

# Tourbillon quantique

Condensat de Bose-Einstein où tous les bosons sont condensés dans un même état quantique de moment cinétique

$$L_z = m \hbar \quad m = 1, 2, \dots \quad (6.1)$$

Ne pas confondre un tourbillon où tous les bosons ont un moment cinétique non nul et une excitation élémentaire de moment cinétique  $m \hbar$  d'un condensat ordinaire où tous les autres atomes ont un moment cinétique nul.

# Problèmes qui seront abordés

## Structure du tourbillon

- Fonction d'onde
- Densité spatiale et champ de vitesses

## Énergie de l'état à un tourbillon

par rapport à l'état sans tourbillon

## Stabilité thermodynamique

L'état d'un tourbillon peut-il être l'état fondamental dans un récipient tournant. Vitesse de rotation critique

## Comment détecter un tourbillon ?

# Plan

## 1. Tourbillon dans un condensat homogène

- Quantification de la circulation de la vitesse
- Dimension du cœur
- Energie par unité de longueur

## 2. Tourbillon dans un condensat inhomogène

- Gaz parfait dans un piège harmonique
- Gaz de bosons à la limite de Thomas-Fermi

## 3. Énergie du tourbillon dans un récipient tournant

- Cas d'un gaz parfait
- Importance des interactions

# Tourbillon quantique dans un condensat homogène

## Forme de la fonction d'onde

Axe de rotation : Oz

Coordonnées cylindriques

$$r_{\perp}, z, \varphi$$

Comme

$$L_z = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad (6.2)$$

La fonction d'onde d'un tourbillon  $m=1$  est nécessairement de la forme

$$\psi(r_{\perp}, z, \varphi) = \chi(r_{\perp}, z) e^{i\varphi} \quad (6.3)$$

# Équation de Gross Pitaevskii

## Laplacien en coordonnées cylindriques

$$\Delta = \frac{1}{r_{\perp}} \frac{\partial}{\partial r_{\perp}} r_{\perp} \frac{\partial}{\partial r_{\perp}} + \frac{1}{r_{\perp}^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (6.4)$$

## Équations de G-P pour $\chi$

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2M} \left( \frac{1}{r_{\perp}} \frac{\partial}{\partial r_{\perp}} r_{\perp} \frac{\partial}{\partial r_{\perp}} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + \frac{\hbar^2}{2M r_{\perp}^2} \right] \chi(r_{\perp}, z) + g \chi^2(r_{\perp}, z) \chi(r_{\perp}, z) = \mu \chi(r_{\perp}, z) \quad (6.5)$$

$\frac{\hbar^2}{2M r_{\perp}^2}$  : Potentiel centrifuge imposant à la fonction d'onde  $\chi(r_{\perp}, z)$  de s'annuler en  $r_{\perp}=0$

# Allure de la fonction d'onde

## Pas de dépendance en z

pour minimiser l'énergie totale

## Dépendance radiale

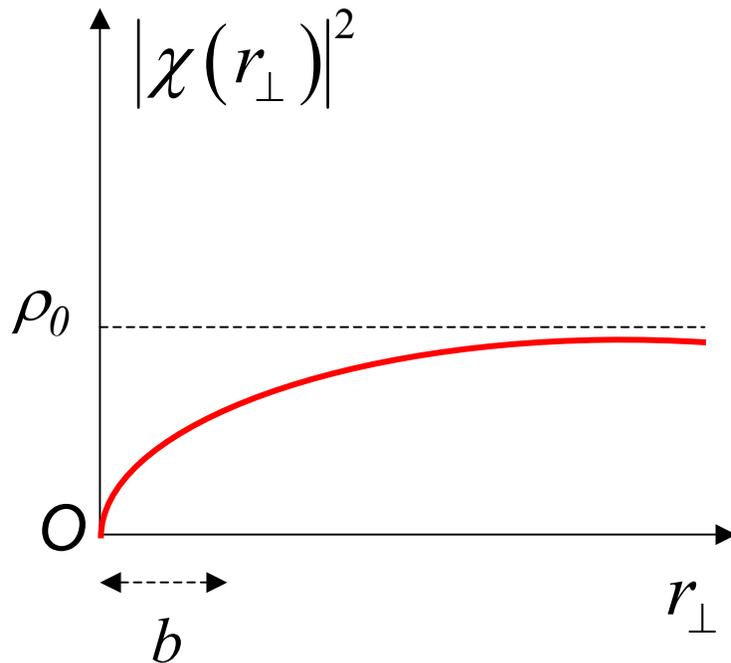


Figure VI-1

- A cause du potentiel centrifuge, la densité spatiale s'annule sur l'axe Oz. Quand on s'éloigne de cet axe, elle croît sur une zone de largeur  $b_0$  et tend vers une constante
- $b_0$  : dimension du « cœur » du tourbillon

