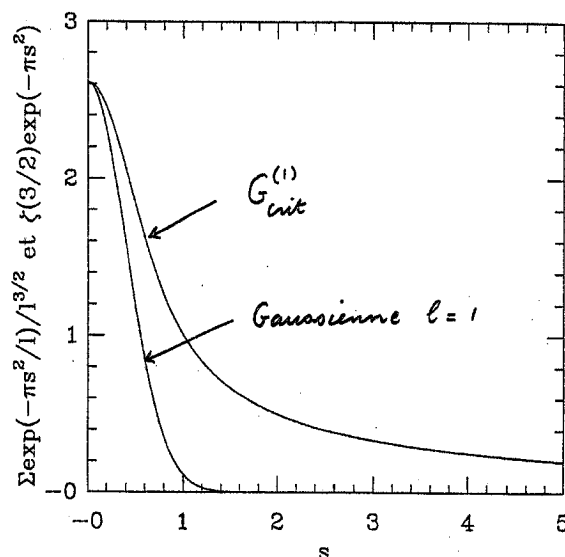
Quand on atteint le seuil $z = 1$

La somme de la série de Gaussiennes tend vers une courbe en $\frac{1}{s}$

Disparition de toute échelle de longueur (loi de puissance) dans la portée des corrélations spatiales

Etude numérique de $G_{\text{crit}}^{(1)}(s)$ (faite par Yvan Castin)

Comparaison de $G_{\text{crit}}^{(1)}(s)$ et de la Gaussienne la plus étroite ($l=1$) normalisées à la même valeur en $s=0$

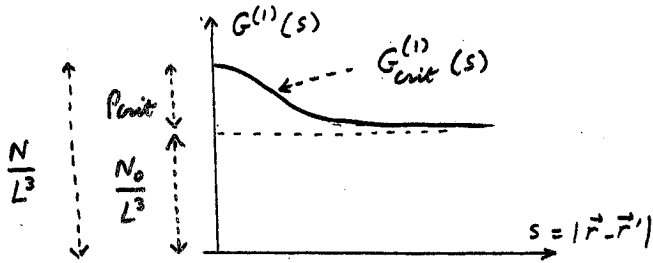


On dépasse la densité critique $\rho > \rho_{crit}$

N_0 n'est plus négligeable. z reste égal à 1

$$G^{(1)}(\vec{r}-\vec{r}') = \frac{N_0}{L^3} + G_{crit}^{(1)}(\vec{r}-\vec{r}') \quad (T-45)$$

$$G^{(1)}(\vec{r}, \vec{r}) = \frac{N_0}{L^3} + \rho_{crit} \quad \rho_{crit} = \frac{N-N_0}{L^3}$$



Toute augmentation de N se répercute intégralement sur N_0 .

ρ_{crit} ne change pas. Le fond plat augmente. La "bosse" reste inchangée

On voit apparaître une longueur de cohérence infinie due au condensat

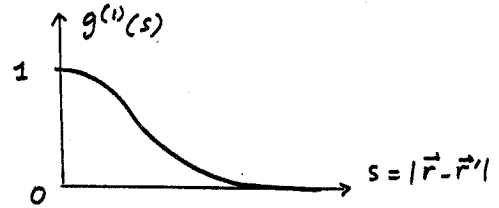
Ordre à longue portée

Fonctions de corrélation normalisée

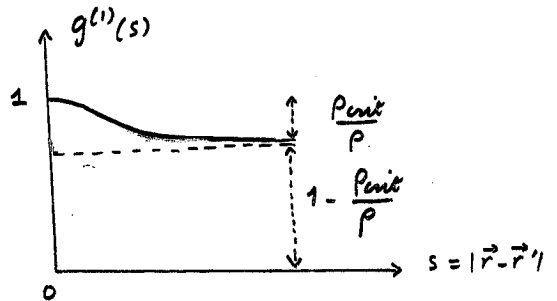
$$g^{(1)}(\vec{r}-\vec{r}') = \frac{G^{(1)}(\vec{r}-\vec{r}')}{\sqrt{G^{(1)}(0) G^{(1)}(0)}} \quad (T-46)$$

