Quelques rappels sur les condensats

- Description en termes de champ moyen
- Longueurs caractéristiques
- Différents régimes
- Nuage thermique
- Comment sonder le condensat
- Modes de vibration du condensat sphérique
- Problèmes physiques

Condensation de Bose-Einstein pour un gaz parfait

N bosons confinés dans un piège harmonique

(Fréquences de vibration $\omega_{0x}, \omega_{0y}, \omega_{0z}$)

Température critique T_C

$$k_B T_C = 0.94\ \hbar \bar{\omega}_0\ N^{1/3} \qquad (1.1)$$

$$\bar{\omega}_0^3 = \omega_{0x}\,\omega_{0y}\,\omega_{0z} \qquad (1.2)$$

Pour $T < T_C$, un nombre macroscopique de bosons se condense dans l'état fondamental du piège

$$N \gg 1 \quad \rightarrow \quad k_B T_C \gg \hbar \bar{\omega}_0$$

La condensation n'est pas un effet thermique trivial

Bosons en interaction

Hamiltonien H

$$H = \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{\vec{p}_i^{\,2}}{2m} + V_{\text{ext}}(\vec{r}_i) \right] + \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} V(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) \qquad (1.3)$$

$$V(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) = g\, \delta(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \qquad (1.4)$$

$$g = \frac{4\pi\hbar^2}{m} a \qquad (1.5)$$

a : Longueur de diffusion

$g\,\delta(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)$: pseudopotentiel

Etat fondamental de H

Approximation par un état produit où tous les bosons sont dans le même état φ

$$|\psi\rangle = |\varphi(1)\rangle |\varphi(2)\rangle \ldots\ldots |\varphi(N)\rangle \qquad (1.6)$$

Quel est le meilleur état φ?

Equation de Gross-Pitaevskii

Meilleur φ : celui qui minimise $\langle\psi|H|\psi\rangle / \langle\psi|\psi\rangle$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V_{\text{ext}}(\vec{r})\right]\varphi(\vec{r}) + (N-1)\,g\,|\varphi(\vec{r})|^2\,\varphi(\vec{r}) = \mu\,\varphi(\vec{r}) \qquad (1.7)$$

$\langle\varphi|\varphi\rangle = 1$ $\qquad \mu$: potentiel chimique $\qquad N - 1 \simeq N$

Chaque boson se déplace dans le potentiel de piégeage V_{ext} et dans le champ moyen créé par les N-1 autres

Equation de Gross-Pitaevskii dépendant du temps

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\varphi(\vec{r},t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V_{\text{ext}}(\vec{r},t)\right]\varphi(\vec{r},t) + N\,g\,|\varphi(\vec{r},t)|^2\,\varphi(\vec{r},t)$$

(1.8)

Linéarisation de l'équation de Gross-Pitaevskii

$$V_{\text{ext}}(\vec{r},t) = V_0(\vec{r}) + \delta V(\vec{r},t) \qquad H_0 = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V_0(\vec{r})$$

$\varphi_0(\vec{r})$: solution de l'équation de G-P pour $V_{\text{ext}}(\vec{r},t) = V_0(\vec{r})$

$$\varphi(\vec{r},t) = \tilde{\varphi}(\vec{r},t)\exp(-i\mu t/\hbar)$$

$$\tilde{\varphi}(\vec{r},t) = \varphi_0(\vec{r}) + \delta\varphi(\vec{r},t) \qquad (1.9)$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\delta\varphi \\ \delta\varphi^*\end{pmatrix} = L_{GP}\begin{pmatrix}\delta\varphi \\ \delta\varphi^*\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\delta V\,\varphi_0 \\ -\delta V\,\varphi_0^*\end{pmatrix} \qquad (1.10)$$

$$L_{GP} = \begin{pmatrix} H_0 - \mu + 2Ng\left|\varphi_0\right|^2 & N\,g\,\varphi_0^2 \\ -N\,g\,(\varphi_0^*)^2 & -(H_0 - \mu + 2Ng\left|\varphi_0\right|^2) \end{pmatrix} \qquad (1.11)$$

Equations de Bogolubov-de Gennes

Autre forme équivalente de l'équation de Gross-Pitaevskii

$$\varphi(\vec{r},t) = \sqrt{\rho(\vec{r},t)}\ \exp\left[iS(\vec{r},t)\right] \qquad (1.12)$$

$\sqrt{\rho}$: module de φ S : phase

1 – Equation de continuité

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \vec{\nabla}.\left[\rho\left(\frac{\hbar}{m}\vec{\nabla}S\right)\right] = 0 \qquad (1.13)$$

Interprétation de $(\hbar / m)\vec{\nabla}S(\vec{r},t)$ comme un champ de vitesses $\vec{v}(\vec{r},t)$

$$\vec{v}(\vec{r},t) = \frac{\hbar}{m}\vec{\nabla}S(\vec{r},t) \qquad (1.14)$$

Champ irrotationnel : $\vec{\nabla}\times\vec{v} = \vec{0}$
sauf en des singularités (vortex)

Autre forme équivalente de l'équation de Gross-Pitaevskii (suite)

2 – Equation du mouvement du champ de vitesses

$$\hbar \frac{\partial}{\partial t} S = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\sqrt{\rho}} \Delta \sqrt{\rho} - \frac{\hbar^2}{2m} \left(\vec{\nabla} S \right)^2 - V_{\text{ext}} - g\rho \qquad (1.15)$$

$$m \frac{\partial}{\partial t} \vec{v} = \vec{\nabla} \left[\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\sqrt{\rho}} \Delta \sqrt{\rho} - \frac{\hbar^2}{2m} \left(\vec{\nabla} S \right)^2 - V_{\text{ext}} - g\rho \right] \qquad (1.16)$$

Analogie avec des équations hydrodynamiques.
Ici, le comportement hydrodynamique n'est pas dû aux collisions, mais au champ moyen.