## Dépendance en $\varphi$

Associée à l'existence d'un moment cinétique non nul le long de  $0 z$

## Phase de la fonction d'onde

La fonction radiale est réelle et le facteur de phase ne provient que de la dépendance en  $\varphi$

$$S(r_{\perp}, \varphi) = S(\varphi) = \varphi \quad (6.6)$$

## Gradient de $S$ en coordonnées cylindriques

$$\begin{cases} (\vec{\nabla} S)_{r_{\perp}} = \partial S / \partial r_{\perp} = 0 \\ (\vec{\nabla} S)_z = \partial S / \partial z = 0 \\ (\vec{\nabla} S)_{\varphi} = \partial S / r_{\perp} \partial \varphi = 1 / r_{\perp} \end{cases} \quad (6.7)$$

# Champ de vitesses

$$\vec{v} = \frac{\hbar}{M} \vec{\nabla} S \quad (6.8)$$

D'après (6.7), seule la composante azimutale de la vitesse est non nulle et vaut

$$v_z = v_{r_\perp} = 0, \quad v_\varphi = \frac{\hbar}{M r_\perp} \quad (6.9)$$

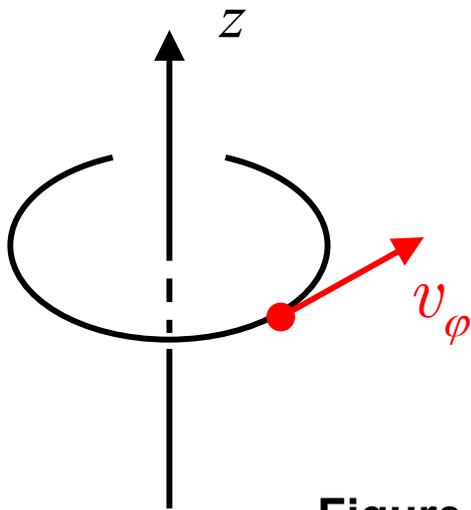


Figure VI-2

Même symétrie que celle du champ de vitesses d'un corps solide en rotation.

Mais le module de la vitesse décroît quand on s'éloigne de l'axe au lieu de croître.

## Quantification de la circulation de la vitesse

D'après (6.9), la circulation de la vitesse sur un cercle d'axe Oz et de rayon  $r_{\perp}$  vaut

$$2\pi r_{\perp} v_{\varphi} = 2\pi \hbar / M = h / M \quad (6.10)$$

Ce résultat est en fait valable pour la circulation sur un contour fermé  $C$  quelconque entourant Oz. En effet, comme la vitesse est un gradient et reste finie en tout point hors de l'axe

$$\oint_C \vec{v} \cdot d\vec{\ell} = \frac{\hbar}{M} \oint_C \vec{\nabla} S \cdot d\vec{\ell} = \frac{\hbar}{M} \delta S \quad (6.11)$$

où  $\delta S$  est la variation de  $S$  le long du contour

## Quantum de circulation

Comme  $S$  est une phase et que la fonction d'onde a une seule valeur en chaque point, on a

$$S = 2\pi m \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (6.12)$$

de sorte que

$$\oint_C \vec{v} \cdot d\vec{\ell} = 2\pi m \frac{\hbar}{M} = m\kappa \quad (6.13)$$

où

$$\kappa = \frac{h}{M} \quad (6.14)$$

est le quantum de circulation.

L'entier  $m$  caractérise le moment cinétique

$$L_z = m\hbar \quad (6.15)$$

## Rotationnel de la vitesse

En tout point hors de l'axe, la vitesse est finie. Comme c'est un gradient,

$$\vec{\nabla} \times \vec{v} = \vec{0} \quad \text{pour} \quad \vec{r}_\perp \neq \vec{0} \quad (6.16)$$

Ce résultat n'est plus valable sur l'axe où la vitesse diverge. Le rotationnel de la vitesse a donc une singularité sur l'axe.

De l'équation (6.13), on déduit

$$\vec{\nabla} \times \vec{v} = m\kappa \delta^{(2)}(\vec{r}_\perp) \vec{e}_z \quad (6.17)$$

Le flux de (6.17) à travers la surface contenue à l'intérieur de tout contour  $C$  entourant l'axe  $Z$  redonne bien la circulation calculée en (6.13)

## Analogie avec le champ magnétique d'un courant rectiligne

Le champ de vitesses (6.9) a la même dépendance spatiale que celle du champ magnétique créé par un courant rectiligne le long de Oz. Un parallèle étroit peut être établi entre les équations gouvernant les 2 champs

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{j}{\epsilon_0 c^2} \delta^2(\vec{r}) \vec{e}_z$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{v} = m \kappa \delta^2(\vec{r}_\perp) \vec{e}_z$$