Gaz très dilué

$$g^{(1)}(\vec{r}-\vec{r}') = e^{-\frac{\pi(\vec{r}-\vec{r}')^2}{\lambda_T^2}}$$



Gaz très dense



Quand $\rho \rightarrow \infty$, $g^{(1)}(s) \rightarrow 1$

Effet des interactions

(T-47)

On se limite au cas $T=0^\circ K$, où l'on peut valablement utiliser l'approche de Bogolubov. On a toujours

$$G^{(1)}(\vec{r}-\vec{r}') = \frac{N_0}{L^3} + \sum_{k \neq 0} \frac{\langle \hat{a}_k^+ \hat{a}_k \rangle}{L^3} e^{i\vec{k} \cdot (\vec{r}' - \vec{r})}$$

Les $\langle \hat{a}_k^+ \hat{a}_k \rangle = \langle \tilde{\Psi}_0 | \hat{a}_k^+ \hat{a}_k | \tilde{\Psi}_0 \rangle$ (où $\tilde{\Psi}_0$ est le nouvel état fondamental perturbé sous l'effet des interactions) ne sont plus nuls quand $k \neq 0$, non pas à cause des excitations thermiques puisque $T=0^\circ K$, mais à cause des collisions élastiques

"Dépletion quantique" du condensat

$$G^{(1)}(\vec{r}, \vec{r}) = \rho(\vec{r}) = \frac{N_0}{L^3} + \sum_{k \neq 0} \frac{1}{L^3} \langle \hat{a}_k^+ \hat{a}_k \rangle = \frac{N}{L^3}$$

$$\sum_{k \neq 0} \frac{1}{L^3} \langle \hat{a}_k^+ \hat{a}_k \rangle = \frac{N-N_0}{L^3} = \frac{8\rho}{3\sqrt{\pi}} (\rho a^3)^{1/2}$$

(Voir transparent T17)

Calcul de $\sum_{k \neq 0} \frac{1}{L^3} \langle \hat{a}_k^+ \hat{a}_k \rangle e^{i\vec{k} \cdot (\vec{r}' - \vec{r})}$

(T-48)

$$\begin{aligned} \hat{a}_{\vec{k}} &= u_{\vec{k}} \hat{b}_{\vec{k}}^+ - v_{\vec{k}} \hat{b}_{-\vec{k}} \\ \hat{a}_{\vec{k}}^+ &= u_{\vec{k}} \hat{b}_{\vec{k}} - v_{\vec{k}} \hat{b}_{-\vec{k}}^+ \\ \hat{b}_{\vec{k}} | \tilde{\Psi}_0 \rangle &= 0 \quad \langle \tilde{\Psi}_0 | \hat{b}_{\vec{k}}^+ = 0 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Voir} \\ \text{cours 98-99} \\ \text{page VIII-7} \end{array} \right\}$$

$$G^{(1)}(\vec{r}-\vec{r}') = \frac{N_0}{L^3} + \frac{1}{L^3} \sum_{k \neq 0} v_{\vec{k}}^2 e^{i\vec{k} \cdot (\vec{r}' - \vec{r})}$$

$$\approx \frac{N_0}{L^3} + \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k v_{\vec{k}}^2 e^{i\vec{k} \cdot (\vec{r}' - \vec{r})}$$

$$v_{\vec{k}}^2 = \hbar^2 \theta_{\vec{k}} = \frac{1}{2} \left[\frac{k^2 + k_0^2}{k^2(k^2 + 2k_0^2)} - 1 \right] \quad \text{Cours 98-99 page VII-12}$$

$$k_0 = \frac{1}{\xi_0} \quad \xi_0 = \frac{1}{\sqrt{8\pi\rho}a_0} = \text{longueur de relaxation}$$

$$G^{(1)}(s) \approx \frac{N_0}{L^3} + \frac{k_0^3}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{1}{2} k \left[\frac{k^2+1}{\sqrt{k^2+2}} - k \right] e^{i\vec{k} \cdot \vec{s}} \frac{1}{\xi_0}$$

$$\vec{k} = \frac{\vec{s}}{\xi_0} \quad s = |\vec{r}-\vec{r}'|$$

On retrouve une courbe analogue à celle de T-18. La "bosse" a maintenant une amplitude de l'ordre de $\frac{N-N_0}{N} \propto (\rho a^3)^{1/2}$ et sa longueur est déterminée par la longueur de relaxation ξ_0 .