$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\sqrt{\rho}} \Delta \sqrt{\rho}$: « Terme de pression quantique »

Longueurs caractéristiques

Longueur de diffusion a

Portée des interactions

Longueur de relaxation ξ ("Healing length")

Distance ξ pour laquelle l'énergie cinétique de confinement $\hbar^2 / 2m\,\xi^2$ est de l'ordre de l'énergie d'interaction $g\rho_0\,(\rho_0 : \text{densité spatiale})$

$$\xi = \frac{\hbar}{\sqrt{2m\,g\,\rho_0}} = \frac{1}{\sqrt{8\pi\,a\,\rho_0}} \qquad (1.17)$$

Extension spatiale σ_0 de l'état fondamental du piège

$$\sigma_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\,\omega_0}} \qquad (1.18)$$

Limite de Thomas-Fermi

L'énergie cinétique de confinement dans l'état fondamental du piège est petite devant l'énergie d'interaction

$$\frac{\hbar^2}{2m\sigma_0^2} \ll g\rho_0 \simeq g\frac{N}{\sigma_0^3} = \frac{4\pi\hbar^2}{m}\frac{a\,N}{\sigma_0^3}$$

$$\frac{a\,N}{\sigma_0} \gg 1 \qquad (1.19)$$

On peut alors négliger le terme d'énergie cinétique dans l'équation de G-P.

Cette équation devient une équation algébrique.

Forme du condensat à la limite de Thomas-Fermi

Forme de paraboloïde inversé pour $\rho(\vec{r})$

$$\rho(\vec{r}) = N\left|\varphi(\vec{r})\right|^2 = \frac{1}{g}\left[\mu - \frac{1}{2}m\left(\omega_{0x}^2 x^2 + \omega_{0y}^2 y^2 + \omega_{0z}^2 z^2\right)\right] \tag{1.20}$$

Dépendances en N

- du potentiel chimique μ : $\mu \propto N^{2/5}$
- du rayon du condensat R : $R \propto N^{1/5}$

La condition $a\,N/\sigma_0 \gg 1$ définissant la limite de T-F n'est pas incompatible avec

$$a^3 \rho_0 \simeq a^3 \frac{N}{\sigma_0^3} \ll 1$$

définissant un milieu dilué.

Equations hydrodynamiques à la limite de Thomas-Fermi

On peut négliger le terme de pression quantique dans l'équation d'évolution de $\vec{v}$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0 & \text{(1.21 a)} \\ m \dfrac{\partial}{\partial t} \vec{v} + \vec{\nabla} \left[\dfrac{1}{2} m \vec{v}^2 + V_{\text{ext}} + g \rho \right] = \vec{0} & \text{(1.21 b)} \end{cases}$$

La seconde équation à la forme de l'équation d'Euler de l'hydrodynamique

$$m \frac{\partial}{\partial t} \vec{v} + \vec{\nabla} \frac{1}{2} m \vec{v}^2 = m \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{v} = m \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d} t} \vec{v}$$

Le nuage thermique

Ordre de grandeur des dimensions

$$m\,\omega_0^2 R_{\text{th}}^2 \simeq k_B T \quad \to \quad R_{\text{th}}^2 \simeq \frac{k_B T}{m\,\omega_0^2}$$

Pour $T \simeq T_c$

$$R_{\text{th}}^2 \simeq \frac{k_B T_c}{m\,\omega_0^2} \simeq \frac{\hbar\,\omega_0}{m\,\omega_0^2} N^{1/3} \simeq \sigma_0^2 N^{1/3} \gg \sigma_0^2 \qquad (1.22)$$

Le rayon du condensat vaut σ_0 en l'absence d'interactions et varie en $N^{1/5}$ à la limite de T-F.

Effet du champ moyen sur le nuage thermique

En l'absence d'interaction et pour $T \simeq T_c$

L'énergie cinétique et l'énergie potentielle sont égales et de l'ordre de $k_B T_c$

$$E_0 \simeq k_B T_c \simeq \hbar\,\omega_0 N^{1/3} \simeq m\,\omega_0^2\; R_{\mathrm{th}}^2$$

L'énergie d'interaction due au champ moyen vaut

$$W \simeq g\rho \simeq g\,\frac{N}{R_{\mathrm{th}}^3}$$

Comparaison de E_0 **et** W

$$\frac{W}{E_0} \simeq \frac{gN}{m\,\omega_0^2 R_{\mathrm{th}}^5} \simeq \frac{a\,N^{1/6}}{\sigma_0} \qquad (1.23)$$

Effet du champ moyen
Récapitulation

Paramètre caractérisant l'effet du champ moyen

- sur le condensat

$$\chi_{\mathrm{cond}} = \frac{a\,N}{\sigma_0} \tag{1.24}$$

- sur le nuage thermique

$$\chi_{\mathrm{th}} = \frac{a\,N^{1/6}}{\sigma_0} \tag{1.25}$$

On peut avoir simultanément

$$\chi_{\mathrm{cond}} \gg 1 \qquad\qquad \chi_{\mathrm{th}} \ll 1 \tag{1.26}$$

L 'effet du champ moyen peut être important pour le condensat tout en restant négligeable pour le nuage thermique.

