

19.10.99

III - 1

Propriétés de cohérence d'un condensat (suite et fin)

6 - Fluctuations du nombre N_0 de particules condensées

T-61 à T-66

- Calcul de la dispersion ΔN_0 sur N_0 en l'absence d'interactions
Description du condensat par un état de Fock
Description grand canonique
- Prise en compte des interactions

7 - Quelques études expérimentales des fonctions de corrélation d'un condensat

T-67 à T-76

- Energie libérée après expansion balistique du condensat
- Taux de collisions inélastiques à 3 corps
Expérience de Boulder
- Corrections liées aux interactions

Phase relative de 2 condensats

1 - Introduction

T-77 à T-80

2 - Etats de phase relative $|N, \varphi\rangle$

T-81 à T-86

- Définition.
- Propriétés.
- Mélanges statistiques d'états $|N, \varphi\rangle$ correspondant à des phases relatives différentes
- Conclusion - Variable conjuguée de φ

3 - Etats cohérents relatifs $\hat{P}_{RB}(\varphi)$

T-87 à T-91

- Définition.
- Expression.
- Lien avec les états de phase relative.
- Mélange statistique d'états cohérents relatifs.

Fluctuations du nombre N_0 de particules condensées

T-61

$$\Delta N_0^2 = \langle \hat{N}_0^2 \rangle - \langle \hat{N}_0 \rangle^2$$

Comparaison des résultats obtenus pour ΔN_0^2 avec 2 descriptions différentes du condensat

① Description par un état de Fock $|N_0\rangle$

$$\hat{N}_0 = \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0$$

$$\langle \hat{N}_0^2 \rangle = \langle N_0 | \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0 \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0 | N_0 \rangle$$

$$= \langle \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0 \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0 + \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0 \rangle$$

$$= N_0(N_0 - 1) + N_0 = N_0^2$$

$$\langle \hat{N}_0 \rangle = \langle N_0 | \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0 | N_0 \rangle = N_0$$

$$\langle \hat{N}_0 \rangle^2 = N_0^2$$

$$\hookrightarrow \Delta N_0 = 0$$

Résultat évident a priori

Si l'état du condensat est décrit par un état de Fock, N_0 est fixé et ne fluctue pas

② Description grand canonique

T-62

$$\langle \hat{N}_0^2 \rangle = \text{Tr} \{ \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0 \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0 \hat{\rho} \}$$

Utilisation du théorème de Wick

$$\langle \hat{N}_0^2 \rangle = \text{Tr} \{ (\hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0 \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0 + \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0) \hat{\rho} \}$$

$$\langle \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0 \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0 \rangle = \langle \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0 \rangle \langle \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0 \rangle + \langle \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0 \rangle \langle \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0 \rangle$$

$$= 2 \langle \hat{N}_0 \rangle^2$$

$$\hookrightarrow \Delta N_0^2 = \langle \hat{N}_0^2 \rangle - \langle \hat{N}_0 \rangle^2$$

$$= \langle \hat{N}_0 \rangle^2 + \langle \hat{N}_0 \rangle^2$$

$$\Delta N_0^2 = \langle \hat{N}_0 \rangle (\langle \hat{N}_0 \rangle + 1)$$

$$\text{Si } \langle \hat{N}_0 \rangle \gg 1$$

$$\Delta N_0 \simeq \langle \hat{N}_0 \rangle$$

Fluctuations très importantes du nombre de particules condensées

Distribution des valeurs possibles du nombre de particules condensées

T-63

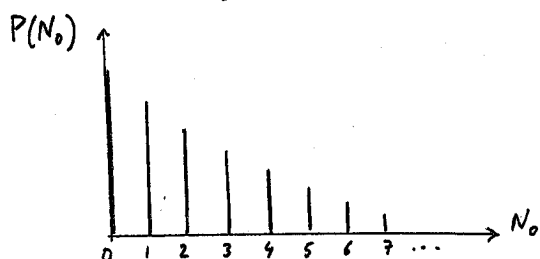
$$\hat{\rho} = \frac{1}{Z_G} \exp \{ -\beta (\hat{H} - \mu \hat{N}) \}$$

En l'absence d'interactions, l'opérateur densité grand canonique et la grande fonction de partition Z_G se factorisent

$$\hat{\rho} = \prod_{\text{états individuels } k} \frac{1}{Z_G^k} e^{-\beta \hat{N}_k (E_k - \mu)}$$

Etat fondamental E_0

$$P(N_0) = \frac{1}{Z_G^0} e^{-\beta N_0 (E_0 - \mu)}$$



Distribution exponentielle

C'est la valeur $N_0 = 0$ qui est la plus probable !