Récapitulation

T-49

Dans un gaz parfait très loin de la dégénérescence, les corrélations spatiales s'étendent sur une distance très faible, de l'ordre de la longueur d'onde de de Broglie thermique.

Quand on s'approche de la dégénérescence, cette longueur de cohérence augmente.

L'apparition d'un condensat se traduit par une longueur de cohérence infinie, c'est à dire par un ordre à très longue portée

Pour $T \ll T_c$, la contribution du condensat est prépondérante et $G^{(1)}(s)$ ne dépend plus de s , sauf si des interactions font apparaître un pic d'amplitude de l'ordre de $(\rho a^3)^{1/2}$ et de largeur de l'ordre de ξ_0 .

T-50

② Bosons dans un piège harmonique

- Oscillateur harmonique isotrope de fréquence ω

$$E_n = n \hbar \omega \quad n = n_x + n_y + n_z$$

(énergies repérées par rapport à celle du vide)

- Largeur spatiale de l'état fondamental

$$\sigma = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$$

- En l'absence d'interactions, la matrice densité à un corps est diagonale dans la base $\{|n\rangle\}$ et on est ramené au calcul d'éléments de matrice de la forme $\langle \vec{r} | \frac{1}{Z} e^{-\beta \hat{H}_0} | \vec{r}' \rangle$. A la limite $k_B T \gg \hbar \omega$, on trouve (voir ref. 3)

$$\langle \vec{r} | \frac{1}{Z} e^{-\beta \hat{H}_0} | \vec{r}' \rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{(\Delta r)^3} \times \exp\left[-\frac{[(\vec{r}+\vec{r}')/2]^2}{2\Delta r^2}\right] \exp\left[-\frac{(\vec{r}-\vec{r}')^2}{2\xi^2}\right]$$

$$\Delta r^2 = \frac{k_B T}{m\omega^2} \quad \xi^2 = \frac{\hbar^2}{mk_B T} = \frac{\lambda_T^2}{2\pi}$$

T-51

Résultats du calcul de $G^{(1)}$ (en l'absence d'interactions)

Cas très peu dégénéré ($N \ll N_{crit}$)

$$G^{(1)}(\vec{r}, \vec{r}') = N \langle \vec{r} | \frac{1}{Z} e^{-\beta \hat{H}_0} | \vec{r}' \rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{N}{(\Delta r)^3} \exp\left\{-\frac{[(\vec{r}+\vec{r}')/2]^2}{2\Delta r^2}\right\} \exp\left[-\frac{(\vec{r}-\vec{r}')^2}{2\xi^2}\right]$$

Densité spatiale : $\rho(\vec{r}) = G(\vec{r}, \vec{r})$

$$\rho(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{N}{(\Delta r)^3} \exp\left[-\frac{r^2}{2\Delta r^2}\right]$$

Gaussienne de largeur $\Delta r = \sqrt{\frac{k_B T}{m\omega^2}}$

$G^{(1)}(\vec{r}, \vec{r}')$ dépend de $\vec{r}$ et $\vec{r}'$ et non plus simplement de $\vec{r}-\vec{r}'$. Il n'y a plus d'invariance par translation

$G^{(1)}(\vec{r}, \vec{r}')$ dépend de $(\vec{r}+\vec{r}')/2$ sur des distances de l'ordre de Δr et de $\vec{r}-\vec{r}'$ sur des distances de l'ordre de ξ

Δr apparaît comme la largeur du nuage d'atomes et ξ comme la longueur de cohérence, de l'ordre de λ_T

T-52

Quand N augmente en restant $\ll N_{crit}$, la longueur de cohérence augmente, comme dans le cas du gaz dans une boîte, car $G^{(1)}$ est une somme de fonctions analogues à celle donnée plus haut, avec des longueurs de cohérence croissant en $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \dots$

Quand N atteint N_{crit} , $G^{(1)}(\vec{r}, \vec{r}') = G_{crit}^{(1)}(\vec{r}, \vec{r}')$ (dans la série en z , on fait $z=1$)

Quand N dépasse N_{crit} , on voit apparaître une contribution de l'état fondamental $\psi_0(\vec{r})$ du piège

$$G^{(1)}(\vec{r}, \vec{r}') = N_0 \psi_0^*(\vec{r}) \psi_0(\vec{r}') + G_{crit}^{(1)}(\vec{r}, \vec{r}')$$

Le condensat formé par les N_0 atomes dans l'état $\psi_0(\vec{r})$ fait apparaître une nouvelle longueur de cohérence, la largeur $\sigma = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$ de l'état ψ_0 .

