Condensat dans un piège harmonique

$V_{ext}(\vec{r}) = \frac{1}{2} m \omega_0^2 r^2$

$\sigma = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_0}}$ = Largeur de l'état fondamental

Ordres de grandeur

R : Rayon du condensat

$w = \frac{R}{\sigma}$

$E_{cin} \simeq N \hbar \omega_0 \frac{1}{w^2}$

$E_{piège} \simeq N \hbar \omega_0 w^2$

$E_{inter} \simeq N \hbar \omega_0 \frac{1}{w^3} \chi$

Paramètre $\chi = \frac{aN}{\sigma}$

$\chi \gg 1$ Interactions fortes

$\chi \ll 1$ Interactions faibles

Un condensat stable existe si $E(w) = E_{cin} + E_{piège} + E_{inter}$ passe par un minimum quand w croît de 0 à $+\infty$

Longueur de diffusion $a > 0$

$E(w)$ a toujours un minimum

$\chi \ll 1$ $\quad w_{min} \simeq 1$ $\quad R \simeq \sigma$

$\chi \gg 1$ $\quad w_{min} \propto \chi^{1/5}$ $\quad R \simeq \sigma \chi^{1/5} \gg \sigma$

Le condensat "gonfle" sous l'effet des répulsions entre atomes

Point important : Les interactions peuvent jouer un rôle important même si le milieu est dilué

$\ell = R N^{-1/3}$ Distance entre atomes

$\frac{a}{\ell} = \frac{a}{R} N^{1/3} < \frac{a}{\sigma} N^{1/3}$ car $R \geqslant \sigma$

$\chi = \frac{aN}{\sigma}$

Comme $N \gg 1$, on peut avoir à la fois

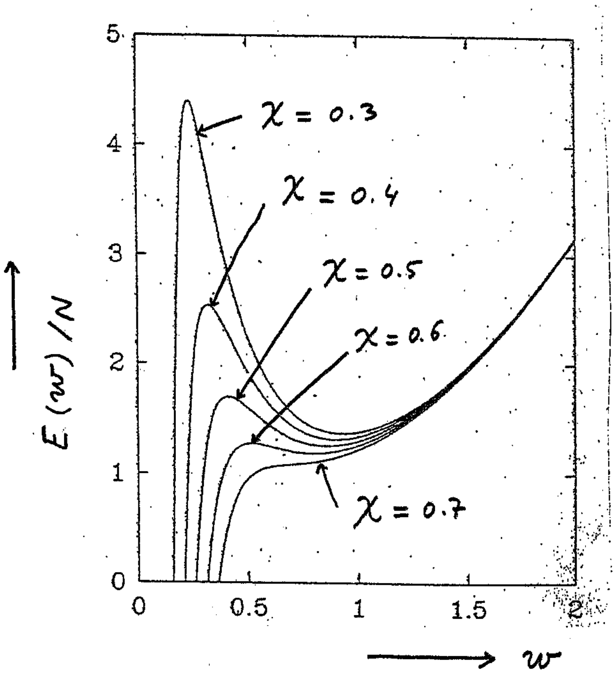
$\frac{a}{\ell} \ll 1$ Milieu dilué

$\chi \gg 1$ Interactions fortes

Exemple $\quad \frac{a}{\sigma} = 10^{-4}$ $\quad N = 10^6$

$\frac{a}{\ell} < 10^{-2} \ll 1$ $\qquad \frac{aN}{\sigma} = 10^2 \gg 1$

Longueur de diffusion $a < 0$



$E(w)$ n'a de minimum que pour $\chi < \chi_{crit}$

Limite de Thomas - Fermi

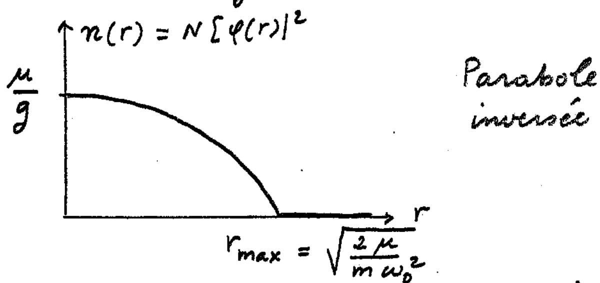
$a > 0 \qquad \chi \gg 1$

Le terme d'énergie cinétique est négligé dans l'équation de G.P. qui devient

$\frac{1}{2} m \omega_0^2 r^2 \varphi(\vec{r}) + N g |\varphi(\vec{r})|^2 \varphi(\vec{r}) = \mu \varphi(\vec{r})$

Comme $\varphi(\vec{r})$ est réel, on en déduit

$[\varphi(\vec{r})]^2 = \frac{1}{gN} \left[\mu - \frac{1}{2} m \omega_0^2 r^2 \right]$



Expression de μ $\quad$ (à partir de $\int d^3r\, \varphi^2(r) = 1$)

$\mu = \frac{\hbar\omega_0}{2} \left(15 \frac{aN}{\sigma} \right)^{2/5} = \frac{\hbar \omega_0}{2} (15 \chi)^{2/5} \gg \hbar\omega_0$

$\mu = \frac{\partial E(N)}{\partial N} \rightarrow E(N) = \frac{\hbar\omega_0}{2} \left(\frac{15a}{\sigma} \right)^{2/5} \frac{N^{7/5}}{7/5}$

$\frac{E(N)}{N} = \frac{5}{7} \mu$