Collisions entre atomes dans le nuage thermique

- Section efficace de collision

$$\sigma_{\text{coll}} = 8\pi a^2 \tag{1.26}$$

- Libre parcours moyen

$$\ell \simeq \frac{1}{\sigma\,\rho_0} \tag{1.27}$$

- Temps entre collisions

$$\tau_{\text{coll}} \simeq \frac{\ell}{v} \simeq \frac{1}{\sigma_{\text{coll}}\,\rho_0\,v} \tag{1.28}$$

- Nombre de collisions par période d'oscillation

$$\frac{1}{\omega_0 \tau_{\text{coll}}} \simeq \frac{\sigma_{\text{coll}}\,\rho_0\,v}{\omega_0} \simeq \frac{R_{\text{th}}}{\ell} \propto \left(\frac{a\,N^{1/3}}{\sigma_0}\right)^2 \tag{1.29}$$

Régime sans collision et régime hydrodynamique

Régime sans collision (balistique)

$$\omega_0 \tau_{\text{coll}} \gg 1 \qquad\qquad R_{\text{th}} \ll \ell \qquad\qquad (1.30)$$

Régime hydrodynamique

$$\omega_0 \tau_{\text{coll}} \ll 1 \qquad\qquad R_{\text{th}} \gg \ell \qquad\qquad (1.31)$$

Dans le régime hydrodynamique, un équilibre thermodynamique local peut être atteint en chaque point du nuage.

Comment sonder le condensat

1. **Diffusion d'un particule sonde**

Photon, atome, neutron (pour He liquide)

Transfert au condensat

- d'une énergie $\hbar\,\omega$
- d'une impulsion $\hbar\,\vec{q}$

Observation des variations du nombre de particules diffusées quand on fait varier ω (à direction de $\vec{q}$ fixée)

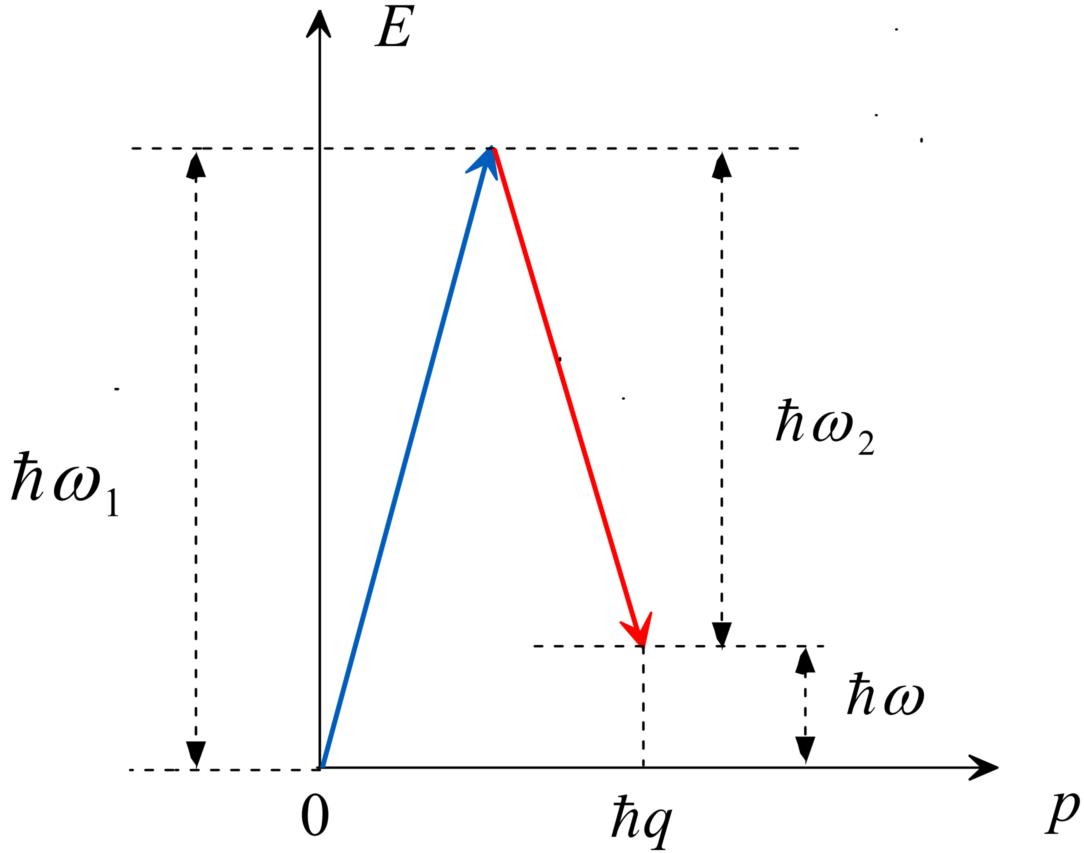
On détermine ainsi le spectre des excitations élémentaires du condensat