Quand $N \gg N_{crit}$,

$$G^{(1)}(\vec{r}, \vec{r}') \simeq N \psi_0^*(\vec{r}) \psi_0(\vec{r}')$$

Comparaison des diverses longueurs

- Longueur de cohérence du condensat

$$\sigma_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$$

- Longueur d'onde de de Broglie thermique

$$\lambda_T = \hbar \sqrt{\frac{2\pi}{mk_B T}}$$

- Extension du nuage thermique

$$\Delta r = \sqrt{\frac{k_B T}{m\omega^2}}$$

$$\frac{\lambda_T}{\sigma_0} = \sqrt{\frac{2\pi \hbar \omega}{k_B T}} \ll 1 \quad \text{car} \quad \hbar \omega \ll k_B T$$

Le condensat fait donc apparaître un ordre à longue portée

$$\frac{\sigma_0}{\Delta r} = \sqrt{\frac{\hbar \omega}{k_B T}} \ll 1$$

On a donc

$$\lambda_T \ll \sigma_0 \ll \Delta r$$

Fonctions de corrélation d'ordre supérieur $G^{(2)}$ et $G^{(3)}$

Importantes pour étudier les corrélations de densité et fluctuations de densité des atomes bosoniques.

Difficultés

L'ensemble grand canonique, très commode pour les calculs (factorisation de l'opérateur densité en l'absence d'interactions), prédit des fluctuations importantes du nombre N_0 de particules condensées.

Il s'applique aux expériences faites sur des bosons piégés où N est fixé (en l'absence de pertes) et où il faudrait plutôt utiliser l'ensemble canonique

Les prédictions sur les valeurs moyennes $\langle \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k \rangle$ varient cependant peu d'un ensemble à l'autre, et le calcul de $G^{(1)}$ fait plus haut demeure valable

Solution adoptée ici

- Pour un système condensé ($N \gg N_{crit}$) on n'utilisera pas l'ensemble grand canonique pour calculer $G^{(2)}$ et $G^{(3)}$ mais un état de Fock $|N_0\rangle$. Un tel calcul a déjà été fait plus haut (T-37)

Remarque : on vérifie bien par contre que le résultat du calcul de $G^{(1)}$ est le même à la limite $N \gg N_{crit}$, que l'on utilise un état de Fock ou l'ensemble grand canonique (comparer T-37 et T-52).

- Pour un système très peu dégénéré ($N \ll N_{crit}$), on peut montrer que les prédictions des ensembles canonique et grand canonique diffèrent très peu, et on continuera à utiliser l'ensemble grand canonique, plus commode mathématiquement, pour calculer $G^{(2)}$ et $G^{(3)}$.

Théorème de Wick

Hypothèses

- Bosons sans interactions
 - Ensemble grand canonique
- $$\hat{\rho} = \frac{1}{Z_G} e^{-\beta(\hat{H} - \mu \hat{N})} = \frac{1}{Z_G} \prod_k e^{-\beta \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k (\epsilon_k - \mu)}$$