Prise en compte des interactions dans le condensat avec une théorie de champ moyen (Ref. 1)

T-64

Pour $T \ll T_c$, on peut décrire le condensat par un opérateur densité

$$\hat{\rho}_0 = \frac{1}{Z_G^0} \sum_{N_0} e^{-\beta [E(N_0) - \mu N_0]} |N_0\rangle \langle N_0|$$

où $E(N_0)$ n'est plus simplement égal à $E_0 N_0$, mais tient compte des interactions, ce qui fait apparaître dans $E(N_0)$ des termes quadratiques en N_0

Valeur la plus probable $\bar{N}_0$ de N_0

C'est la valeur qui minimise $E(N_0) - \mu N_0$

$$\frac{\partial}{\partial N_0} [E(N_0) - \mu N_0]_{N_0 = \bar{N}_0} = 0$$

$$\hookrightarrow \mu = \left. \frac{d}{dN_0} E(N_0) \right|_{N_0 = \bar{N}_0}$$

Développement de $e^{-\beta L^3 \epsilon(N_0) - \mu N_0}$ au voisinage de $\bar{N}_0$

T-65

$$-\beta [E(N_0) - \mu N_0] \approx -\beta [E(\bar{N}_0) - \mu \bar{N}_0] + \text{Terme d'ordre 1} - \frac{\beta}{2} (N_0 - \bar{N}_0)^2 \left[\frac{d^2}{dN_0^2} E(N_0) \right]_{N_0=\bar{N}_0}$$

= 0 par définition de $\bar{N}_0$

Pour un gaz de bosons dans une boîte L^3 (système homogène)

$$\mu(N_0) = g \rho = g \frac{N_0}{L^3}$$

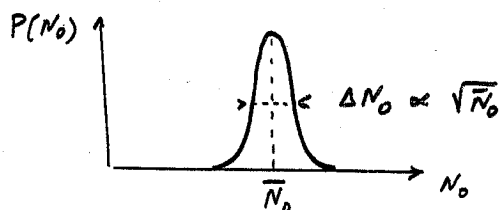
$$\left[\frac{d^2}{dN_0^2} E(N_0) \right]_{N_0=\bar{N}_0} = \left[\frac{d}{dN_0} \mu(N_0) \right]_{N_0=\bar{N}_0} = \frac{g}{L^3}$$

On en déduit

$$P(N_0) \propto e^{-\frac{1}{2} \frac{\beta g}{L^3} (N_0 - \bar{N}_0)^2}$$

Distribution Gaussienne (et non plus exponentielle) centrée autour d'une valeur moyenne non nulle $\bar{N}_0$ et de largeur

$$\Delta N_0 \approx \sqrt{\frac{L^3}{\beta g}} = \sqrt{\frac{L^3}{\bar{N}_0} \frac{\bar{N}_0}{\beta g}} = \sqrt{\bar{N}_0} \sqrt{\frac{k_B T}{\rho g}}$$



T-66

Conclusions

L'effet des interactions, pris en compte avec une simple théorie de champ moyen, réduit les fluctuations du nombre de particules condensées

- La valeur la plus probable $\bar{N}_0$ de N_0 n'est plus nulle
- La largeur ΔN_0 de la distribution n'est plus proportionnelle à $\langle N_0 \rangle$ mais à $\sqrt{\bar{N}_0}$

Un tel résultat justifie l'utilisation de l'ensemble grand canonique pour décrire les expériences actuelles de condensation de Bose-Einstein d'atomes ultrafroids

Quelques études expérimentales des fonctions de corrélation $G^{(1)}, G^{(2)}, G^{(3)}$ pour des condensats de Bose-Einstein

Fonction $G^{(1)}$

T-67

Contraste des franges d'interférence observées dans la zone de recouvrement de 2 condensats (ou de 2 faisceaux atomiques issus de 2 points différents d'un même condensat)

Etude abordée ultérieurement après la discussion de la phase relative de 2 condensats

Fonction $G^{(2)}$

Intervient dans l'énergie d'interaction mesurable sur l'énergie libérée après expansion balistique du condensat