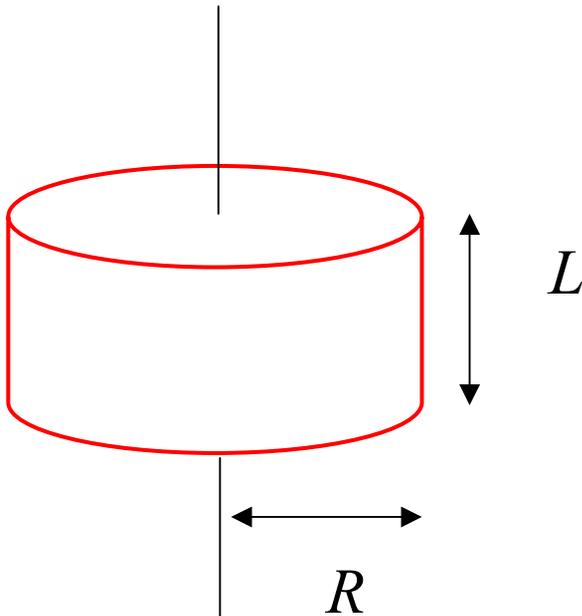
(6.18a)

(6.18b)

Le fait que le champ de vitesses soit de divergence nulle se vérifie aisément à partir de (6.9)

# Estimation de la taille du cœur du tourbillon

Supposons le condensat contenu dans un boîtier cylindrique très long (d'axe  $Oz$  et de rayon  $R$ ) et considérons une tranche de longueur  $L$



- Sans tourbillon, le condensat est homogène dans ce volume avec une densité spatiale  $\rho_0$
- Si un tourbillon apparaît, un creux de densité (cœur) de rayon  $b$  apparaît, de sorte que la densité à l'extérieur du cœur augmente de  $\delta\rho_0$

# Argument variationnel pour estimer la taille $b$ du coeur

L'apparition du tourbillon se traduit par une augmentation d'énergie  $\delta E$  due à plusieurs effets

- Variation de l'énergie d'interaction due à la variation de densité spatiale
- Variation de l'énergie cinétique radiale due à la variation radiale de la densité
- Variation de l'énergie cinétique azimutale due au champ de vitesses du tourbillon

Nous allons estimer  $\delta E$  en fonction de  $b$  et déterminer pour quelle valeur de  $b$   $\delta E$  est en minimal.

## Variation de l'énergie d'interaction

$$\delta E_{\text{int}} = \frac{1}{2} g \iiint_V [\rho^2(\vec{r}) - \rho_0^2] d^3 r \quad (6.19)$$

$\rho(\vec{r})$  : densité en présence du tourbillon

$\rho_0$  : densité en l'absence

comme

$$\iiint_V d^3 r \rho(\vec{r}) = \rho_0 \iiint_V d^3 r = \rho_0 V \quad (6.20)$$

$$\begin{aligned} \delta E_{\text{int}} &= \frac{1}{2} g \iiint_V d^3 r [\rho(\vec{r}) - \rho_0]^2 \\ &\simeq \frac{1}{2} g \pi b^2 L \rho_0^2 + \frac{1}{2} g \pi (R^2 - b^2) L [(\rho_0 + \delta \rho_0)^2 - \rho_0^2] \end{aligned} \quad (6.21)$$

où  $\delta \rho_0$  (à l'extérieur du cœur) est estimé par

$$\pi b^2 L \rho_0 \simeq \pi (R^2 - b^2) L \delta \rho_0 \quad (6.22)$$

## Variation de l'énergie d'interaction (suite)

comme

$$R \gg b \quad (6.23)$$

l'équation (6.22) donne

$$\delta \rho_0 = \rho_0 b^2 / R^2 \quad (6.24)$$

qui reporté dans (6.21) conduit à

$$\delta E_{\text{int}} \simeq g \pi b^2 L \rho_0^2 \quad (6.25)$$

## Énergie cinétique radiale

$$\delta E_{\text{cin.rad}} \simeq \pi b^2 L \rho_0 \frac{\hbar^2}{2M b^2} \simeq \pi \rho_0 \frac{\hbar^2}{M} L \quad (6.26)$$

Indépendante de  $L$

## Énergie cinétique azimutale

$$\begin{aligned} E_{\text{cin.az}} &\simeq \rho_0 L \int_b^R 2\pi r_{\perp} dr_{\perp} \frac{1}{2} M v_{\perp}^2 \\ &= \pi \rho_0 L \frac{\hbar^2}{M} \text{Log} \frac{R}{b} \end{aligned} \quad (6.27)$$

L'annulation de la densité quand  $r_{\perp}$  s'approche de 0 à l'intérieur du cœur empêche la divergence de l'intégrale et introduit une borne inférieure physique.

