T-37

Calcul de $G^{(1)}$

$$G^{(1)}(\vec r,\vec r') = \psi_0^*(\vec r)\,\psi_0(\vec r')\,\underbrace{\langle N|\hat a_0^+\hat a_0|N\rangle}_{=N\langle N|N\rangle = N}$$

$$G^{(1)}(\vec r,\vec r') = N\,\psi_0^*(\vec r)\,\psi_0(\vec r')$$

Calcul de $G^{(2)}$

$$G^{(2)}(\vec r,\vec r') = \psi_0^*(\vec r)\,\psi_0^*(\vec r')\,\psi_0(\vec r')\,\psi_0(\vec r)\,\underbrace{\langle N|\hat a_0^+\hat a_0^+\hat a_0\hat a_0|N\rangle}$$

$$= N(N-1)\langle N-2|N-2\rangle = N(N-1)$$

$$G^{(2)}(\vec r,\vec r') = N(N-1)\,|\psi_0(\vec r)|^2\,|\psi_0(\vec r')|^2$$

$$g^{(2)}(\vec r,\vec r') = \frac{N(N-1)}{N^2} = 1-\frac{1}{N} \simeq 1 \quad \text{si } N\gg 1$$

Calcul de $G^{(3)}$

$$G^{(3)}(\vec r,\vec r',\vec r'') = \psi_0^*(\vec r)\,\psi_0^*(\vec r')\,\psi_0^*(\vec r'')\,\psi_0(\vec r'')\,\psi_0(\vec r')\,\psi_0(\vec r)\,\underbrace{\langle N|\hat a_0^+\hat a_0^+\hat a_0^+\hat a_0\hat a_0\hat a_0|N\rangle}_{N(N-1)(N-2)\langle N-3|N-3\rangle = N(N-1)(N-2)}$$

$$G^{(3)}(\vec r,\vec r',\vec r'') = N(N-1)(N-2)\,|\psi_0(\vec r)|^2\,|\psi_0(\vec r')|^2\,|\psi_0(\vec r'')|^2$$

$$g^{(3)}(\vec r,\vec r',\vec r'') = \frac{N(N-1)(N-2)}{N^3} = \left(1-\frac{1}{N}\right)\left(1-\frac{2}{N}\right) \simeq 1 \quad \text{si } N\gg 1$$

T-38

Fonction de corrélation $G^{(1)}$ et longueur de cohérence pour un gaz de bosons en équilibre thermodynamique

① Bosons dans une boite

Base orthonormée d'états

$$\psi_i(\vec r) = \frac{1}{L^{3/2}}\,e^{i\vec k_i\cdot\vec r} \qquad k_{i\,x,y,z} = \frac{2\pi}{L}\,n_{x,y,z}$$

$$\hat\psi(\vec r) = \frac{1}{L^{3/2}}\sum_k \hat a_k\,e^{i\vec k\cdot\vec r} \qquad \hat\psi^+(\vec r) = \frac{1}{L^{3/2}}\sum_k \hat a_k^+\,e^{-i\vec k\cdot\vec r}$$

$$G^{(1)}(\vec r,\vec r') = \mathrm{Tr}\left[\hat\rho_{eq}\,\hat\psi^+(\vec r)\,\hat\psi(\vec r')\right]$$

$$= \sum_k \frac{1}{L^3}\,e^{i\vec k\cdot(\vec r'-\vec r)}\,\underbrace{\mathrm{Tr}\left(\hat\rho_{eq}\,\hat a_k^+\hat a_k\right)}_{\langle n_k\rangle}$$