Fonction $G^{(3)}$

Intervient dans l'expression du taux de collisions inélastiques à 3 corps

Mesure de $G^{(2)}$

T-68

Energie libérée après expansion balistique du condensat (voir T-13)

$$E_{libérée} = E_{inter}^{avant}$$

Expression de E_{inter}

$$E_{inter} = \frac{1}{2} \iint d^3r d^3r' \langle \hat{\psi}^\dagger(\vec{r}) \hat{\psi}^\dagger(\vec{r}') V(\vec{r}-\vec{r}') \hat{\psi}(\vec{r}') \hat{\psi}(\vec{r}) \rangle$$

$$= \frac{1}{2} \iint d^3r d^3r' V(\vec{r}-\vec{r}') G^{(2)}(\vec{r}, \vec{r}')$$

$$V(\vec{r}-\vec{r}') = \frac{4\pi\hbar^2}{m} \delta(\vec{r}-\vec{r}')$$

$$E_{inter} = \frac{2\pi\hbar^2}{m} a \int d^3r G^{(2)}(\vec{r}, \vec{r})$$

$$g^{(2)}(\vec{r}, \vec{r}) = \frac{G^{(2)}(\vec{r}, \vec{r})}{G^{(1)}(\vec{r}, \vec{r}) G^{(1)}(\vec{r}, \vec{r})} = \frac{G^{(2)}(\vec{r}, \vec{r})}{[\rho(\vec{r})]^2}$$

$$\hookrightarrow E_{inter} = \frac{2\pi\hbar^2}{m} a \int d^3r [\rho(\vec{r})]^2 g^{(2)}(\vec{r}, \vec{r})$$

- Pour un condensat

$$g^{(2)}(\vec{r}, \vec{r}) = 1 \quad (\text{voir T-37})$$

- Pour un nuage thermique

$$g^{(2)}(\vec{r}, \vec{r}) = 2 \quad (\text{voir T-57})$$

Principe de l'étude expérimentale

(voir Ref. 2)

T-69

- On mesure $E_{\text{libérée}}$ et $p(\vec{r})$
- On connaît par ailleurs a
- La comparaison du résultat mesuré pour $E_{\text{libérée}}$ et de l'expression théorique donnée en T- permet de déterminer si $g^{(2)}(\vec{r}, \vec{r})$ est égal à 1 ou 2

Résultats (voir Ref. 2)

(Na) $a = (52 \pm 5)a_0 \rightarrow g^{(2)}(\vec{r}, \vec{r}) = 1.25 \pm 0.58$

$a = (42 \pm 15)a_0 \rightarrow g^{(2)}(\vec{r}, \vec{r}) = 0.81 \pm 0.29$

(Rb) $g^{(2)}(\vec{r}, \vec{r}) = 1.0 \pm 0.2$

Tous ces résultats obtenus avec des condensats sont compatibles avec $g^{(2)}(\vec{r}, \vec{r}) = 1$ et excluent la possibilité $g^{(2)}(\vec{r}, \vec{r}) = 2$

Expériences faites sur des jets atomiques thermiques

(voir Ref. 3)

Corrélations temporelles (et non plus spatiales)

On trouve dans ce cas $g^{(2)}(t, t) = 2$

Expérience de coïncidences temporelles sur un jet d'atomes de Neon métastables

T-70

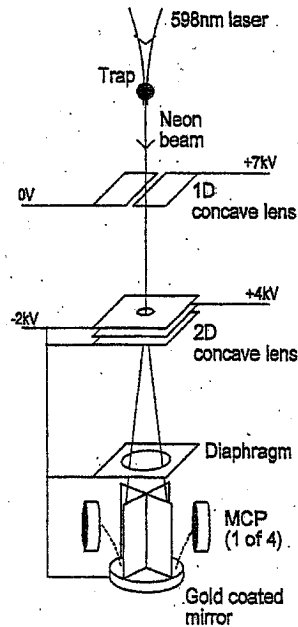
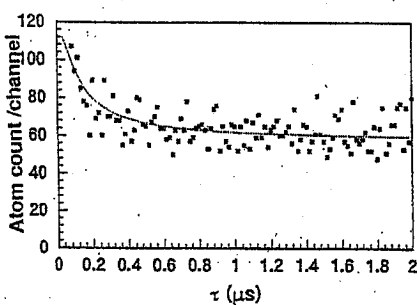


Figure extraite de la Ref. 3

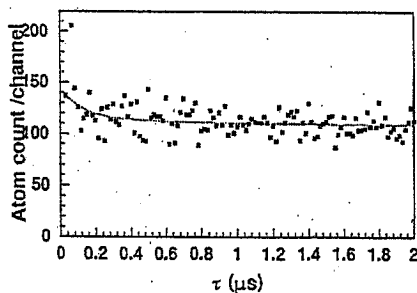
Résultats expérimentaux

T-71

- (a) Surface du détecteur < aire de cohérence
- (b) Surface du détecteur > aire de cohérence



(a)



(b)