ϵ_k : Énergie de l'état individuel k

Résultats

$$\begin{aligned} \langle \hat{a}_x^\dagger \hat{a}_x^\dagger \hat{a}_y \hat{a}_y \rangle &= \text{Tr}(\hat{a}_x^\dagger \hat{a}_x^\dagger \hat{a}_y \hat{a}_y \hat{\rho}) = \\ &= \langle \hat{a}_x^\dagger \hat{a}_y \rangle \langle \hat{a}_x^\dagger \hat{a}_y \rangle + \langle \hat{a}_x^\dagger \hat{a}_y \rangle \langle \hat{a}_x^\dagger \hat{a}_y \rangle \\ \langle \hat{a}_x^\dagger \hat{a}_x^\dagger \hat{a}_y \hat{a}_y \hat{a}_z \hat{a}_z \rangle &= \\ &\langle \hat{a}_x^\dagger \hat{a}_y \rangle \langle \hat{a}_x^\dagger \hat{a}_z \rangle \langle \hat{a}_y \hat{a}_z \rangle + \langle \hat{a}_x^\dagger \hat{a}_y \rangle \langle \hat{a}_x^\dagger \hat{a}_z \rangle \langle \hat{a}_y \hat{a}_z \rangle \\ &+ \langle \hat{a}_x^\dagger \hat{a}_z \rangle \langle \hat{a}_x^\dagger \hat{a}_y \rangle \langle \hat{a}_y \hat{a}_z \rangle + \langle \hat{a}_x^\dagger \hat{a}_z \rangle \langle \hat{a}_x^\dagger \hat{a}_y \rangle \langle \hat{a}_y \hat{a}_z \rangle \\ &+ \langle \hat{a}_x^\dagger \hat{a}_y \rangle \langle \hat{a}_x^\dagger \hat{a}_z \rangle \langle \hat{a}_y \hat{a}_z \rangle + \langle \hat{a}_x^\dagger \hat{a}_y \rangle \langle \hat{a}_x^\dagger \hat{a}_z \rangle \langle \hat{a}_y \hat{a}_z \rangle \end{aligned}$$

Produit des valeurs moyennes de tous les produits possibles d'un opérateur de création par un opérateur d'annihilation

Généralisation possible à des Fermions et à des ordres autres que l'ordre normal pour les produits d'opérateurs

Calcul de $G^{(2)}(\vec{r}, \vec{r}')$

$$\hat{\Psi}^+(\vec{r}) = \sum_{\alpha} \hat{a}_{\alpha}^{\dagger} \psi_{\alpha}(\vec{r}) \quad \hat{\Psi}(\vec{r}) = \sum_{\beta} \hat{a}_{\beta} \psi_{\beta}(\vec{r})$$

$$\langle \hat{\Psi}^+(\vec{r}) \hat{\Psi}^+(\vec{r}') \hat{\Psi}(\vec{r}') \hat{\Psi}(\vec{r}) \rangle =$$

$$\sum_{\alpha} \sum_{\beta} \sum_{\gamma} \sum_{\delta} \psi_{\alpha}^*(\vec{r}) \psi_{\beta}^*(\vec{r}') \psi_{\gamma}(\vec{r}') \psi_{\delta}(\vec{r}) \langle \hat{a}_{\alpha}^{\dagger} \hat{a}_{\beta}^{\dagger} \hat{a}_{\gamma} \hat{a}_{\delta} \rangle$$

En utilisant le théorème de Wick, et de nouveau l'expression de $\hat{\Psi}$ et $\hat{\Psi}^+$ en fonction des $\hat{a}$ et $\hat{a}^+$, on obtient

$$G^{(2)}(\vec{r}, \vec{r}') = \langle \hat{\Psi}^+(\vec{r}) \hat{\Psi}^+(\vec{r}') \hat{\Psi}(\vec{r}') \hat{\Psi}(\vec{r}) \rangle =$$

$$\langle \hat{\Psi}^+(\vec{r}) \hat{\Psi}(\vec{r}') \rangle \langle \hat{\Psi}^+(\vec{r}') \hat{\Psi}(\vec{r}) \rangle + \langle \hat{\Psi}^+(\vec{r}) \hat{\Psi}(\vec{r}) \rangle \langle \hat{\Psi}^+(\vec{r}') \hat{\Psi}(\vec{r}') \rangle$$

$$= |G^{(1)}(\vec{r}, \vec{r}')|^2 + G^{(1)}(\vec{r}, \vec{r}) G^{(1)}(\vec{r}', \vec{r}')$$

On en déduit

$$g^{(2)}(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{G^{(2)}(\vec{r}, \vec{r}')}{G^{(1)}(\vec{r}, \vec{r}) G^{(1)}(\vec{r}', \vec{r}')} =$$