Facteur de structure dynamique $S(\vec{q},\omega)$

Facteur de structure statique $S(\vec{q})$

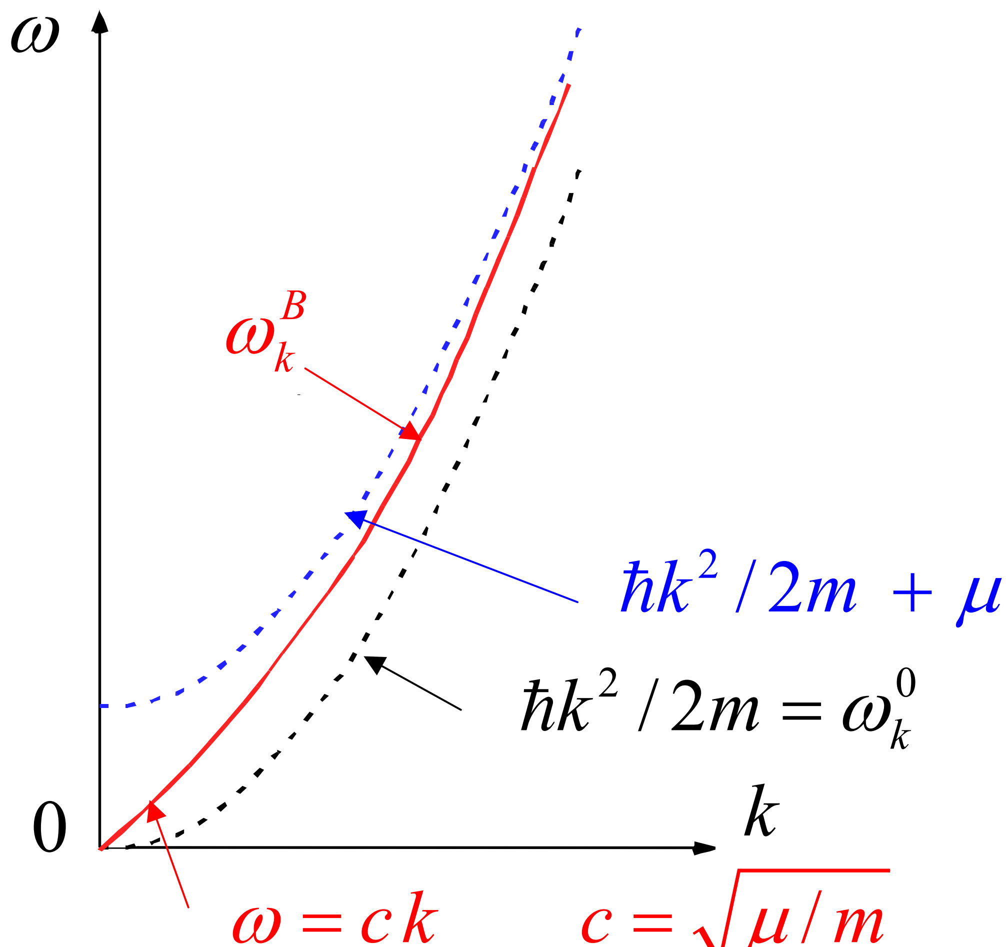
Exemple : Diffusion de Bragg

Absorption de $\vec{k}_1, \omega_1$ et émission stimulée de $\vec{k}_2, \omega_2$



Excitations élémentaires d'un condensat homogène
Théorie de Bogolubov

$$\hbar\omega_k^B = \sqrt{\hbar\omega_k^0(\hbar\omega_k^0 + 2\mu)}$$



$c = \sqrt{\mu/m}$

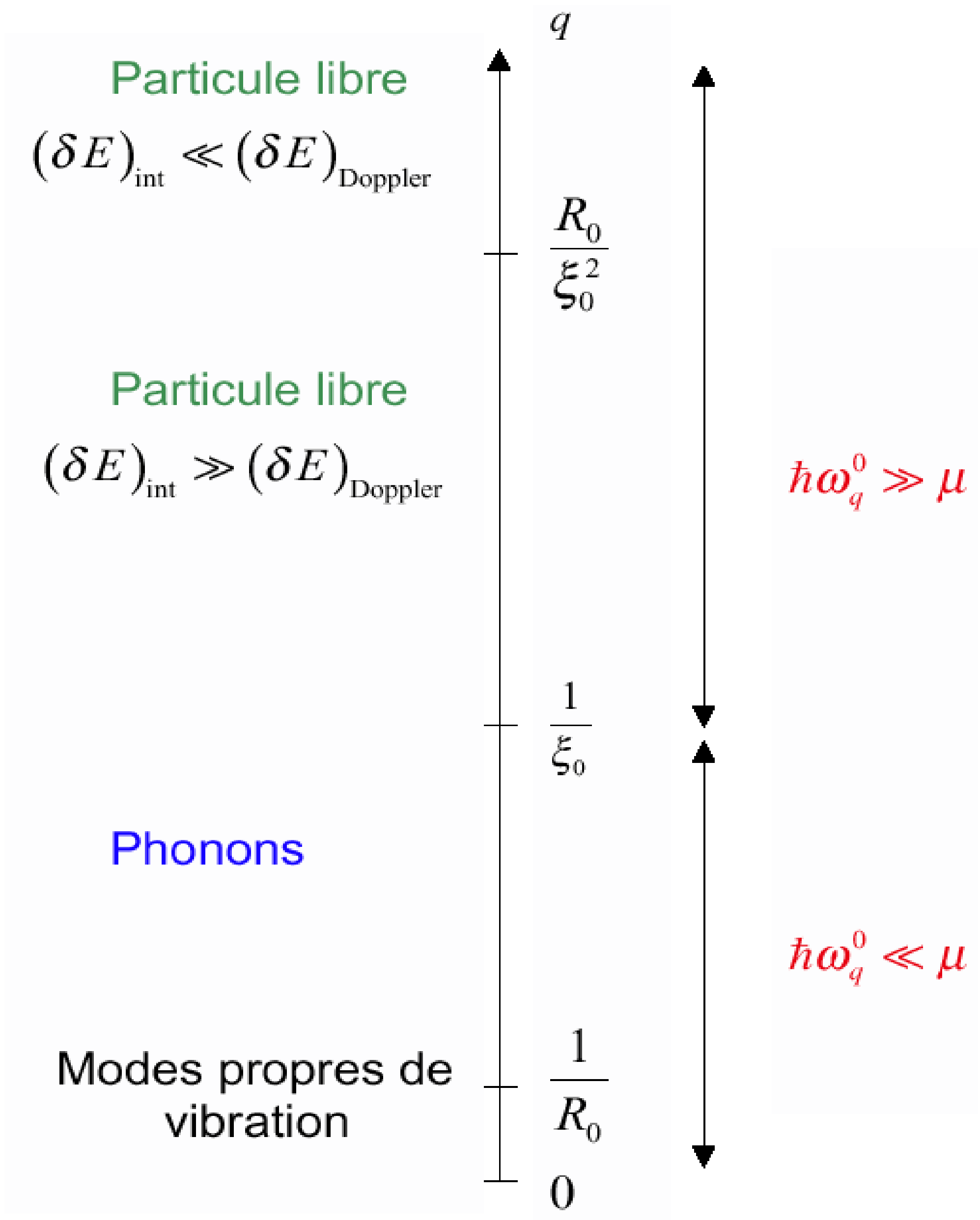
Divers régimes de diffusion suivant la valeur de q