Figure extraite de la Ref. 3

Mesure de $G^{(3)}$

T-72

Principe

- A densité suffisamment élevée, les pertes d'atomes dans un condensat sont dues essentiellement à des collisions inélastiques à 3 corps
- Pour qu'une collision à 3 corps se produise, 3 atomes doivent s'approcher suffisamment près l'un de l'autre. Le taux de collisions à 3 corps doit donc faire intervenir $G^{(3)}(\vec{r}, \vec{r}, \vec{r})$
- Or, la fonction de corrélation normalisée $g^{(3)}(\vec{r}, \vec{r}, \vec{r})$ n'a pas la même valeur pour un condensat et un nuage thermique
- Condensat $g^{(3)}(\vec{r}, \vec{r}, \vec{r}) = 1$ (Voir T-37)
- Nuage thermique $g^{(3)}(\vec{r}, \vec{r}, \vec{r}) = 3! = 6$ (Voir T-59)
- On peut donc utiliser $g^{(3)}$ comme indicateur de la condensation (Voir Ref. 4)
- Une mesure récente de $g^{(3)}$ a été réalisée sur des atomes ^{87}Rb (Voir Ref. 5)

Variations de $g^{(3)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3)$ avec $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$

pour un nuage thermique

T-73

$$x = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1| \quad y = |\vec{r}_3 - \vec{r}_1| \quad \lambda_d = \lambda_T$$

Courbe b : Coupe le long du plan $x=y$

Courbe c : Coupe le long du plan $\frac{x}{\lambda_d} = 2$

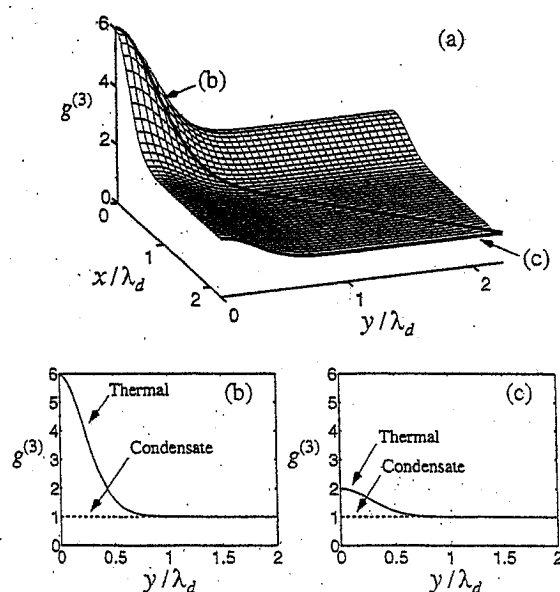


Figure extraite de la Ref. 5

Détermination du taux de collisions inélastiques

T-74

- Aux temps longs (donc aux N faibles), $\ln N$ décroît linéairement avec t . Pertes dues aux collisions avec le gaz résiduel.
- Les déviations aux temps petits (donc aux N grands) sont dues aux collisions inélastiques entre atomes piégés.

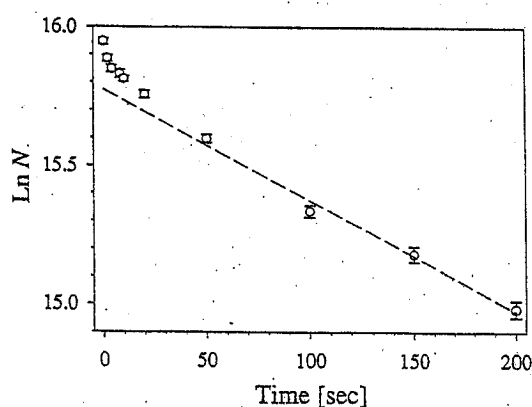


Figure extraite de la Ref. 5

Détermination expérimentale de $g^{(3)}$

T-75

$$\left(\frac{dN}{dt}\right)_{\text{à 3 corps}}^{\text{inel}} = -K \int d^3r n^3(\vec{r}, t)$$

K est proportionnel à $g^{(3)}(\vec{r}, \vec{r}, \vec{r})$

$$\ln\left(\frac{N(t)}{N(0)}\right)_{\text{à 3 corps}}^{\text{inel}} = -K \int_0^t dt' \int_V d^3r \frac{n^3(\vec{r}, t')}{N(t')} = -K \int_0^t dt' \langle n^3(\vec{r}, t') \rangle$$

La pente de la courbe donnant $\ln\left(\frac{N(t)}{N(0)}\right) + \frac{t}{\tau}$ en fonction de $\int_0^t dt' \langle n^3(\vec{r}, t') \rangle$ est proportionnelle à K donc à $g^{(3)}(\vec{r}, \vec{r}, \vec{r})$