Invariance par translation de $\hat\rho_{eq}$

- $\langle \hat a_{k'}^+\hat a_k\rangle = 0$ si $\vec k'\neq\vec k$
- $G^{(1)}$ ne dépend que de $\vec r-\vec r'$

$$\hat\rho_{eq} = \frac{1}{Z_G}\,e^{-\beta(\hat H-\mu\hat N)}$$

$$\hat H = \sum_k \frac{\hbar^2k^2}{2m}\,\hat a_k^+\hat a_k + V_{int}$$

Pour un gaz parfait, $V_{int} = 0$

T-39

Gaz parfait de bosons dans une boite

$$\langle n_k\rangle = \frac{z\,e^{-\beta\varepsilon_k}}{1-z\,e^{-\beta\varepsilon_k}} = \sum_{\ell=1}^{\infty} z^\ell\,e^{-\ell\beta\varepsilon_k}$$

$z = e^{\beta\mu}$ = Fugacité $\qquad \varepsilon_k = \dfrac{\hbar^2k^2}{2m} \qquad \beta = \dfrac{1}{k_BT}$

$$G^{(1)}(\vec r,\vec r') = \frac{1}{L^3}\sum_k \langle n_k\rangle\,e^{i\vec k\cdot(\vec r'-\vec r)}$$

Si l'on remplace $\sum_k$ par une intégrale, on élimine la contribution de $\vec k=\vec 0$ car la densité d'états s'annule en ce point.

Il faut donc séparer la contribution de $\vec k=\vec 0$ du reste qui peut être approximé par une intégrale (étendue jusqu'à 0)

$$G^{(1)}(\vec r-\vec r') = \frac{N_0}{L^3} + \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3k\,e^{i\vec k\cdot(\vec r'-\vec r)}\sum_{\ell=1}^{\infty} z^\ell\,e^{-\ell\beta\frac{\hbar^2k^2}{2m}}$$

$N_0 = \langle n_0\rangle$ = Population de l'état fondamental

$$G^{(1)}(\vec r-\vec r') = \frac{N_0}{L^3} + \frac{1}{\lambda_T^3}\sum_{\ell=1}^{\infty}\frac{z^\ell}{\ell^{3/2}}\,e^{-\frac{\pi(\vec r-\vec r')^2}{\ell\lambda_T^2}}$$

$\lambda_T = \sqrt{\dfrac{2\pi\hbar^2}{mk_BT}}$ = Longueur d'onde de de Broglie thermique

$$G^{(1)}(\vec r,\vec r) = \rho(\vec r) = \frac{N_0}{L^3} + \frac{1}{\lambda_T^3}\sum_{\ell=1}^{\infty}\frac{z^\ell}{\ell^{3/2}} = \frac{N}{L^3}$$

T-40

Evolution de $G^{(1)}(\vec r,\vec r')$ quand on augmente progressivement N à T fixée

Gaz très dilué $\qquad \rho\lambda_T^3 \ll 1 \qquad \rho = \dfrac{N}{L^3}$

- On a alors $z\ll 1$ et $N_0 \ll N$. On peut négliger N_0/L^3. De l'expression

$$\rho(\vec r) = \frac{N}{L^3} \simeq \frac{1}{\lambda_T^3}\sum_{\ell=1}^{\infty}\frac{z^\ell}{\ell^{3/2}} = \frac{1}{\lambda_T^3}\,g_{3/2}(z)$$

on déduit, comme $g_{3/2}(z)\simeq z$ si $z\ll 1$

$$\frac{N}{L^3} \simeq \frac{z}{\lambda_T^3} \longrightarrow z \simeq \lambda_T^3\,\frac{N}{L^3}$$

- Dans l'expression de $G^{(1)}(\vec r-\vec r')$, on peut négliger N_0/L^3 et ne garder que le terme $\ell=1$ dans la série $\sum_{\ell=1}^{\infty}$

$$G^{(1)}(\vec r-\vec r') \simeq \frac{z}{\lambda_T^3}\,e^{-\frac{\pi(\vec r-\vec r')^2}{\lambda_T^2}} = \frac{N}{L^3}\,e^{-\frac{\pi(\vec r-\vec r')^2}{\lambda_T^2}}$$

- On retrouve le résultat correspondant à un gaz parfait classique de Maxwell-Boltzmann