

Réponse d'un condensat à divers types d'excitations

Expériences envisagées

On envoie une particule (atome, photon...) sur le condensat, et on observe comment elle est diffusée par le condensat.

On sonde ainsi les propriétés du condensat : structure spatiale, spectre d'excitations élémentaires, durées de vie de ces excitations...

Généralité d'une telle méthode

Importance des expériences de diffusion (neutrons, rayonnement synchrotron...) pour l'investigation des propriétés d'un système à N corps.

Les divers régimes

- Régime linéaire
- Régime non linéaire

Régime linéaire

Excitation suffisamment faible pour que la réponse du condensat puisse être analysée perturbativement.

Chaque processus de diffusion n'influence pas les suivants.

Pas de diffusion multiple.

Chaque nouvelle particule sonde va être diffusée par un condensat non perturbé.

Régime non linéaire

Les excitations élémentaires créées dans le condensat par une particule sonde vivent assez longtemps pour influencer les diffusions suivantes .

Corrélations entre les diffusions successives.

Apparition de phénomènes collectifs : superradiance, amplification...

Fonctions importantes caractérisant le régime linéaire

Facteur de structure dynamique $S(\vec{q}, \omega)$

$\hbar\vec{q}$: Transfert d'impulsion

$\hbar\omega$: Transfert d'énergie

de la particule sonde vers le condensat lors de la diffusion.

$S(\vec{q}, \omega)$ caractérise l'aptitude du condensat à absorber cette impulsion et cette énergie.

$S(\vec{q}, \omega)$ dépend uniquement des propriétés du système des N atomes du condensat, et non du potentiel d'interaction entre ces atomes et la particule sonde.

$S(\vec{q}, \omega)$ décrit l'effet des interférences entre les amplitudes de diffusion provenant des divers atomes du condensat.

$S(\vec{q}, \omega)$ caractérise en fait les fluctuations spatio-temporelles du condensat.

Facteur de structure statique $S(\vec{q})$

$$S(\vec{q}) = \frac{1}{N} \int d\omega S(\vec{q}, \omega)$$

Si l'on peut négliger les variations de $|\vec{q}|$ sur l'étendue des variations de ω , $S(\vec{q})$ caractérise la section efficace de diffusion du condensat dans la direction de \vec{q} , indépendamment de ω .

Fonction de réponse linéaire $\chi_{BA}(t)$

Caractérise la réponse du condensat observée sur la grandeur B du condensat quand ce dernier est soumis à une perturbation proportionnelle à la grandeur A .

Polarisabilité dynamique $\tilde{\chi}_{BA}(\omega)$

Caractérise la réponse de B à une perturbation sinusoïdale de fréquence ω sur la grandeur A .

Densités spatiales à un et deux corps

Importance de ces observables

Grandeurs du condensat couplées couplées à l'excitation qui les sonde.

Expression en première quantification

Densité spatiale à un corps

$$\hat{\rho}_I(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N \delta(\vec{r} - \hat{r}_i)$$

$\langle \hat{\rho}_I(\vec{r}) \rangle$ est la densité de probabilité de trouver un atome quelconque au point \vec{r} .

Densité spatiale à deux corps

$$\hat{\rho}_{II}(\vec{r}, \vec{r}') = \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i} \delta(\vec{r} - \hat{r}_i) \delta(\vec{r}' - \hat{r}_j)$$

$\langle \hat{\rho}_{II}(\vec{r}, \vec{r}') \rangle$ est la densité de probabilité de trouver un atome quelconque en \vec{r} et un autre atome en \vec{r}' .

Exemples de problèmes où apparaît la densité spatiale à un corps

Exemple 1

Diffusion d'une particule sonde, de position \vec{R} , interagissant avec les atomes du condensat, de positions \vec{r}_i , par un potentiel $U(\vec{R} - \hat{\vec{r}}_i)$ dépendant de $\vec{R} - \hat{\vec{r}}_i$.