Rapport mesuré des 2 pentes : 7.4 ± 2.6

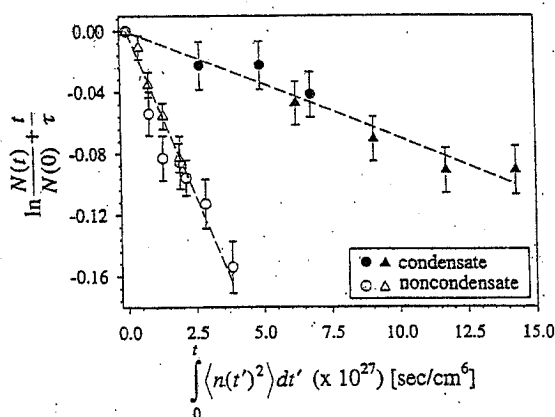


Figure extraite de la Ref. 5

Corrections sur $g^{(2)}$ et $g^{(3)}$ liées aux interactions

T-76

- Les valeurs $g^{(2)}(\vec{r}, \vec{r}) = 1$ pour un condensat et $g^{(2)}(\vec{r}, \vec{r}) = 2$ pour un nuage thermique ont été établies en négligeant les interactions. Idem pour $g^{(3)}$.
- En présence d'interactions, $G^{(2)}(\vec{r}, \vec{r}')$ tend vers 0 quand $|\vec{r} - \vec{r}'| \rightarrow 0$ à cause du cœur dur répulsif de $V(\vec{r} - \vec{r}')$ qui empêche les 2 atomes d'être au même point (voir T-17). De même, $G^{(3)}(\vec{r}, \vec{r}', \vec{r}'')$ doit s'annuler quand $\vec{r}'$ et $\vec{r}''$ tendent vers $\vec{r}$.
- Si le gaz est suffisamment dilué, le "trou" de $G^{(2)}$ et $G^{(3)}$ au voisinage de l'origine introduit des corrections faibles qui peuvent être négligées.
- Le comportement de $G^{(2)}$ et $G^{(3)}$ en dehors de ce trou, mais suffisamment près de lui, décrit les corrélations spatiales entre atomes qui sont sur le point d'entrer en collision.

Phase relative de 2 condensats

Problèmes abordés dans ce cours

T-77

- La phase absolue d'un condensat n'a pas de sens physique
- De même qu'on peut donner un sens physique à la différence de phase entre 2 points d'un même condensat, on peut donner un sens à la différence de phase entre 2 condensats différents
- Peut-on introduire des états dérivant 2 condensats ayant une phase relative φ bien définie? Quels sont les plus commodes à utiliser?
- Quelle est la variable conjuguée de φ ?

Autre problème abordé ultérieurement

Comment une phase relative peut-elle apparaître entre 2 condensats indépendants?

Situations analogues pour des atomes

1^{er} type de situation

T-79

Couplage radiofréquence ou optique (Raman, Bragg) entre un condensat piégé dans un puits et un état non piégé.

Obtention d'un faisceau d'atomes avec une phase relative bien définie par rapport au condensat

"Output coupler" pour un laser à atomes

2^{ème} type de situation

2 condensats indépendants

On coupe brusquement les potentiels de piégeage et on laisse les condensats se recouvrir après une période d'expansion balistique

Peut-on observer des franges?

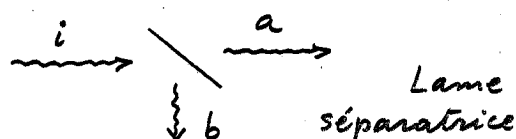
Dans quelles conditions?

Phase relative de 2 faisceaux lumineux

1^{er} type de situation

T-78

2 faisceaux différents préparés à partir du même faisceau



Même si la phase absolue n'est pas définie, la phase relative de a et b est bien définie

2^{ème} type de situation

Utilisation de 2 faisceaux indépendants



Peut-on observer des franges d'interférence dans la zone d'intersection?
Sous quelles conditions?

Etats de phase relative φ

T-80

Définition

- Etats faisant intervenir 2 "modes" (du champ ou d'un système atomique)
- Obtenus à partir d'un état de Fock $|N\rangle$ du mode en faisant subir à chaque boson l'effet d'une lame séparatrice ou celui d'une impulsion RF ou optique qui prépare chaque boson dans une superposition linéaire bien définie de $|a\rangle$ et $|b\rangle$

Etat avec un nombre total de bosons bien défini et avec une phase relative bien définie entre les 2 modes

Problèmes abordés

- Expression mathématique d'un tel état
- Quelle est la variable conjuguée de φ ?