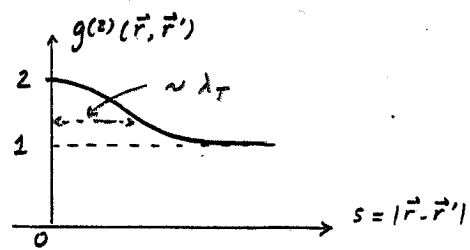
$$= 1 + \frac{|G^{(1)}(\vec{r}, \vec{r}')|^2}{G^{(1)}(\vec{r}, \vec{r}) G^{(1)}(\vec{r}', \vec{r}')}$$

c'est à dire encore

$$g^{(2)}(\vec{r}, \vec{r}') = 1 + |g^{(1)}(\vec{r}, \vec{r}')|^2$$

$$g^{(2)}(\vec{r}, \vec{r}) = 1 + 1 = 2$$

Variations de $g^{(2)}$



Calcul de $G^{(3)}(\vec{r}, \vec{r}', \vec{r}'')$

$$G^{(3)}(\vec{r}, \vec{r}', \vec{r}'') =$$

$$\langle \hat{\Psi}^+(\vec{r}) \hat{\Psi}^+(\vec{r}') \hat{\Psi}^+(\vec{r}'') \hat{\Psi}(\vec{r}'') \hat{\Psi}(\vec{r}') \hat{\Psi}(\vec{r}) \rangle =$$

$$= G^{(1)}(\vec{r}, \vec{r}) G^{(1)}(\vec{r}', \vec{r}') G^{(1)}(\vec{r}'', \vec{r}'')$$

$$+ G^{(1)}(\vec{r}, \vec{r}) G^{(1)}(\vec{r}', \vec{r}'') G^{(1)}(\vec{r}'', \vec{r}')$$

$$+ G^{(1)}(\vec{r}, \vec{r}') G^{(1)}(\vec{r}', \vec{r}'') G^{(1)}(\vec{r}'', \vec{r})$$

$$+ G^{(1)}(\vec{r}, \vec{r}'') G^{(1)}(\vec{r}', \vec{r}') G^{(1)}(\vec{r}', \vec{r})$$

$$+ G^{(1)}(\vec{r}, \vec{r}') G^{(1)}(\vec{r}', \vec{r}'') G^{(1)}(\vec{r}'', \vec{r})$$

$$+ G^{(1)}(\vec{r}, \vec{r}'') G^{(1)}(\vec{r}', \vec{r}') G^{(1)}(\vec{r}', \vec{r})$$

3! = 6 termes

Expression de $g^{(3)}(\vec{r}, \vec{r}', \vec{r}'')$

$$g^{(3)}(\vec{r}, \vec{r}', \vec{r}'') = \frac{G^{(3)}(\vec{r}, \vec{r}', \vec{r}'')}{G^{(1)}(\vec{r}, \vec{r}) G^{(1)}(\vec{r}', \vec{r}') G^{(1)}(\vec{r}'', \vec{r}'')}$$

$$= 1 + |g^{(1)}(\vec{r}, \vec{r}')|^2 + |g^{(1)}(\vec{r}', \vec{r}'')|^2 + |g^{(1)}(\vec{r}'', \vec{r})|^2$$

$$+ 2 \operatorname{Re} [g^{(1)}(\vec{r}, \vec{r}') g^{(1)}(\vec{r}', \vec{r}'') g^{(1)}(\vec{r}'', \vec{r})]$$

Quand $\vec{r} = \vec{r}' = \vec{r}''$, tous les $g^{(1)}$ valent 1, et l'on a donc

$$g^{(3)}(\vec{r}, \vec{r}, \vec{r}) = 6 = 3!$$

Quand $|\vec{r} - \vec{r}''| \gg \lambda_T$ et $|\vec{r}' - \vec{r}''| \gg \lambda_T$, on peut négliger $g^{(1)}(\vec{r}, \vec{r}'')$ et $g^{(1)}(\vec{r}', \vec{r}'')$ de sorte que

$$g^{(3)}(\vec{r}, \vec{r}', \vec{r}'') \underset{\vec{r}'' \rightarrow \infty}{\approx} g^{(2)}(\vec{r}, \vec{r}') = 1 + |g^{(1)}(\vec{r}, \vec{r}')|^2$$

Quelques références

- (1) R.J. Glauber
Phys. Rev. 130, 2529 (1963)
Voir aussi le cours de R.J. Glauber à l'école d'été des Houches en 1964
- (2) M. Naraschewski, R.J. Glauber
Phys. Rev. A59, 4595 (1999)
et references in
- (3) L. Landau, L. Lifschitz,
Physique Statistique, 1^{re} partie
Editions Mir, Moscou 1984
§ 30, p.100 et problème p.103