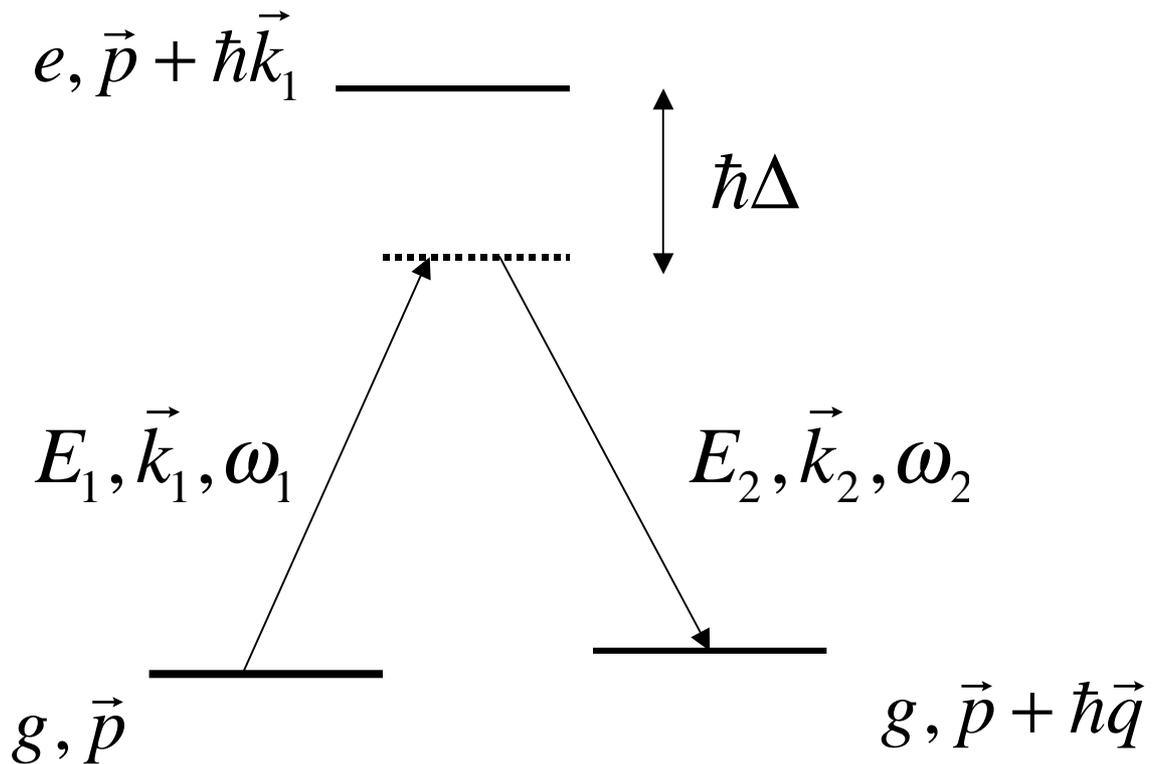
Hamiltonien d'interaction

$$\begin{aligned}\hat{H}_{\text{int}} &= \sum_{i=1}^N U(\vec{R} - \hat{\vec{r}}_i) \\ &= \int d^3 r U(\vec{R} - \vec{r}) \sum_{i=1}^N \delta(\vec{r} - \hat{\vec{r}}_i) \\ &= \int d^3 r U(\vec{R} - \vec{r}) \hat{\rho}_I(\vec{r})\end{aligned}$$

Exemple 2 : Diffusion de Bragg

Absorption d'un photon \vec{k}_1, ω_1 .

Emission stimulée d'un photon \vec{k}_2, ω_2



$$\vec{q} = \vec{k}_1 - \vec{k}_2 \quad \omega = \omega_1 - \omega_2 \quad |\omega| \ll \Delta$$

$$\frac{DE_1}{\hbar} = \Omega_1 \quad \frac{DE_2}{\hbar} = \Omega_2$$

D : Moment dipolaire électrique e-g

Ω_1, Ω_2 : Fréquences de Rabi

Amplitude du processus Raman

$$\begin{aligned} & \frac{DE_1}{2} \exp i(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \omega_1 t) \frac{1}{\hbar \Delta} \frac{DE_2}{2} \exp -i(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \omega_2 t) \\ &= \frac{\hbar \omega_R}{2} \exp i(\vec{q} \cdot \vec{r} - \omega t) \end{aligned}$$

ω_R : Fréquence de Rabi effective du processus Raman stimulé.

$$\frac{\hbar \omega_R}{2} = \frac{DE_1}{2} \frac{1}{\hbar \Delta} \frac{DE_2}{2} = \frac{\hbar^2 \Omega_1 \Omega_2}{4 \hbar \Delta}$$

$$\omega_R = \Omega_1 \Omega_2 / 2 \Delta$$

Hamiltonien d'interaction

$$\begin{aligned} \hat{H}_{\text{int}} &= \frac{\hbar \omega_R}{2} \sum_{i=1}^N \exp i(\vec{q} \cdot \hat{r}_i - \omega t) + h.c. \\ &= \frac{\hbar \omega_R}{2} \int d^3 r \exp i(\vec{q} \cdot \vec{r} - \omega t) \sum_{i=1}^N \delta(\vec{r} - \hat{r}_i) + h.c. \\ &= \frac{\hbar \omega_R}{2} \int d^3 r \exp i(\vec{q} \cdot \vec{r} - \omega t) \hat{\rho}_I(\vec{r}) + h.c. \end{aligned}$$

Conclusions tirées de ces 2 exemples

Les interactions avec une particule sonde (atome, photon...) sont locales : elles ne dépendent que des positions \vec{r}_i des atomes du condensat.