## Récapitulation

$$\frac{\delta E(b)}{L} \simeq g \pi b^2 \rho_0^2 + \pi \frac{\hbar^2}{M} \rho_0 \left[ 1 + \text{Log} \frac{R}{b} \right] \quad (6.28)$$

## Ordre de grandeur de $b$

Le premier terme de (6.28) croît avec  $b$  alors que le second décroît. Il y a donc une valeur optimale pour  $b$  pour laquelle la variation d'énergie due au tourbillon est minimale.

$$\frac{d}{db} \delta E(b) = 0 \quad (6.29)$$

$$2gb\rho_0^2 - \frac{\hbar^2}{M} \frac{\rho_0}{b} = 0 \quad (6.30)$$

On en déduit

$$b \simeq \sqrt{\frac{\hbar^2}{2Mg\rho_0}} = \sqrt{\frac{1}{8\pi\rho_0 a}} = \xi_0 \quad (6.31)$$

Le rayon du cœur est donc de l'ordre de la longueur de relaxation ("healing length")

## Etude quantitative

L'équation (6.5) peut se réécrire

$$\frac{d^2}{dr_{\perp}^2} + \frac{1}{r_{\perp}} \frac{d}{dr_{\perp}} \chi(r_{\perp}) + \left( \frac{2M\mu}{\hbar^2} - \frac{1}{r_{\perp}^2} \right) \chi(r_{\perp}) - \frac{2Mg}{\hbar^2} \chi^3(r_{\perp}) = 0 \quad (6.32)$$

Pour  $r_{\perp}$  très grand,  $\chi^2$  se réduit à  $\tilde{\rho}_0$ , où  $\tilde{\rho}_0$  est la densité spatiale asymptotique (loin du cœur). Les 2 premiers termes de (6.32) sont alors négligeables, car  $\chi$  varie très peu. De même, le terme en  $1/r_{\perp}^2$  tend vers 0. On obtient ainsi

$$\mu = g\chi^2 = g\tilde{\rho}_0 = \frac{4\pi\hbar^2}{M} a \tilde{\rho}_0 \quad (6.33)$$

équation qui relie le potentiel chimique à la densité asymptotique.

# Utilisation de variables sans dimensions

Posons

$$s = r_{\perp} / \tilde{\xi}_0 \quad (6.34)$$

où

$$\tilde{\xi}_0 = 1 / \sqrt{8\pi a \tilde{\rho}_0} \approx 1 / \sqrt{8\pi a \rho_0} = \xi_0 \quad (6.35)$$

$\xi_0$  étant la longueur de relaxation

$$\chi(s) = \sqrt{\tilde{\rho}_0} f(s) \quad (6.36)$$

L'équation (6.32) devient

$$\left( \frac{d^2}{ds^2} + \frac{1}{s} \frac{d}{ds} \right) f(s) + \left( 1 - \frac{1}{s^2} \right) f(s) - f^3(s) = 0 \quad (6.37)$$

Équation différentielle non linéaire dont la solution a des comportements simples pour  $s$  petit et  $s$  grand

## Comportement pour $s \ll 1$

$f(s)$  s'annule en  $s=0$ . Donc  $f(s)$  est petit pour  $s \ll 1$  et le terme cubique  $f^3(s)$  est négligeable devant les autres. Sans ce dernier terme, l'équation (6.37) devient une équation différentielle linéaire dont la solution est la fonction de Bessel  $J_1(s)$

$$f(s) \underset{s \rightarrow 0}{\simeq} J_1(s) \propto s \quad (6.38)$$

## Comportement pour $s \gg 1$

$f(s)$  varie très peu et les 2 premiers termes de (6.37) peuvent être négligés ce qui donne

$$f(s) \underset{s \rightarrow \infty}{\simeq} \left(1 - \frac{1}{s^2}\right)^{1/2} \simeq 1 - \frac{1}{2s^2} \quad (6.39)$$

