VI - 8

Evolution en l'absence d'interactions

$$\hat{\rho}(t) = e^{-i\hat{H}t/\hbar}\,\hat{\rho}(0)\,e^{i\hat{H}t/\hbar}$$ T-181

$\hat{H}$: Hamiltonien en l'absence d'interactions

$$\hat{H} = \hat{H}_1 + \hat{H}_2 = \varepsilon_0(\hat{N}_1 + \hat{N}_2)$$

ε_0 : Energie de l'état fondamental de l'hamiltonien à 1 particule (ε_0 est identique pour les 2 condensats)

$$G^{(1)}(\vec{r}_1,\vec{r}_2,t) = \psi_1^*(\vec{r}_1)\,\psi_2(\vec{r}_2)\ \times$$
$$\mathrm{Tr}\left\{e^{-i\hat{H}t/\hbar}\,\hat{\rho}(0)\,e^{i\hat{H}t/\hbar}\,\hat{a}^+_{\psi_1}\,\hat{a}_{\psi_2}\right\}$$
$$= \mathrm{Tr}\Big\{\hat{\rho}(0)\underbrace{e^{i\hat{H}t/\hbar}\hat{a}^+_{\psi_1}e^{-i\hat{H}t/\hbar}}_{\hat{a}^+_{\psi_1}e^{i\varepsilon_0 t/\hbar}}\underbrace{e^{i\hat{H}t/\hbar}\hat{a}_{\psi_2}e^{-i\hat{H}t/\hbar}}_{\hat{a}_{\psi_2}e^{-i\varepsilon_0 t/\hbar}}\Big\}$$

$$G^{(1)}(\vec{r}_1,\vec{r}_2,t) = \psi_1^*(\vec{r}_1)\,\psi_2(\vec{r}_2)\,\mathrm{Tr}\{\hat{\rho}(0)\,\hat{a}^+_{\psi_1}\hat{a}_{\psi_2}\}$$
$$= \bar{N}\,\psi_1^*(\vec{r}_1)\,\psi_2(\vec{r}_2)$$

En l'absence d'interactions, $G^{(1)}(\vec{r}_1,\vec{r}_2,t)$ n'évolue donc pas et la phase relative ne se brouille pas

Evolution en présence d'interactions

On a toujours T-182

$$\hat{\rho}(t) = e^{-i\hat{H}t/\hbar}\,\hat{\rho}(0)\,e^{i\hat{H}t/\hbar}$$
$$\hat{H} = \hat{H}_1 + \hat{H}_2$$

$$G^{(1)}(\vec{r}_1,\vec{r}_2,t) = \psi_1^*(\vec{r}_1)\,\psi_2(\vec{r}_2)\ \times$$
$$\mathrm{Tr}\{\hat{\rho}(0)\,\hat{a}^+_{\psi_1}(t)\,\hat{a}_{\psi_2}(t)\}$$
$$\hat{a}^+_{\psi_1}(t) = e^{i\hat{H}_1 t/\hbar}\,\hat{a}^+_{\psi_1}\,e^{-i\hat{H}_1 t/\hbar}$$
$$\hat{a}_{\psi_2}(t) = e^{i\hat{H}_2 t/\hbar}\,\hat{a}_{\psi_2}\,e^{-i\hat{H}_2 t/\hbar}$$

Mais maintenant l'énergie d'un état $|N_1\rangle$ du condensat 1 n'est plus égale à $N_1\varepsilon_0$. A cause des interactions, c'est une fonction $E(N_1)$ qui n'est plus linéaire en N_1, mais contient des termes quadratiques

On n'a donc plus une seule fréquence d'évolution dans la dépendance temporelle de $\hat{a}^+_{\psi_1}(t)$ et $\hat{a}_{\psi_2}(t)$

Discussion qualitative du brouillage

T-183

Les seuls éléments de matrice non nuls de $\hat{a}_{\psi_2}$ sont entre $|N_2\rangle$ et $\langle N_2-1|$

Les fréquences de Bohr apparaissant dans l'évolution de $\hat{a}_{\psi_2}(t)$ sont donc toutes les fréquences $[E(N_2)-E(N_2-1)]/\hbar$, quand N_2 varie dans un intervalle de largeur $\sqrt{\bar{N}}$ autour de $\bar{N}$. Comme $E(N)$ n'est plus une fonction linéaire de N, ces fréquences vont être légèrement différentes les unes des autres et s'étendre sur un intervalle de largeur $\Delta\omega$

Au bout d'un temps $1/\Delta\omega$, les battements entre ces diverses fréquences vont amortir $G^{(1)}(\vec{r}_1,\vec{r}_2,t)$

Par ailleurs, comme N est discret, les différentes fréquences vont être séparées par des intervalles $\delta\omega$ à peu près égaux et il y aura donc des récurrences au bout d'un temps $1/\delta\omega$

Etude quantitative

T-184

Expression de $E_1(N)$ et $E_2(N)$

$$E_1(N) = E_1(\bar{N}) + \underbrace{\frac{dE_1(N)}{dN}\Big|_{N=\bar{N}}}_{\mu_1(\bar{N})=\mu_1}(N-\bar{N}) + \underbrace{\frac{1}{2}\frac{d^2E(N)}{dN^2}\Big|_{N=\bar{N}}}_{\frac{1}{2}\mu_1'(\bar{N})=\frac{1}{2}\mu_1'}(N-\bar{N})^2$$

Expression analogue pour $E(N_2)$

On suppose $E_1(\bar{N}) = E_2(\bar{N}) = \bar{E}$

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu \qquad \mu_1' = \mu_2' = \mu'$$

$$E_1(N) = \bar{E} + \mu(N-\bar{N}) + \tfrac{1}{2}\mu'(N-\bar{N})^2$$
$$E_2(N) = \bar{E} + \mu(N-\bar{N}) + \tfrac{1}{2}\mu'(N-\bar{N})^2$$

Calcul de $\hat{a}^+_{\psi_1}(t) = e^{i\hat{H}_1 t/\hbar}\,\hat{a}^+_{\psi_1}\,e^{-i\hat{H}_1 t/\hbar}$

Les seuls éléments de matrice non nuls de $\hat{a}^+_{\psi_1}$ sont entre $|N\rangle$ et $\langle N+1|$

$$\langle N+1|\hat{a}^+_{\psi_1}(t)|N\rangle = e^{i[E(N+1)-E(N)]t/\hbar}\sqrt{N+1}$$
$$= e^{i\mu t/\hbar}\,e^{\frac{i}{2}\mu'\big[\underbrace{(N+1-\bar{N})^2-(N-\bar{N})^2}_{2N+1-2\bar{N}}\big]t/\hbar}\sqrt{N+1}$$
$$= e^{i[\mu-(\bar{N}-\frac{1}{2})\mu']t/\hbar}\,e^{i\mu' N t/\hbar}\sqrt{N+1}$$
$$= e^{i[\mu-(\bar{N}-\frac{1}{2})\mu']t/\hbar}\,\langle N+1|\,\hat{a}^+_{\psi_1}\,e^{i\mu'\hat{N}_1 t/\hbar}\,|N\rangle$$