R_0 : rayon du condensat

ξ_0 : Longueur de relaxation

$$(\delta E)_{\text{int}} = \mu$$

$$(\delta E)_{\text{Doppler}} = q\hbar^2 / mR_0$$



Diverses approximations

$q \gg q_D = R_0 / \xi_0^2$ Approximation d'impulsion

$S(\vec{q},\omega)$ donne accès à la distribution des vitesses dans le condensat

$1/R_0 \ll q \ll q_D$ Approximation de densité locale

Superposition de spectres correspondant à des condensats homogènes. En chaque point $\vec{r}$, on a un condensat homogène de densité $\rho(\vec{r})$.

Elargissement inhomogène dû à une densité inhomogène spatialement.

$q \simeq q_D$ La largeur Doppler et la largeur due aux interactions s'ajoutent quadratiquement.

Comment sonder le condensat (suite)

2. <u>Etude des modes propres de vibration</u>

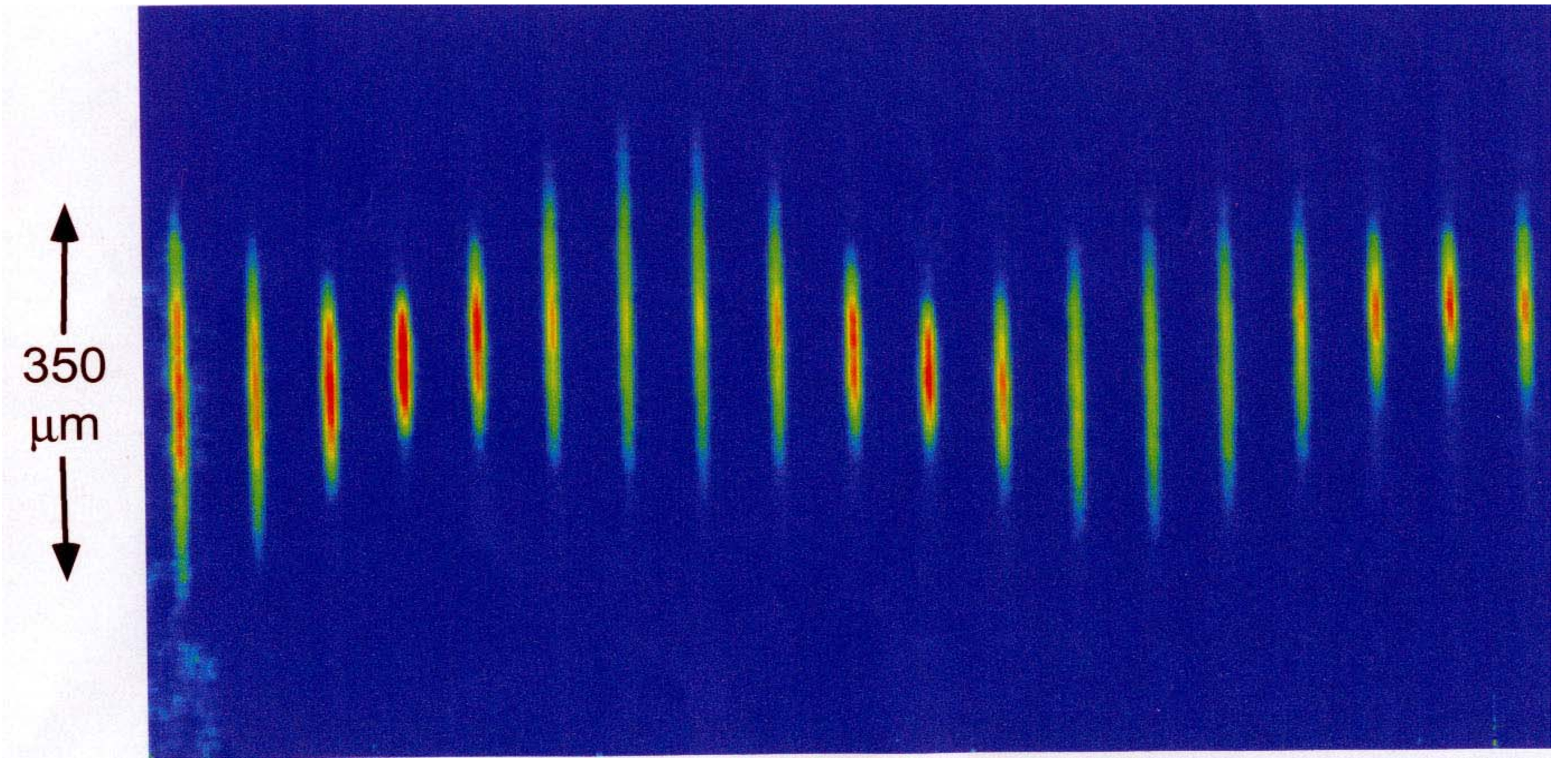
- Excitation de ces modes propres de vibration par modification du potentiel de piégeage