## Calcul numérique de $f(\xi = s)$

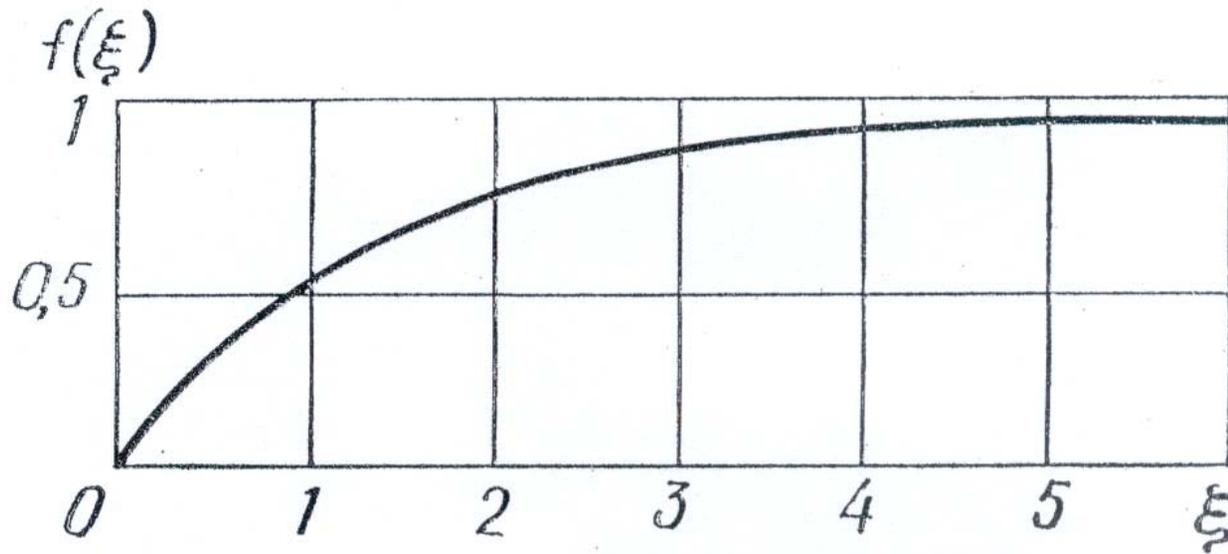


Figure VI-3

Figure extraite de la référence 9 (chapitre III)

## Energie E / L du tourbillon par unité de longueur

L'étude précédente montre que la taille du cœur est déterminée par la longueur de relaxation. L'ordre de grandeur de l'énergie cinétique azimutale est obtenu en remplaçant dans (6.27)  $b$  par  $\xi_0$ .

Connaissant  $f(s)$ , il est possible de calculer plus précisément les diverses énergies (cinétique radiale, cinétique azimutale, interaction). Le résultat du calcul numérique est :

$$\frac{E}{L} = \pi \rho_0 \frac{\hbar^2}{M} \text{Log} \left( 1.46 \frac{R}{\xi_0} \right) \quad (6.40)$$

(voir références 9,10,11,14)

## Tourbillons $m > 1$

Les résultats précédents, établis pour un tourbillon  $m=1$  se généralisent aisément à un tourbillon  $m > 1$

$f(s)$  se comporte à l'origine comme la fonction de Bessel  $J_m(s)$  et l'équation (6.38) doit être remplacée par

$$f(s) \underset{s \rightarrow 0}{\simeq} J_m(s) \propto s^m \quad (6.38)'$$

De même, l'équation (6.39) doit être remplacée par

$$f(s) \underset{s \rightarrow \infty}{\simeq} \left(1 - \frac{m^2}{s^2}\right)^{1/2} \simeq 1 - \frac{m^2}{2s^2} \quad (6.39)'$$

Enfin, l'énergie (6.40) doit être multipliée par  $m^2$ , le facteur numérique à l'intérieur du Log n'étant plus égal à 1.46, mais à 0.59 pour  $m=2$ , 0.38 pour  $m=3$  (voir réf.14)

# Tourbillon quantique dans un condensat inhomogène

$N$  atomes dans le potentiel de piégeage

$$V_{ext}(\vec{r}) = \frac{1}{2}M(\omega_{\perp}^2 r_{\perp}^2 + \omega_z^2 z^2) \quad (6.41)$$

Symétrie de révolution autour de  $0_z$

$$\sigma_{0_{\perp}} = \sqrt{\frac{\hbar}{M\omega_{\perp}}} \quad (6.42a)$$

$$\sigma_{0_z} = \sqrt{\frac{\hbar}{M\omega_z}} \quad (6.42b)$$

Tous les atomes sont condensés dans un état de moment cinétique  $\hbar$

La dépendance en  $\varphi$  de la fonction d'onde est toujours donnée par l'équation (6.3).

Il faut rajouter le terme  $V_{ext}(r_{\perp}, z)\chi(r_{\perp}, z)$  dans le membre de gauche de (6.5).

## Cas d'un gaz parfait (Tourbillon $m=1$ )

Les  $N$  atomes ne sont pas condensés dans l'état fondamental  $|n_x = 0, n_y = 0, n_z = 0\rangle$ , mais dans la superposition linéaire

$$\frac{1}{\sqrt{2}}|n_x = 1, n_y = 0, n_z = 0\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|n_x = 0, n_y = 1, n_z = 0\rangle \quad (6.43)$$

dont la fonction d'onde s'écrit (voir T.87)

$$(\pi \sigma_{0\perp})^{-1/2} (\pi \sigma_{0z})^{-1/4} \frac{\sqrt{2}}{\sigma_{0\perp}} (x + iy) e^{-r_{\perp}^2/2\sigma_{0\perp}^2} e^{-z^2/2\sigma_{0z}^2} \quad (6.44)$$

comme

$$x + iy = r_{\perp} e^{i\varphi} \quad (6.45)$$

L'état (6.44) a bien un moment cinétique  $+\hbar$ . Son énergie, par rapport à celle du fondamental vaut

$$E = \hbar \omega_{\perp} \quad (6.46)$$

# Condensat à la limite de Thomas-Fermi

Si  $\xi_0 \ll R_\perp$ , le cœur du tourbillon a peu d'influence sur la frontière du condensat