Notation

$|N, \varphi\rangle$ N : Nombre total de bosons
 φ : Phase relative

T-81

Etat à 1 particule

Il est commode d'utiliser l'écriture en seconde quantification pour assurer automatiquement la symétrisation

$$|1, \varphi\rangle = \hat{C}^+ |0\rangle \quad |0\rangle: \text{Vide}$$

$$\hat{C}^+ = \alpha \hat{a}^+ + \beta e^{-i\varphi} \hat{b}^+$$

$\hat{a}^+ (\hat{b}^+)$: Opérateurs création d'un boson dans l'état $|a\rangle$ ($|b\rangle$)

$\hat{C}^+$: Opérateur création d'un boson dans l'état $\alpha|a\rangle + \beta e^{-i\varphi}|b\rangle$

(On suppose α et β réels et $\alpha^2 + \beta^2 = 1$)

Etat à N particules

$$|N, \varphi\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}} (\hat{C}^+)^N |0\rangle =$$

$$\frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{n=0}^N \frac{N!}{n!(N-n)!} \alpha^{N-n} \beta^n e^{-in\varphi} (\hat{a}^+)^{N-n} (\hat{b}^+)^n |0\rangle$$

$$\frac{1}{\sqrt{(N-n)!} \sqrt{n!}} |n_a = N-n, n_b = n\rangle$$

Propriété des états $|N, \varphi\rangle$

T-82

$$|N, \varphi\rangle = \sum_{n=0}^N \frac{N!}{(N-n)! n!} \alpha^{N-n} \beta^n e^{-in\varphi} |n_a = N-n, n_b = n\rangle$$

- L'état $|N, \varphi\rangle$ ne se factorise pas en un produit d'un état du mode a par un état du mode b ("entangled state")
- Le nombre total de particules $N = n_a + n_b$ est bien défini, mais le nombre n_a de particules dans le mode a, et n_b dans le mode b ne sont pas bien définis

Caractérisation de la distribution des valeurs possibles de n_a et n_b

$$\hat{N}_a = \hat{a}^+ \hat{a} \quad \hat{N}_b = \hat{b}^+ \hat{b}$$

Opérateurs nombres de particules dans les états $|a\rangle$ et b

- Valeurs moyennes

$$\langle \hat{N}_a \rangle \quad \langle \hat{N}_b \rangle = N - \langle \hat{N}_a \rangle$$

- Variances

$$\Delta N_a^2 = \langle \hat{N}_a^2 \rangle - \langle N_a \rangle^2 = \Delta N_b^2$$

Calcul de $\langle \hat{N}_a \rangle$ et ΔN_a

T-83

$$P(n_a) = |\langle n_a = n_a, n_b = N - n_a | N, \varphi \rangle|^2$$

$$= \frac{N!}{n_a! (N - n_a)!} (\alpha^2)^{n_a} (\beta^2)^{N - n_a}$$

Comme $\beta^2 = 1 - \alpha^2$, on trouve une distribution binomiale

$p = \alpha^2$: Probabilité de "tirer" a

$1 - p = \beta^2$: Probabilité de "tirer" b

On en déduit

$$\langle \hat{N}_a \rangle = N p = N \alpha^2$$

$$\Delta N_a^2 = N p (1 - p) = N \alpha^2 \beta^2$$

$$\hookrightarrow \Delta N_a = \alpha \beta \sqrt{N}$$

Dispersion autour de la valeur moyenne $N \alpha^2$

- grande en valeur absolue $\Delta N_a \propto \sqrt{N}$

- faible en valeur relative $\frac{\Delta N_a}{\langle N_a \rangle} \propto \frac{1}{\sqrt{N}}$

Dispersion sur $\hat{N}_a - \hat{N}_b$

$$\Delta(N_a - N_b) = \Delta N_a + \Delta N_b = 2 \Delta N_a = 2 \alpha \beta \sqrt{N}$$

Matrices densités réduites des modes

a et b dans l'état de phase $|N, \varphi\rangle$ T-84

$$\rho^{(a)} = \text{Tr}_b |N, \varphi\rangle \langle N, \varphi|$$

$$= \sum_{n_b} \langle n_b | N, \varphi \rangle \langle N, \varphi | n_b \rangle$$

$$= \sum_{n_a} \frac{N!}{n_a! (N - n_a)!} (\alpha^2)^{n_a} (\beta^2)^{N - n_a} |n_a\rangle \langle n_a|$$

$$= \sum_{n_a} P(n_a) |n_a\rangle \langle n_a|$$

$$P(n_a) = \frac{N!}{(N - n_a)! n_a!} (\alpha^2)^{n_a} (1 - \alpha^2)^{N - n_a}$$

Mélange statistique d'états où n_a a une valeur bien définie avec des poids $P(n_a)$

Pas de cohérences entre n_a et $n'_a \neq n_a$

On a de même

$$\rho^{(b)} = \text{Tr}_a |N, \varphi\rangle \langle N, \varphi|$$

$$= \sum_{n_b} \varphi(n_b) |n_b\rangle \langle n_b|$$

$$\varphi(n_b) = \frac{N!}{n_b! (N - n_b)!} (\beta^2)^{n_b} (\alpha^2)^{N - n_b}$$