- Mesure précise des fréquences de vibration par imagerie du condensat
  - après expansion balistique (absorption)
  - in situ (dispersion)

Démarche analogue à celle des méthodes d'étude spectroscopiques utilisées en physique atomique.

Détection non destructive des oscillations d’un condensat de sodium

Equipe de W. Ketterle à MIT



1 cliché toutes les 5 millisecondes

Que peut-on apprendre à partir de l'étude des modes propres de vibration

Position des résonances

- Comment change-t-elle avec l'importance des interactions

  Transition du régime $\chi_{\text{cond}} \ll 1$ au régime $\chi_{\text{cond}} \gg 1$

- Comparaison avec les modes propres de vibration du nuage thermique

  Signature de la condensation

Largeur des résonances

Mécanismes d'amortissement

Manifestations de la superfluidité

Méthodes de calcul des fréquences propres de vibration

- **Résolution numérique des équation de Bogolubov - de Gennes**

  Equations valables aussi bien pour

  $\chi_{\text{cond}} \ll 1$ que pour $\chi_{\text{cond}} \gg 1$

- **Utilisation des équations hydrodynamiques pour ρ et $\vec{v}$ (à la limite $\chi_{\text{cond}} \gg 1$)**

- **Introduction de facteurs de dilatation $b_i(t)$ pour un condensat dans un piège harmonique à la limite $\chi_{\text{cond}} \gg 1$**

  Equations différentielles non linéaires pour les $b_i(t)$

- **Règles de somme**

  Transition entre les régimes $\chi_{\text{cond}} \ll 1$ et $\chi_{\text{cond}} \gg 1$

Rappels sur les modes propres de vibration d'un condensat sphérique (à la limite χ_{cond}>>1)

Linéarisation des équations hydrodynamiques

$$\rho = \rho_0 + \delta\rho \qquad \vec{v} = \vec{v}_0 + \delta\vec{v} \qquad S = S_0 + \delta S \tag{1.32}$$

$$\rho_0(\vec{r}) = \frac{1}{g}\left(\mu - \frac{1}{2}m\omega_0^2 r^2\right) \qquad \vec{v}_0 = \vec{0} \qquad S_0 = -\mu t/\hbar \tag{1.33}$$

Valeurs à l'équilibre

$$\delta\rho, \quad \delta\vec{v} = (\hbar/m)\vec{\nabla}\delta S, \quad \delta S \quad : \quad \text{Ecarts à l'équilibre}$$

Au 1er ordre en $\delta\rho$, $\delta\vec{v}$, δS, les équations hydrodynamiques (1.15) (sans terme de pression quantique) et (1.21) deviennent

$$\partial\,\delta\rho/\partial t + \vec{\nabla}.\left(\rho_0\,\delta\vec{v}\right) = 0 \tag{1.34 a}$$

$$\hbar\,\partial\,\delta S/\partial t + g\,\delta\rho = 0 \tag{1.34 b}$$

$$m\,\partial\,\delta\vec{v}/\partial t + g\,\vec{\nabla}\delta\rho = 0 \tag{1.34 c}$$

Solution des équations hydrodynamiques linéarisées

S. Stringari, Phys. Rev. Lett. 77, 2360 (1996) – Voir aussi cours 1998-99

En éliminant $\delta\vec{v}$ entre (1.34 a) et (1.34 c), on obtient une equation aux dérivées partielles pour $\delta\rho$ dont on peut chercher les solutions normalisables. On trouve ainsi une série de modes propres de vibration

$$\rho = \rho_0 + \delta\rho_{n_r \ell m}\, e^{-i\omega(n_r,\ell)t} + c.c. \qquad (1.35)$$

$$\delta\rho_{n_r \ell m} = P_{n_r \ell}(r)\, r^{\ell}\, Y_\ell^m(\theta,\varphi) \qquad \text{"Mode"} \;\; n_r, \ell, m \qquad (1.36)$$

$P_{n_r \ell}(r)$: polynôme pair en r de degré $2n_r$

n_r : nombre de noeuds de la dépendance radiale

$Y_\ell^m(\theta,\varphi)$: Harmonique sphérique

$$\boxed{\omega(n_r,\ell) = \omega_0\left[2n_r^{\,2} + 2n_r\ell + 3n_r + \ell\right]^{1/2}} \qquad (1.37)$$

Ondes de surface : $n_r=0$

Par définition, les ondes de surface correspondent aux modes $n_r = 0,\ \ell,\ m$.