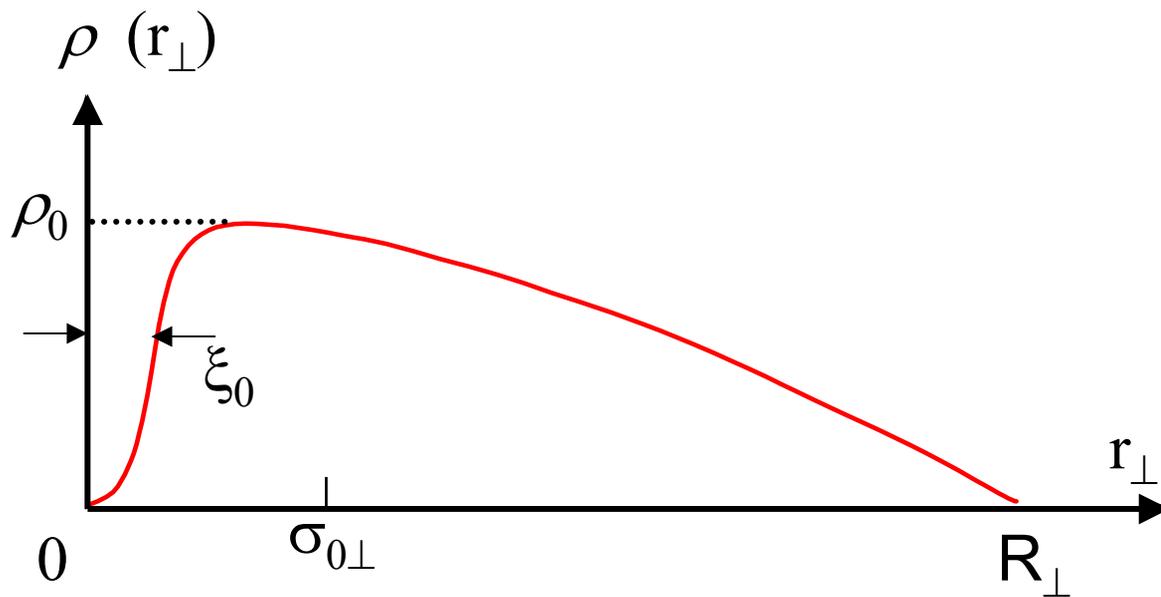


Figure VI-4

$$\xi_0 = \frac{1}{\sqrt{8\pi a \rho_0}}$$

$$\sigma_{0\perp} = \sqrt{\frac{\hbar}{M \omega_\perp}}$$

$$\mu = g \rho_0$$

$$\frac{1}{2} M \omega_\perp^2 R_\perp^2 = \mu$$

(6.47)

# Hiérarchie des diverses longueurs

$$\frac{\xi_0^2}{\sigma_{0\perp}^2} = \frac{1}{8\pi a \rho_0} \frac{M \omega_{\perp}}{\hbar} = \frac{M}{8\pi \hbar^2 a \rho_0} \hbar \omega_{\perp} = \frac{\hbar \omega_{\perp}}{2\mu} \ll 1 \quad (6.48)$$

$$\frac{1}{2} M \omega_{\perp}^2 R_{\perp}^2 = \mu = g \rho_0 = \frac{4\pi \hbar^2}{M} a \rho_0 = \frac{\hbar^2}{2M} \frac{1}{\xi_0^2} \quad (6.49)$$

$$R_{\perp}^2 = \frac{\hbar^2}{M^2 \omega_{\perp}^2} \frac{1}{\xi_0^2} = \frac{\sigma_{0\perp}^4}{\xi_0^2} \quad (6.50)$$

$$\frac{\sigma_{0\perp}^2}{R_{\perp}^2} = \frac{\xi_0^2}{\sigma_{0\perp}^2} \ll 1 \quad (6.51)$$