Toute interaction locale est décrite par un Hamiltonien d'interaction où apparaît la densité spatiale à un corps $\hat{\rho}_I(\vec{r})$, ou sa transformée de Fourier spatiale.

Récapitulation

Exemple 1

$$\hat{H}_{\text{int}} = \int d^3r U(\vec{R} - \vec{r}) \hat{\rho}_I(\vec{r})$$

Exemple 2

$$\hat{H}_{\text{int}} = \frac{\hbar\omega_R}{2} e^{-i\omega t} \int d^3r e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} \hat{\rho}_I(\vec{r}) + h.c.$$

Transformée de Fourier de $\hat{\rho}_I(\vec{r})$

Base d'ondes planes avec des conditions aux limites périodiques dans un cube de côté L .

$$\hat{\rho}_I(\vec{k}) = \hat{\rho}_{\vec{k}} = \int d^3r e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \hat{\rho}_I(\vec{r})$$

$$\hat{\rho}_I(\vec{r}) = \frac{1}{L^3} \sum_{\vec{k}} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \hat{\rho}_{\vec{k}}$$

De $\hat{\rho}_I(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N \delta(\vec{r} - \hat{\vec{r}}_i)$, on déduit :

$$\hat{\rho}_{\vec{k}} = \sum_{i=1}^N \exp(i\vec{k}\cdot\hat{\vec{r}}_i)$$
$$\hat{\rho}_{\vec{k}}^+ = \sum_{i=1}^N \exp(-i\vec{k}\cdot\hat{\vec{r}}_i) = \hat{\rho}_{-\vec{k}}$$

Pour l'exemple 2, \hat{H}_{int} s'écrit :

$$\hat{H}_{\text{int}} = \frac{\hbar\omega_R}{2} \sum_{i=1}^N \exp i(\vec{q}\cdot\hat{\vec{r}}_i - \omega t) + h.c.$$
$$= \frac{\hbar\omega_R}{2} \left[\hat{\rho}_{\vec{q}} e^{-i\omega t} + \hat{\rho}_{\vec{q}}^+ e^{+i\omega t} \right]$$

Seconde quantification

Base d'états individuels

$$\{|\varphi_\alpha\rangle\} \quad \langle\varphi_\beta|\varphi_\alpha\rangle = \delta_{\beta\alpha}$$

Espace de Fock

Base $\{|n_1, n_2, \dots, n_\alpha, \dots\rangle\}$ définie par les nombre d'occupation $n_1, n_2, \dots, n_\alpha, \dots$ des états $|\varphi_1\rangle, |\varphi_2\rangle, \dots, |\varphi_\alpha\rangle, \dots$

Pour des bosons, $n_\alpha = 0, 1, 2, \dots$

Vide de particules : $|0\rangle = |0_1, 0_2, \dots, 0_\alpha, \dots\rangle$

Opérateurs de création et d'annihilation

\hat{a}_α^+ crée un boson dans l'état $|\varphi_\alpha\rangle$

\hat{a}_α détruit un boson dans l'état $|\varphi_\alpha\rangle$

Relations de commutation

$$[\hat{a}_\alpha, \hat{a}_\beta^+] = \delta_{\alpha\beta}$$

Opérateurs champ

Changement de base

$$\{|\varphi_\alpha\rangle\} \rightarrow \{|\vec{r}\rangle\}$$

$$|\vec{r}\rangle = \sum_{\alpha} |\varphi_\alpha\rangle \langle \varphi_\alpha | \vec{r}\rangle = \sum_{\alpha} \varphi_\alpha^*(\vec{r}) |\varphi_\alpha\rangle$$

Introduction des opérateurs champ

$$\hat{\Psi}^+(\vec{r}) = \sum_{\alpha} \varphi_\alpha^*(\vec{r}) \hat{a}_\alpha^+$$

$$\hat{\Psi}(\vec{r}) = \sum_{\alpha} \varphi_\alpha(\vec{r}) \hat{a}_\alpha$$

$\hat{\Psi}^+(\vec{r})$ agissant sur le vide donne l'état à une particule :

$$\sum_{\alpha} \varphi_\alpha^*(\vec{r}) |1_\alpha\rangle = \sum_{\alpha} \varphi_\alpha^*(\vec{r}) |\varphi_\alpha\rangle = |\vec{r}\rangle$$