Pas de nœud dans la dépendance radiale

$$\begin{cases} \delta\rho_{0,\ell,m} = r^{\ell} Y_{\ell}^{m}(\theta,\varphi) & \text{(1.38 a)} \\ \omega(0,\ell) = \omega_0 \sqrt{\ell} & \text{(1.38 b)} \end{cases}$$

La dénomination « ondes de surface » est justifiées par les propriétés suivantes (démontrées plus loin):

- La densité de chaque élément du condensat est conservée au cours du mouvement de vibration.
- Ces ondes sont analogues aux ondes de gravité

Forme des équations hydrodynamiques linéarisées

L'équation (1.34 b) donne, compte tenu de (1.35) et de (1.38 a) :

$$\delta S = -i\frac{g}{\hbar\omega(0,\ell)}\delta\,\rho_{0,\ell,m}e^{-i\omega(0,\ell)t} = -i\frac{g}{\hbar\omega(0,\ell)}r^{\ell}Y_{\ell}^{m}e^{-i\omega(0,\ell)t} \tag{1.39}$$

On en déduit :

$$\delta\vec{v} = \frac{\hbar}{m}\vec{\nabla}\delta S = -i\frac{g}{m\,\omega(0,\ell)}\left(\vec{\nabla}r^{\ell}Y_{\ell}^{m}\right)e^{-i\omega(0,\ell)t} \tag{1.40}$$

Comme $r^{\ell}Y_{\ell}^{m}$ est un polynôme harmonique, $\Delta r^{\ell}Y_{\ell}^{m} = 0$. Donc

$$\vec{\nabla}.\delta\vec{v} = \text{-}i\frac{g}{m\,\omega(0,\ell)}\left(\Delta r^{\ell}Y_{\ell}^{m}\right)e^{-i\omega(0,\ell)t} = 0 \tag{1.41}$$

Le champ de vitesses d'une onde de surface est donc non seulement irrotationnel, mais aussi de divergence nulle.

Forme des équations hydrodynamiques linéarisées (suite)

L'équation (1.34 c) est le gradient de (1.34 b) et n'apporte rien de nouveau. L'équation (1.34 a) donne:

$$\frac{\partial}{\partial t}\delta\rho+\left(\vec{\nabla}\rho_0\right).\delta\vec{v}+\rho_0\left(\vec{\nabla}.\delta\vec{v}\right)=\frac{\partial}{\partial t}\delta\rho+\left(\vec{\nabla}\rho_0\right).\delta\vec{v}=0 \qquad (1.42)$$

D'après (1.33), $\vec{\nabla}\rho_0=-m\,\omega_0^2\,\vec{r}\,/\,g$, et l'équation (1.42) s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t}\delta\rho-\frac{m}{g}\omega_0^2\,\vec{r}.\delta\vec{v}=0 \qquad (1.43)$$

En utilisant $\vec{r}.\vec{\nabla}=r\,(\partial/\partial r)$, (1.35), (1.38 a) et (1.40), on obtient :

$$\left[-i\,\omega(0,\ell)+i\frac{\omega_0^2\ell}{\omega(0,\ell)}\right]r^{\ell}Y_{\ell}^{m}e^{-i\omega(0,\ell)t}=0 \qquad (1.44)$$

qui redonne $\omega(0,\ell)=\omega_0\sqrt{\ell}$ .Nous vérifions ainsi directement que

$$\delta\rho=r^{\ell}Y_{\ell}^{m}e^{-i\omega_0\sqrt{\ell}\,t} \qquad (1.45)$$

est bien une solution des équations linéarisées

Conservation de la densité

Dans (1.42) on peut remplacer $\delta\rho$ par $\rho = \rho_0 + \delta\rho$ puisque $\partial\rho_0 / \partial t = 0$. Par ailleurs, on peut remplacer $(\vec{\nabla}\rho_0).\delta\vec{v}$ par $(\vec{\nabla}\rho).\delta\vec{v}$, en négligeant des termes du 2 ordre en $(\vec{\nabla}\delta\rho).\delta\vec{v}$ on obtient ainsi :

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \left(\vec{v}.\vec{\nabla}\right)\rho = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\rho = 0 \qquad (1.46)$$

La dérivée totale de ρ est donc nulle. Quand on se déplace avec un élément du fluide au cours de la vibration, la densité du fluide ne change pas.

Le mouvement de vibration se fait donc à densité constante. La compressibilité du condensat n'intervient pas.

Analogie avec des ondes de gravité

Les ondes de gravité à la surface de l'eau (sans contribution de la tension superficielle), obéissent à la loi de dispersion:

$$\omega^2 = k\,g \qquad (1.47)$$

où g est l'accélération de la gravité.
(Voir Landau et Lifchitz, Mécanique des fluides, § 12)

Appliquons cette formule à la surface du condensat sphérique de rayon R, où la force extérieure, produite par le potentiel de piégeage vaut:

$$F = m\,\omega_0^2\,R$$

L'équivalent de l'accélération de la gravité est ici le coefficient de m.