$$\xi_0 \ll \sigma_{0\perp} \ll R_{\perp} \quad (6.52)$$

# Étude numérique

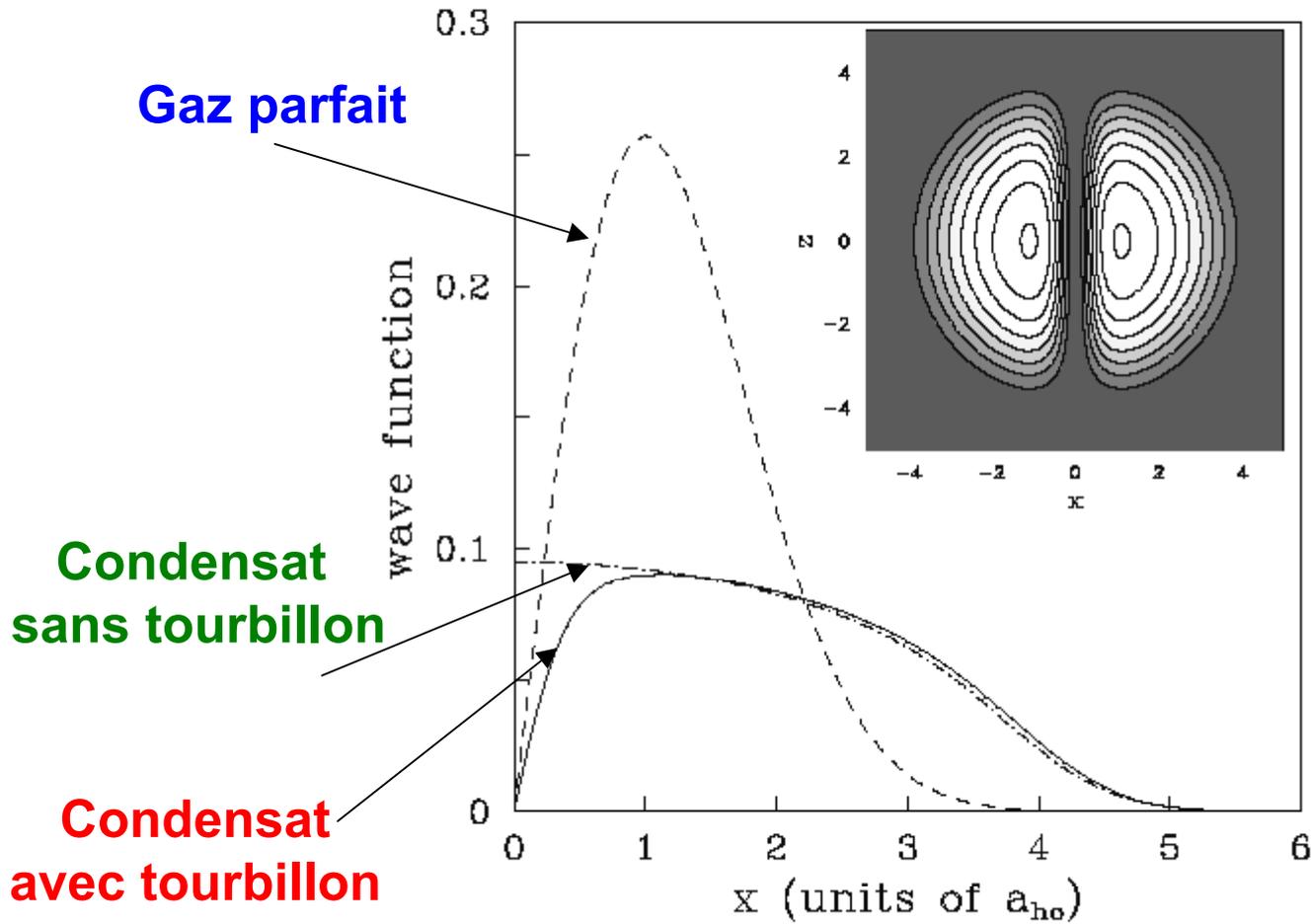


Figure VI-5

Figure extraite de la référence 8

# Énergie du tourbillon

## Étude qualitative

Repartons de l'équation (6.40) et remplaçons dans cette équation  $R$  par  $R_{\perp}$

Comme le nombre d'atomes par unité de longueur est de l'ordre de  $\pi R_{\perp}^2 \rho_0$ , l'ordre de grandeur de l'énergie par atome dans un condensat de rayon  $R_{\perp}$  avec un tourbillon  $m=1$  est

$$E_{\text{at}} \simeq \frac{\hbar^2}{M R_{\perp}^2} \text{Log} \frac{R_{\perp}}{\xi_0} \quad (6.53)$$

Cette énergie est évaluée par rapport à l'énergie du condensat sans tourbillon.

## Comparaison avec le gaz parfait

Dans un gaz parfait avec 1 tourbillon  $m=1$ , chaque atome a une énergie supplémentaire

$$(E_{\text{at}})_{GP} = \hbar \omega_{\perp} \quad (6.54)$$

La comparaison de (6.53) et (6.54) donne

$$\frac{E_{\text{at}}}{(E_{\text{at}})_{GP}} \simeq \frac{\hbar}{M \omega_{\perp}} \frac{1}{R_{\perp}^2} \text{Log} \frac{R_{\perp}}{\xi_0} = \frac{\sigma_{0\perp}^2}{R_{\perp}^2} \text{Log} \frac{R_{\perp}}{\xi_0} \quad (6.55)$$

Quand  $N$  croît, le terme en  $\text{Log}$  a une croissance logarithmique en  $\text{Log} N$  alors que le premier terme décroît en loi de puissance. Pour un condensat à la limite de Thomas-Fermi, on a donc

$$E_{\text{at}} < \hbar \omega_{\perp} \quad (6.56)$$

# Expression analytique approchée pour l'énergie du tourbillon (à la limite de Thomas-Fermi)

(référence 12 )