Mélanges statistiques d'états $|N, \varphi\rangle$ correspondant à des phases φ différentes

$$\hat{\rho} = \int d\varphi W(\varphi) |N, \varphi\rangle \langle N, \varphi| \quad \text{T-85}$$

 $W(\varphi)$: Distribution de probabilité de φ

$$\hat{\rho} = \sum_{n=0}^N \sum_{n'=0}^N \sqrt{\frac{N!}{(N-n)!n!}} \sqrt{\frac{N!}{(N-n')!n'!}} \alpha^{N-n} \alpha^{N-n'} \beta^n \beta^{n'}$$

$$\left[\int_0^{2\pi} d\varphi W(\varphi) e^{i(n'-n)\varphi} \right] |n_a=N-n, n_b=n\rangle \langle n_a=N-n', n_b=n'|$$

Cas d'une phase équipartie entre 0 et 2π

$$W(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi e^{i(n'-n)\varphi} = \delta_{nn'}$$

$$\hat{\rho} = \sum_{n=0}^N \frac{N!}{(N-n)!n!} (\alpha^2)^{N-n} (\beta^2)^n |N-n, n\rangle \langle N-n, n|$$

Mélange statistique de produits d'états de Fock $|n_a\rangle |n_b\rangle$, où n_a et n_b ont des valeurs bien définies (avec $n_a + n_b = N$)

Pas de cohérences entre états $|n_a\rangle |n_b\rangle$ et $|n'_a\rangle |n'_b\rangle$ avec $n'_a \neq n_a$, alors que de telles cohérences existent dans l'état $|N, \varphi\rangle$

Etats cohérents relatifs T-87

Description de 2 condensats par 2 états cohérents

$$|A e^{i\varphi_a}\rangle = e^{-A^2/2} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{A^N}{\sqrt{N!}} e^{iN\varphi_a} |N\rangle$$

$$|B e^{i\varphi_b}\rangle = e^{-B^2/2} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{B^N}{\sqrt{N!}} e^{iN\varphi_b} |N\rangle$$

 A et B : Amplitudes réelles φ_a et φ_b : Phases absolues de chaque condensat $\varphi = \varphi_a - \varphi_b$: Phase relative

φ_a et φ_b n'ont pas séparément de sens physique

Définition d'un état cohérent relatif

Mélange statistique de produits d'états cohérents

$$|A e^{i\varphi_a}\rangle \otimes |B e^{i(\varphi_a - \varphi)}\rangle$$

où la phase relative φ est fixée
et où la phase absolue φ_a est équipartie entre 0 et 2π

Cas général

$$K(n'-n) = \int_0^{2\pi} d\varphi W(\varphi) e^{i(n'-n)\varphi} \quad \text{T-86}$$

$K(n'-n)$ est une fonction de $n'-n$ d'autant plus étroite que $W(\varphi)$ est large.

Conclusion

$$\varphi \text{ bien définie} \rightarrow \Delta(\hat{N}_a - \hat{N}_b) \propto \sqrt{N}$$

$$\varphi \text{ équipartie entre 0 et } 2\pi \rightarrow \Delta(\hat{N}_a - \hat{N}_b) = 0$$

Cas général $\rightarrow \Delta(\hat{N}_a - \hat{N}_b)$ d'autant plus grand que $\Delta\varphi$ est plus petit

C'est $\hat{N}_a - \hat{N}_b$ qui apparaît en quelque sorte comme la variable conjuguée de la phase relative φ

Expression de l'état cohérent relatifnoté $\hat{\rho}_{AB}(\varphi)$ T-88

$$\hat{\rho}_{AB}(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi_a \times$$

$$\times |A e^{i\varphi_a}\rangle \langle A e^{i\varphi_a}| \otimes |B e^{i(\varphi_a - \varphi)}\rangle \langle B e^{i(\varphi_a - \varphi)}|$$

Eléments de matrice de $\hat{\rho}_{AB}(\varphi)$ dans la base $\{|n_a, n_b\rangle\}$

$$\langle n_a, n_b | \hat{\rho}_{AB}(\varphi) | n'_a, n'_b \rangle =$$

$$e^{-(A^2+B^2)} \frac{A^{(n_a+n_b)} B^{(n'_b+n'_a)}}{\sqrt{n_a!} \sqrt{n'_a!} \sqrt{n_b!} \sqrt{n'_b!}} e^{i(n'_b - n_b)\varphi} \times$$

$$\times \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi_a e^{i[n_a+n_b - n'_a - n'_b]\varphi}}_{\delta(n_a+n_b - n'_a - n'_b)}$$

