T-17

Depletion quantique de l'état fondamental

Nouvel état fondamental $|\psi_0\rangle$

Vide pour les $\hat{b}_k$: $\hat{b}_k|\psi_0\rangle = 0 \quad \forall\, k \neq 0$

$$N - N_0 = \sum_{k\neq 0} \langle \psi_0 | \hat{a}_k^+ \hat{a}_k | \psi_0 \rangle$$

On reexprime $\hat{a}_k$ et $\hat{a}_k^+$ en fonction des $\hat{b}_k$ et $\hat{b}_k^+$ et on utilise $\hat{b}_k|\psi_0\rangle = 0$

$$\frac{N-N_0}{N} = \frac{8}{3\sqrt{\pi}}\,(\rho a^3)^{1/2}$$

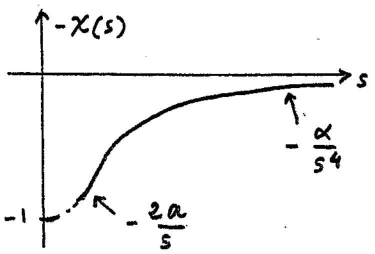
Paramètre infiniment petit de la théorie de Bogolubov : ρa^3

Densité à 2 corps $\rho_{II}(\vec{r},\vec{r}\,')$

$$\rho_{II}(\vec{r},\vec{r}\,') = \rho^2\left[1 - \chi(s)\right] \qquad s = |\vec{r}-\vec{r}\,'|$$

$$\chi(\vec{s}) = \frac{1}{\rho}\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3k\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{s}}\left[\frac{k/k_0}{\sqrt{(k/k_0)^2+2}} - 1\right]$$

$k_0 = \frac{1}{\xi_0}$



T-18

Equation de Gross-Pitaevskii dépendant du temps

Expériences où l'on fait varier $V_{ext}(\vec{r})$ au cours du temps (modulation, coupure brusque du piège ...)

Méthode variationnelle

- L'équation de Schrödinger satisfaite par la fonction d'onde exacte $\psi(\vec{r}_1,\dots\vec{r}_N,t)$ peut être déduite d'un principe de moindre action à partir d'une action S
- On se restreint au sous-espace des fonctions d'onde produits
$$\varphi(\vec{r}_1,t)\,\varphi(\vec{r}_2,t)\,\dots\,\varphi(\vec{r}_N,t)$$
et on minimise S à l'intérieur de ce sous-espace
- La meilleure fonction d'onde à une particule dépendant du temps $\varphi(\vec{r},t)$ obéit à :

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\varphi(\vec{r},t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V_{ext}(\vec{r},t)\right]\varphi(\vec{r},t) + Ng\,|\varphi(\vec{r},t)|^2\,\varphi(\vec{r},t)$$

T-19

Limite des faibles excitations

$$V_{ext}(\vec{r},t) = V_0(\vec{r}) + \delta V(\vec{r},t)$$
$$\delta V \ll V_0$$

Linéarisation de l'équation de G.P. dépendant du temps pour φ voisin de la solution $\varphi_0(\vec{r})e^{-i\mu t/\hbar}$ correspondant à $\delta V = 0$

$$\varphi(\vec{r},t) = \tilde{\varphi}(\vec{r},t)\,e^{-i\mu t/\hbar}$$
$$\tilde{\varphi}(\vec{r},t) = \varphi_0(\vec{r}) + \delta\varphi(\vec{r},t)$$

On obtient alors pour $\delta\varphi$ et $\delta\varphi^*$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\delta\varphi\\ \delta\varphi^*\end{pmatrix} = \mathcal{L}_{GP}\begin{pmatrix}\delta\varphi\\ \delta\varphi^*\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\delta V\,\varphi_0\\ -\delta V\,\varphi_0^*\end{pmatrix}$$

$$\mathcal{L}_{GP} = \begin{pmatrix} H_0 - \mu + 2Ng|\varphi_0|^2 & Ng\,\varphi_0^2 \\ -Ng\,\varphi_0^{*2} & -(H_0-\mu+2Ng|\varphi_0|^2)\end{pmatrix}$$

$$H_0 = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V_0(\vec{r})$$

Obtention à partir de cette équation des fréquences des modes propres de vibration comme solutions d'une équation aux valeurs propres.

T-20

Réécriture de l'équation de G-P sous une forme équivalente

- Normalisation choisie pour $\varphi(\vec{r},t)$
$$\int d^3r\,|\varphi(\vec{r},t)|^2 = N$$
$$|\varphi(\vec{r},t)|^2 = \rho(\vec{r},t) = \text{Densité de particules}$$
- Module et phase de $\varphi(\vec{r},t)$
$$\varphi(\vec{r},t) = \sqrt{\rho(\vec{r},t)}\;e^{iS(\vec{r},t)}$$
- Champ de vitesses $\vec{v}(\vec{r},t)$
$$\vec{v}(\vec{r},t) = \frac{\hbar}{m}\vec{\nabla}S(\vec{r},t)$$

A partir de l'équation de G-P dépendant du temps, on déduit alors 2 équations

① Equation de continuité

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{v}) = 0$$

② Equation du mouvement de $\vec{v}(\vec{r},t)$

$$m\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} = \vec{\nabla}\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{\sqrt{\rho}}\Delta\sqrt{\rho} - \frac{1}{2}mv^2 - V_{ext} - \rho g\right]$$