Structure de $p(x_2 t_2, x_1 t_1)$

T-165

Alors que l'évolution de l'état du système ne dépend que des exponentielles d'évolution, la probabilité de la suite de détections, c-à-d le carré de la norme de $|u\rangle$, ne dépend de φ, x_1, x_2 que par l'intermédiaire des modules au carré des coefficients multiplicatifs apparaissant lors de l'action de $\hat{\psi}(x_1)$ et $\hat{\psi}(x_2)$

$$p(x_2 t_2, x_1 t_1) \propto |1+e^{i(\varphi_1-\varphi)}|^2\, |1+e^{i(\varphi_2-\varphi)}|^2$$

$$\varphi_1 = 2\pi x_1 \qquad \varphi_2 = 2\pi x_2$$

Le coefficient de proportionnalité est indépendant de $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \theta_1$ (il ne dépend que de t_1 et t_2)

Généralisation

Si $|\chi_i\rangle$ est un produit d'états cohérents

$$p(x_k t_k, \dots x_1 t_1) \propto \prod_{i=1}^{k} |1+e^{i(\varphi_i-\varphi)}|^2$$

Récapitulation

T-166

- Si l'on part de $|Ae^{i\theta_1}, Ae^{i(\theta_1-\varphi)}\rangle$, on aboutit à $|A_{t_k}e^{i\tilde{\theta}_1}, A_{t_k}e^{i(\tilde{\theta}_1-\varphi)}\rangle$ après k détections en $x_1 t_1 \dots x_k t_k$, et ce avec une probabilité proportionnelle à $\prod_{i=1}^{k} |1+e^{i(\varphi_i-\varphi)}|^2$
- L'état initial est en fait un mélange statistique d'états $|Ae^{i\theta_1}, Ae^{i(\theta_1-\varphi)}\rangle$ avec des phases θ_1 et φ équiparties
- Pour obtenir l'état final, il faut donc pondérer chaque opérateur densité final $|A_{t_k}e^{i\tilde{\theta}_1}, A_{t_k}e^{i(\tilde{\theta}_1-\varphi)}\rangle\langle A_{t_k}e^{i\tilde{\theta}_1}, A_{t_k}e^{i(\tilde{\theta}_1-\varphi)}|$ par la probabilité $\prod_{i=1}^{k} |1+e^{i(\varphi_i-\varphi)}|^2$ d'arriver à un tel état final en partant d'un état initial caractérisé par θ_1 et φ, puis moyenner les opérateurs densité ainsi obtenus sur θ_1 et φ

Opérateur densité final après k détections en $x_1, x_2 \dots x_k$

T-167

$$\hat{\rho}_{final} \propto \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} d\theta_1 \prod_{i=1}^{k} |1+e^{i(\varphi_i-\varphi)}|^2 \times$$
$$|A_{t_k}e^{i\tilde{\theta}_1}, A_{t_k}e^{i(\tilde{\theta}_1-\varphi)}\rangle\langle A_{t_k}e^{i\tilde{\theta}_1}, A_{t_k}e^{i(\tilde{\theta}_1-\varphi)}|$$

L'intégrale sur θ_1, qui est aussi une intégrale sur $\tilde{\theta}_1$, fait apparaître l'état cohérent relatif $\hat{\rho}_{A_{t_k}A_{t_k}}(\varphi)$ [voir T-157] de sorte que $\hat{\rho}_{final}$ peut s'écrire

$$\hat{\rho}_{final} \propto \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi \prod_{i=1}^{k} |1+e^{i(\varphi_i-\varphi)}|^2\, \hat{\rho}_{A_{t_k}A_{t_k}}(\varphi)$$

On voit ainsi apparaître un mélange statistique d'états cohérents relatifs pour lesquels la phase relative φ n'est plus équipartie, mais répartie suivant une loi de probabilité $W(\varphi/\varphi_k \dots \varphi_2\, \varphi_1)$ proportionnelle à

$$\prod_{i=1}^{k} |1+e^{i(\varphi_i-\varphi)}|^2 = \prod_{i=1}^{k} 4\cos^2\frac{\varphi_i-\varphi}{2}$$
$$= \prod_{i=1}^{k} 2\left[1+\cos(\varphi_i-\varphi)\right]$$

Distribution $W(\varphi/\varphi_k \dots \varphi_1)$ de phase relative après k détections en $\varphi_1 \dots \varphi_k$

T-168

Les calculs précédents montrent que, après k détections en $x_1 = \varphi_1/2\pi \dots x_k = \varphi_k/2\pi$, la phase relative φ, initialement équipartie, devient distribuée suivant la loi

$$W(\varphi/\varphi_k \dots \varphi_1) = \mathcal{N} \prod_{i=1}^{k} \left[1+\cos(\varphi_i-\varphi)\right]$$

où $\mathcal{N}$ est un coefficient de normalisation

$$\mathcal{N} = \int_0^{2\pi} d\varphi \prod_{i=1}^{k} \left[1+\cos(\varphi_i-\varphi)\right]$$

Probabilité $p(x_{k+1}/x_k \dots x_1)$ de détecter un atome en x_{k+1} après en avoir détecté un en x_1, ... un en x_k

Après la suite de détections en $x_1, x_2 \dots x_k$, l'opérateur densité du système est l'opérateur $\hat{\rho}_{final}$ écrit en T-167

La probabilité de détecter un atome en x_{k+1} est donc égale à

$$p(x_{k+1}/x_k \dots x_1) = \Gamma\, \mathrm{Tr}\, \hat{\rho}_{final}\, \hat{\psi}^+(x_{k+1})\, \hat{\psi}(x_{k+1})$$