Rappel de résultats du cours V

T-161

- Si le système part de $|\chi_i\rangle$ à $t=0$, et si des détections se produisent en $x_1 t_1$, puis en $x_2 t_2$

(i) l'état du système après ces 2 détections est proportionnel à

$|u(x_2t_2, x_1t_1)\rangle =$

$\hat{\psi}(x_2) e^{-i\hat{H}_{eff}(t_2-t_1)/\hbar}\, \hat{\psi}(x_1)\, e^{-i\hat{H}_{eff}t_1/\hbar}\, |\chi_i\rangle$

(ii) la probabilité d'une telle séquence est égale à

$p(x_2t_2, x_1t_1) = \Gamma^2 \langle u(x_2t_2, x_1t_1)\,|\,u(x_2t_2, x_1t_1)\rangle$

(voir par exemple T-141)

- Ces résultats se généralisent aisément à k détections en $x_1t_1, x_2t_2, \dots x_kt_k$
- On va voir que les expressions de $|u\rangle$ et p se simplifient considérablement si l'état initial $|\chi_i\rangle$ est un produit de 2 états cohérents $|A e^{i\theta_1}, A e^{i(\theta_1-\varphi)}\rangle$

Action de $e^{-i\hat{H}_{eff}t/\hbar}$ sur un produit d'états cohérents

T-162

$\hat{H}_{eff} = \hbar(\omega_0 - i\frac{\Gamma}{2})(\hat{a}_1^+\hat{a}_1 + \hat{a}_2^+\hat{a}_2)$ (voir T.137)

$e^{-i(\omega_0-i\frac{\Gamma}{2})\hat{a}_1^+\hat{a}_1}\,|A e^{i\theta_1}\rangle =$

$= e^{-i(\omega_0-i\frac{\Gamma}{2})\hat{N}_1} \sum_{N_1} e^{-A^2/2} \frac{A^{N_1} e^{iN\theta_1}}{\sqrt{N_1!}} |N_1\rangle$

$= e^{-A^2/2} \sum_{N_1} \left(A e^{-\Gamma t/2}\right)^{N_1} \frac{1}{\sqrt{N_1!}} e^{iN(\theta_1-\omega_0 t)} |N_1\rangle$

$\propto |A e^{-\Gamma t/2}\, e^{i(\theta_1-\omega_0 t)}\rangle$

Un état cohérent reste donc un état cohérent dans une évolution régie par $\hat{H}_{eff}$ avec les modifications suivantes

- L'amplitude A est réduite par un facteur $e^{-\Gamma t/2}$

  $A \rightarrow A_t = A e^{-\Gamma t/2}$
- la phase change de $\omega_0 t$

  $\theta_1 \rightarrow \theta_1 - \omega_0 t$

$e^{-i\hat{H}_{eff}t/\hbar}\,|A e^{i\theta_1}, A e^{i(\theta_1-\varphi)}\rangle$

$\propto |A_t e^{i(\theta_1-\omega_0 t)}, A_t e^{i(\theta_1-\omega_0 t-\varphi)}\rangle$

La phase relative φ ne change pas

Action de $\hat{\psi}(x)$ sur un produit d'états cohérents

T-163

$\hat{\psi}(x) = \hat{a}_1 + \hat{a}_2 e^{2i\pi x}$ (voir T-136)

Comme $|A e^{i\theta_1}, A e^{i(\theta_1-\varphi)}\rangle$ est état propre de $\hat{a}_1$ ($\hat{a}_2$), de valeur propre $A e^{i\theta_1}$ $[A e^{i(\theta_1-\varphi)}]$, on a

$\hat{\psi}(x)\,|A e^{i\theta_1}, A e^{i(\theta_1-\varphi)}\rangle =$

$A e^{i\theta_1}\left[1 + e^{i(2\pi x-\varphi)}\right] |A e^{i\theta_1}, A e^{i(\theta_1-\varphi)}\rangle$

Un état cohérent ne change donc pas lors d'un processus de détection. L'action de $\hat{\psi}(x)$ se réduit à une multiplication par un nombre

4 opérateurs agissent sur $|\chi_i\rangle = |A e^{i\theta_1}, A e^{i(\theta_1-\varphi)}\rangle$ dans l'expression de $|u(x_2t_2, x_1t_1)\rangle$ donnée dans (T-161)

- 2 opérateurs changent l'amplitude et la phase des états cohérents (exponentielles d'évolution)
- 2 opérateurs ne les changent pas $[\hat{\psi}(x_1)$ et $\hat{\psi}(x_2)]$

Calcul de $|u(x_2t_2, x_1t_1)\rangle$

T-164

- Effet de $e^{-i\hat{H}_{eff}t_1/\hbar}$

  $A \rightarrow A e^{-\Gamma t_1/2}$ $\qquad \theta_1 \rightarrow \theta_1 - \omega_0 t_1$
- Effet de $e^{-i\hat{H}_{eff}(t_2-t_1)/\hbar}$

  $A e^{-\Gamma t_1/2} \rightarrow \left(A e^{-\Gamma t_1/2}\right) e^{-\Gamma(t_2-t_1)/2} = A e^{-\Gamma t_2/2}$

  $\theta_1 - \omega_0 t_1 \rightarrow \theta_1 - \omega_0 t_1 - \omega_0(t_2-t_1) = \theta_1 - \omega_0 t_2$
- On en déduit que

  $|u(x_2t_2, x_1t_1)\rangle \propto |A_{t_2} e^{i(\theta_1-\omega_0 t_2)}, A_{t_2} e^{i(\theta_1-\omega_0 t_2-\varphi)}\rangle$
- Ces résultats se généralisent aisément à k détections en $x_1t_1, x_2t_2, \dots x_kt_k$
- Après ces k détections, l'état du système est toujours un produit d'états cohérents dont les amplitudes sont réduits par un facteur $e^{-\Gamma t_k/2}$ ne dépendant que de l'instant t_k de la dernière detections, toutes les phases ayant changé de $-\omega_0 t_k$

  $|A_{t_k} e^{i\tilde{\theta}_1}, A_{t_k} e^{i(\tilde{\theta}_1-\varphi)}\rangle$

  $A_{t_k} = A e^{-\Gamma t_k/2} \qquad \tilde{\theta}_1 = \theta_1 - \omega_0 t_k$