Notation

T-81

$|N,\varphi\rangle$ N : Nombre total de bosons
φ : Phase relative

Etat à 1 particule

Il est commode d'utiliser l'écriture en seconde quantification pour assurer automatiquement la symétrisation

$$|1,\varphi\rangle = \hat{c}^+|0\rangle \qquad |0\rangle : \text{Vide}$$

$$\hat{c}^+ = \alpha\,\hat{a}^+ + \beta e^{-i\varphi}\,\hat{b}^+$$

$\hat{a}^+(\hat{b}^+)$: Operateurs création d'un boson dans l'état $|a\rangle$ ($|b\rangle$)

$\hat{c}^+$: Opérateur création d'un boson dans l'état $\alpha|a\rangle + \beta e^{-i\varphi}|b\rangle$

(On suppose α et β réels et $\alpha^2+\beta^2=1$)

Etat à N particules

$$|N,\varphi\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}}(\hat{c}^+)^N|0\rangle =$$

$$\frac{1}{\sqrt{N!}}\sum_{n=0}^{N}\frac{N!}{n!(N-n)!}\alpha^{N-n}\beta^n e^{-in\varphi}\underbrace{(\hat{a}^+)^{N-n}(\hat{b}^+)^n|0\rangle}_{\sqrt{(N-n)!}\sqrt{n!}\,|n_a=N-n,\,n_b=n\rangle}$$

Propriété des états $|N,\varphi\rangle$

T-82

$$|N,\varphi\rangle = \sum_{n=0}^{N}\sqrt{\frac{N!}{(N-n)!\,n!}}\,\alpha^{N-n}\beta^n e^{-in\varphi}|n_a=N-n,\, n_b=n\rangle$$

- L'état $|N,\varphi\rangle$ ne se factorise pas en un produit d'un état du mode a par un état du mode b ("entangled state")
- Le nombre total de particules $N=n_a+n_b$ est bien défini, mais le nombre n_a de particules dans le mode a, et n_b dans le mode b ne sont pas bien définis

Caractérisation de la distribution des valeurs possibles de n_a et n_b

$$\hat{N}_a = \hat{a}^+\hat{a} \qquad \hat{N}_b = \hat{b}^+\hat{b}$$

Opérateurs nombres de particules dans les états $|a\rangle$ et b

- Valeurs moyennes

$$\langle\hat{N}_a\rangle \qquad \langle\hat{N}_b\rangle = N - \langle\hat{N}_a\rangle$$

- Variances

$$\Delta N_a^2 = \langle\hat{N}_a^2\rangle - \langle N_a\rangle^2 = \Delta N_b^2$$

Calcul de $\langle\hat{N}_a\rangle$ et ΔN_a

T-83

$$P(n_a) = |\langle n_a=n_a,\, n_b=N-n_a|N,\varphi\rangle|^2$$

$$= \frac{N!}{n_a!(N-n_a)!}(\alpha^2)^{n_a}(\beta^2)^{N-n_a}$$

Comme $\beta^2=1-\alpha^2$, on trouve une distribution binomiale

$p=\alpha^2$: Probabilité de "tirer" a
$1-p=\beta^2$: Probabilité de "tirer" b

On en déduit

$$\langle\hat{N}_a\rangle = Np = N\alpha^2$$

$$\Delta N_a^2 = Np(1-p) = N\alpha^2\beta^2$$

$$\hookrightarrow \quad \Delta N_a = \alpha\beta\sqrt{N}$$

Dispersion autour de la valeur moyenne $N\alpha^2$

- grande en valeur absolue $\Delta N_a \propto \sqrt{N}$
- faible en valeur relative $\dfrac{\Delta N_a}{\langle N_a\rangle} \propto \dfrac{1}{\sqrt{N}}$

Dispersion sur $\hat{N}_a - \hat{N}_b$

$$\Delta(N_a-N_b) = \Delta N_a + \Delta N_b = 2\Delta N_a = 2\alpha\beta\sqrt{N}$$

Matrices densités réduites des modes a et b dans l'état de phase $|N,\varphi\rangle$

T-84

$$\rho^{(a)} = \mathrm{Tr}_b\,|N,\varphi\rangle\langle N,\varphi|$$

$$= \sum_{n_b}\langle n_b|N,\varphi\rangle\langle N,\varphi|n_b\rangle$$

$$= \sum_{n_a}\frac{N!}{(N-n_a)!\,n_a!}(\alpha^2)^{n_a}(\beta^2)^{N-n_a}|n_a\rangle\langle n_a|$$

$$= \sum_{n_a}P(n_a)\,|n_a\rangle\langle n_a|$$

$$P(n_a) = \frac{N!}{(N-n_a)!\,n_a!}(\alpha^2)^{n_a}(1-\alpha^2)^{N-n_a}$$

Mélange statistique d'états où n_a a une valeur bien définie avec des poids $P(n_a)$

Pas de cohérences entre n_a et $n'_a \neq n_a$

On a de même

$$\rho^{(b)} = \mathrm{Tr}_a\,|N,\varphi\rangle\langle N,\varphi|$$

$$= \sum_{n_b}\mathcal{P}(n_b)\,|n_b\rangle\langle n_b|$$

$$\mathcal{P}(n_b) = \frac{N!}{n_b!(N-n_b)!}(\beta^2)^{n_b}(\alpha^2)^{N-n_b}$$