Analogie avec des ondes de gravité (suite)

Si l'on remplace dans (1.47) g par $\omega_0^2 R$, on obtient la relation de dispersion :

$$\omega^2 = k\,\omega_0^2\, R \tag{1.48}$$

Introduisons alors l'impulsion

$$p = \hbar\, k$$

et le moment cinétique

$$R \times p = \ell\, \hbar$$

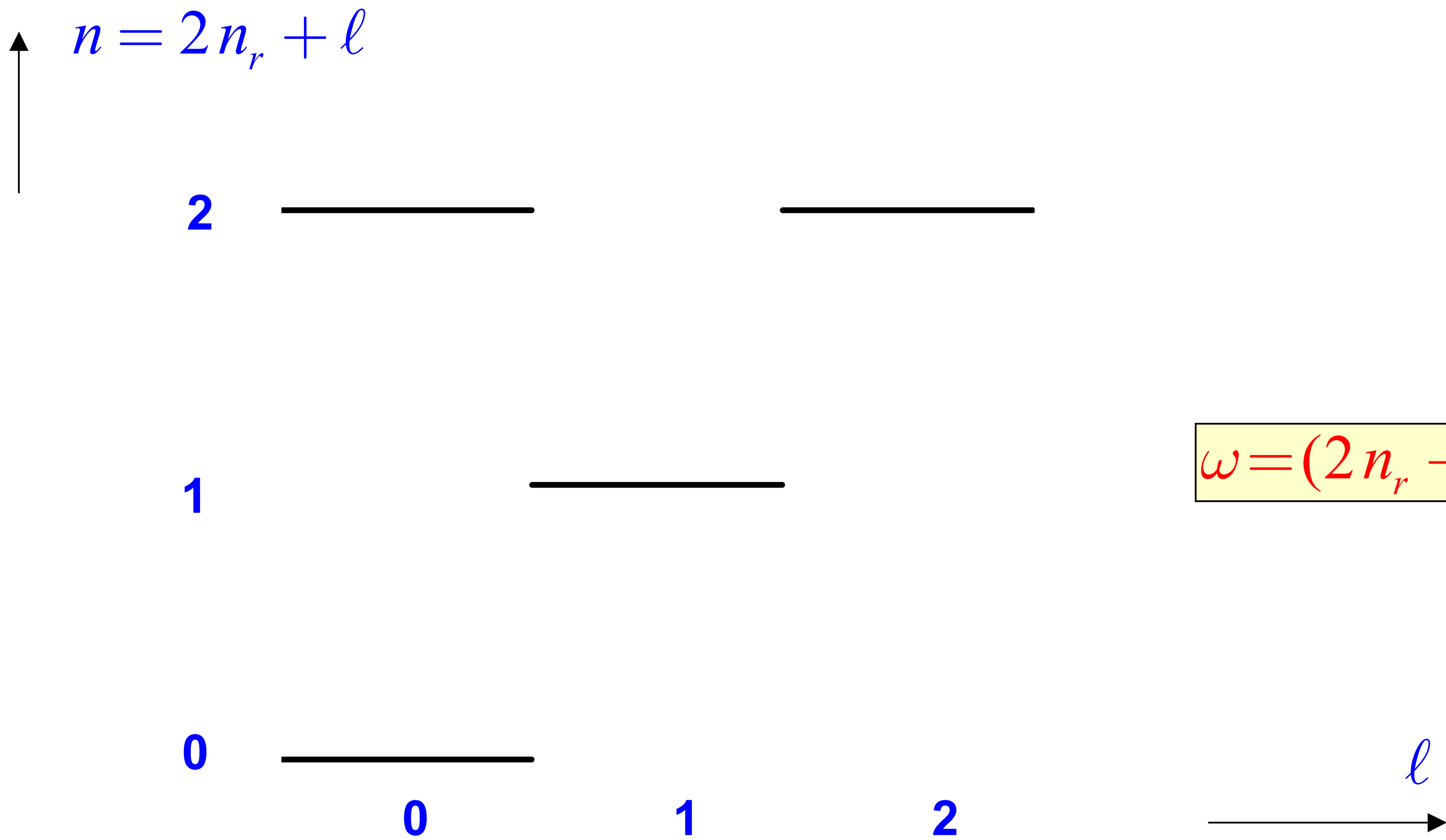
La relation (1.48) peut être réécrite sous la forme

$$\omega^2 = \ell\, \omega_0^2 \tag{1.49}$$

qui coincide avec l'équation établie plus haut pour les ondes de surface d'un condensat sphérique.

Comparaison avec un gaz parfait de bosons

Niveaux d'énergie d'un oscillateur isotrope à 3 dimensions



$$\boxed{\omega = (2n_r + \ell)\,\omega_0}$$

C.Cohen-Tannoudji, B.Diu, F.Laloë, Mécanique quantique, Complément B_{VII}

Problèmes abordés dans les cours des années antérieures

1997-98 Condensation de Bose-Einstein d'un gaz parfait

1998-99 Description des interactions en termes de champ moyen
Equation de Gross-Pitaevskii
Théorie de Bogolubov

1999-2000 Propriétés de cohérence
Effets physiques liés à la phase de l'onde de matière associée au condensat

2000-2001 Réponse d'un condensat à divers types d'excitation
Facteurs de structure dynamique et statique.

Notes de cours disponibles sur le site : www.ens.fr/cct

Thème choisi pour le cours 2001-2002

Propriétés de rotation des condensats

- Comment se comporte un condensat quand on fait tourner le piège qui le contient?
- Moment d'inertie d'un condensat. Superfluidité.
- Modes « ciseaux ».
- Différences de comportement avec le nuage thermique aussi bien dans le régime sans collision que dans le régime hydrodynamique.
- Tourbillons quantiques. Quantification de la circulation de la vitesse.
- Comment détecter les tourbillons sur les modes propres de vibration du condensat