$\hat{\Psi}^+(\vec{r})$ crée un boson au point \vec{r}

$\hat{\Psi}(\vec{r})$ détruit un boson au point \vec{r}

De $[\hat{a}_\alpha, \hat{a}_\beta^+] = \delta_{\alpha\beta}$, on déduit :

$$[\hat{\Psi}(\vec{r}), \hat{\Psi}^+(\vec{r}')] = \delta(\vec{r} - \vec{r}')$$

Observables

Observables symétriques à une particule

$$\hat{F} = \sum_{i=1}^N \hat{f}(i)$$

$$\hat{F} = \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \langle \varphi_{\beta} | \hat{f} | \varphi_{\alpha} \rangle \hat{a}_{\beta}^+ \hat{a}_{\alpha}$$

Observables symétriques à deux particules

$$\hat{G} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i} \hat{g}(i, j)$$

$$\hat{G} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \sum_{\gamma} \sum_{\delta} \hat{a}_{\delta}^+ \hat{a}_{\gamma}^+ \hat{a}_{\beta} \hat{a}_{\alpha}$$

$$\langle \varphi_{\delta}(1) \varphi_{\gamma}(2) | \hat{g}(1, 2) | \varphi_{\beta}(2) \varphi_{\alpha}(1) \rangle$$

On pourrait aussi utiliser la base $\{ | \vec{r} \rangle \}$ et les opérateurs champ $\hat{\Psi}$ et $\hat{\Psi}^+$

Expression de $\hat{\rho}_I(\vec{r})$ et $\hat{\rho}_{II}(\vec{r}, \vec{r}')$ en seconde quantification

$$\begin{aligned}\hat{\rho}_I(\vec{r}) &= \sum_{i=1}^N \delta(\vec{r} - \hat{r}_i) \\ &= \hat{\Psi}^+(\vec{r})\hat{\Psi}(\vec{r})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{\rho}_{II}(\vec{r}, \vec{r}') &= \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i} \delta(\vec{r} - \hat{r}_i) \delta(\vec{r}' - \hat{r}_j) \\ &= \hat{\Psi}^+(\vec{r})\hat{\Psi}^+(\vec{r}')\hat{\Psi}(\vec{r}')\hat{\Psi}(\vec{r})\end{aligned}$$

Relation entre $\hat{\rho}_I(\vec{r})$ et $\hat{\rho}_{II}(\vec{r}, \vec{r}')$

En utilisant les relations de commutation entre $\hat{\Psi}^+$ et $\hat{\Psi}$, on obtient :

$$\hat{\rho}_{II}(\vec{r}, \vec{r}') = \hat{\rho}_I(\vec{r})\hat{\rho}_I(\vec{r}') - \delta(\vec{r} - \vec{r}')\hat{\rho}_I(\vec{r})$$

Expression de $\hat{\rho}_{\vec{q}}$

Première quantification

$$\hat{\rho}_{\vec{q}} = \sum_{i=1}^N e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}_i}$$

Deuxième quantification

En utilisant la base $\{|\vec{k}\rangle\}$ des ondes planes $L^{-3/2} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}$, on obtient :

$$\hat{\rho}_{\vec{q}} = \sum_{\vec{k}} \sum_{\vec{k}'} \hat{a}_{\vec{k}'}^+ \hat{a}_{\vec{k}} \langle \vec{k}' | e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}} | \vec{k} \rangle$$

$$\langle \vec{k}' | e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}} | \vec{k} \rangle = \frac{1}{L^3} \underbrace{\int d^3 r e^{i[\vec{k} + \vec{q} - \vec{k}'] \cdot \vec{r}}}_{L^3 \delta_{\vec{k}', \vec{k} + \vec{q}}} = \delta_{\vec{k}', \vec{k} + \vec{q}}$$

$$\hat{\rho}_{\vec{q}} = \sum_{\vec{k}} \hat{a}_{\vec{k} + \vec{q}}^+ \hat{a}_{\vec{k}}$$

Une propriété importante de $\hat{\rho}_{\vec{q}}$

$\hat{\rho}_{\vec{q}}$ est un opérateur de translation globale du système de bosons d'une quantité $\hbar\vec{q}$ dans l'espace des impulsions.

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^N \hat{p}_i$$

$$\hat{\rho}_{\vec{q}} = \sum_{i=1}^N e^{i\vec{q} \cdot \hat{r}_i}$$

$$[\vec{P}, \hat{\rho}_{\vec{q}}] = \hbar\vec{q} \sum_{i=1}^N e^{i\vec{q} \cdot \hat{r}_i} = \hbar\vec{q} \hat{\rho}_{\vec{q}}$$

$$\hat{P} \hat{\rho}_{\vec{q}} = \hat{\rho}_{\vec{q}} \left(\hat{P} + \hbar\vec{q} \right)$$

Agissant sur un état d'impulsion globale \vec{p} du système de bosons, $\hat{\rho}_{\vec{q}}$ crée un nouvel état d'impulsion $\vec{p} + \hbar\vec{q}$.