$\hat{\rho}_{AB}(\varphi)$ n'a d'éléments de matrice non nuls qu'entre états ayant le même nombre total de particules

$$n_a + n_b = n'_a + n'_b = N$$

$\hat{\rho}_{AB}(\varphi)$ est un mélange statistique d'états à nombre total de particules fixé

Autre écriture possible de $\hat{\rho}_{AB}(\varphi)$ [T-89]

$$\hat{\rho}_{AB}(\varphi) = \sum_N \hat{P}_N \hat{\rho}_{AB}(\varphi) \hat{P}_N$$

$\hat{P}_N$: Projecteur sur le sous-espace d'états
 $n_a + n_b = N$

L'expression précédente des éléments de matrice de $\hat{\rho}_{AB}(\varphi)$ [voir T.] permet d'écrire

$$\hat{P}_N \hat{\rho}_{AB}(\varphi) \hat{P}_N = |\chi_N\rangle \langle \chi_N|$$

$$|\chi_N\rangle = e^{-(A^2+B^2)/2} \sum_{n_a+n_b=N} \frac{A^{n_a} B^{n_b}}{\sqrt{n_a!} \sqrt{n_b!}} e^{-i n_b \varphi} |n_a, n_b\rangle$$

$$= e^{-(A^2+B^2)/2} \sum_{n=0}^N \frac{A^{(N-n)} B^n}{\sqrt{(N-n)!} \sqrt{n!}} e^{-i n \varphi} |N-n, n\rangle$$

Posons $\alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$ $\beta = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$

$$|\chi_N\rangle = e^{-(A^2+B^2)/2} \frac{(A^2+B^2)^{N/2}}{\sqrt{N!}} \times$$

$$\times \sum_{n=0}^N \sqrt{\frac{N!}{(N-n)! n!}} \alpha^{N-n} \beta^n e^{-i n \varphi} |N-n, n\rangle$$

$$= |N, \varphi\rangle \quad (\text{voir T.})$$

On voit apparaître l'état de phase relative $|N, \varphi\rangle$ correspondant à α et β

Lien entre états cohérents relatifs et états de phase relative [T-90]

$$\hat{\rho}_{AB}(\varphi) = \sum_N e^{-(A^2+B^2)} \frac{(A^2+B^2)^N}{N!} |N, \varphi\rangle \langle N, \varphi|$$

$\hat{\rho}_{AB}(\varphi)$ apparaît donc également comme un mélange statistique d'états de phase relative $|N, \varphi\rangle$ (correspondant à $\alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$ et $\beta = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$) avec une répartition des valeurs possibles de N donnée par une loi de Poisson

Les états cohérents relatifs sont plus commodes à utiliser que les états de phase relative

- L'action des opérateurs $\hat{a}$ et $\hat{b}$ sur les états cohérents est très simple
- L'évolution d'un état cohérent sous l'effet d'un processus dissipatif peut être très simple

Mélange statistique d'états cohérents relatifs [T-91]

Si la phase relative φ n'est pas bien définie, mais distribuée suivant une loi $W(\varphi)$, on peut décrire le système par

$$\hat{\rho}_{AB} = \int_0^{2\pi} d\varphi W(\varphi) \hat{\rho}_{AB}(\varphi) =$$

$$\sum_N e^{-(A^2+B^2)} \frac{(A^2+B^2)^N}{N!} \int_0^{2\pi} d\varphi W(\varphi) |N, \varphi\rangle \langle N, \varphi|$$

et utiliser les résultats obtenus plus haut pour $\int_0^{2\pi} d\varphi W(\varphi) |N, \varphi\rangle \langle N, \varphi|$ (voir T.)

En particulier, si la phase φ est équipartie entre 0 et 2π , $\hat{\rho}_{AB}$ est un mélange statistique d'états $|n_a, n_b\rangle$ où n_a et n_b ont des valeurs bien définies

Plus de cohérences entre $|n_a, n_b\rangle$ et $|n'_a, n'_b\rangle$ avec $n'_a \neq n_a, n'_b \neq n_b$

Quelques références [T-92]

- (1) - Y. Castin - Notes de cours au DEA de Physique Quantique
- (2) - W. Ketterle, H.J. Miesner
Phys. Rev. A 56, 3291 (1997)
- (3) - M. Yasuda, F. Shimizu
Phys. Rev. Lett. 77, 3090 (1996)
- (4) - Y. Kagan, B. Svistunov, G. Shlyapnikov, JETP Lett. 42, 209 (1985)
- (5) - E. Burt, R. Ghrist, C. Myatt, M. Holland, E. Cornell, C. Wieman
Phys. Rev. Lett. 79, 337 (1997)