## Condensat piégé radialement, mais libre sur Oz

Dimension radiale :  $R_{\perp}$

On suppose  $R_{\perp} \gg \xi_0$

Il est commode alors de considérer 2 zones distinctes, de largeurs différentes, et d'évaluer séparément leurs contributions à l'énergie

- Zone  $0 \leq r_{\perp} \leq d$  avec  $\xi_0 \ll d \ll R_{\perp}$
- Zone  $d \leq r_{\perp} \leq R_{\perp}$

## Contribution de la zone $0 \leq r_{\perp} \leq d$

La densité spatiale n'a pas encore commencé à décroître à cause du piégeage. Il est alors légitime d'utiliser l'expression (6.40) établie pour un condensat homogène, à condition de remplacer R par d

$$E_1 / L = \pi \rho_0 \left( \hbar^2 / M \right) \text{Log} (1.46 d / \xi_0) \quad (6.57)$$

## Contribution de la zone $d \leq r_{\perp} \leq R_{\perp}$

Par rapport au condensat sans tourbillon, l'énergie nouvelle qui apparaît est essentiellement l'énergie cinétique azimutale

$$E_2 / L = \int_d^{R_{\perp}} 2 \pi r dr M \rho(r) v^2(r) / 2 \quad (6.58)$$

En utilisant (6.9) pour  $v(r)$  et  $\rho(r) = \rho_0 \left( 1 - r^2 / R_{\perp}^2 \right)$ , on obtient

$$E_2 / L = \pi \rho_0 \left( \hbar^2 / M \right) \left[ \left( \text{Log} R_{\perp} / d \right) - 1/2 \right] \quad (6.59)$$

## Résultat final

La somme de (6.57) et (6.59) donne :

$$\frac{E}{L} = \pi \rho_0 \frac{\hbar^2}{M} \text{Log} \frac{0.866 R_{\perp}}{\xi_0} \quad (6.60)$$

## Condensat également piégé le long de Oz

Longueur du condensat :  $2 Z_0$

Si  $Z_0 \gg \xi_0$ , on peut appliquer le résultat (6.60) pour les diverses tranches dz comprises entre  $Z_0$  et  $-Z_0$

$$E = \pi \frac{\hbar^2}{M} \int_{-Z_0}^{+Z_0} dz \rho(z) \text{Log} \frac{0.866 R_{\perp}(z)}{\xi_0(z)} \quad (6.61)$$

avec

$$\rho(z) = \rho_0 \left( 1 - \frac{z^2}{Z_0^2} \right) \quad R_{\perp}(z) = R_{\perp} \left( 1 - \frac{z^2}{Z_0^2} \right)^{1/2} \quad \xi(z) = \frac{1}{\sqrt{8\pi a \rho_0(z)}}$$

## Résultat final pour l'énergie du condensat

$$E = \frac{4\pi \hbar^2}{3 M} \rho_0 Z_0 \text{Log} \frac{0.671 R_{\perp}}{\xi_0} \quad (6.62)$$

## Nombre d'atomes

$$\begin{aligned} N &= \int d^3r \rho(r) = \rho_0 \int d^3r \left( 1 - \frac{r_{\perp}^2}{R_{\perp}^2} - \frac{z^2}{Z_0^2} \right) \\ &= \frac{8\pi}{15} \rho_0 R_{\perp}^2 Z_0 \end{aligned} \quad (6.63)$$

## Energie par atome

$$E_{\text{at}} = \frac{E}{N} = \frac{5}{2} \frac{\hbar^2}{M R_{\perp}^2} \text{Log} \frac{0.671 R_{\perp}}{\xi_0} \quad (6.64)$$

# Stabilité thermodynamique dans un piège tournant

Supposons que le piège contenant le condensat tourne à la fréquence  $\Omega$

Dans le référentiel tournant à  $\Omega$  où le piège est statique, il faut ajouter à l'hamiltonien le terme  $-\Omega \hat{L}_z$ . Si le condensat contient un tourbillon de moment cinétique  $+\hbar$ , l'énergie par atome change d'une quantité  $-\hbar\Omega$

Alors que l'énergie de l'état à 1 tourbillon est supérieure à celle de l'état sans tourbillon quand le piège ne tourne pas, elle peut lui devenir inférieure si

$$E_{\text{at}} - \hbar \Omega < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Omega > \Omega_{\text{crit}} = E_{\text{at}} / \hbar \quad (6.65)$$

L'état à 1 tourbillon peut devenir l'état thermodynamique stable si la vitesse de rotation est suffisamment élevée

# Vitesse angulaire critique

## Gaz parfait

Les équations (6.46) et (6.65) donnent :

$$\Omega_{\text{crit}} = \omega_{\perp} \quad (6.66)$$

L'état à 1 tourbillon devient l'état thermodynamique stable si  $\Omega$  est supérieur à  $\omega_{\perp}$ . Mais la force centrifuge est alors supérieure à la force de piégeage.

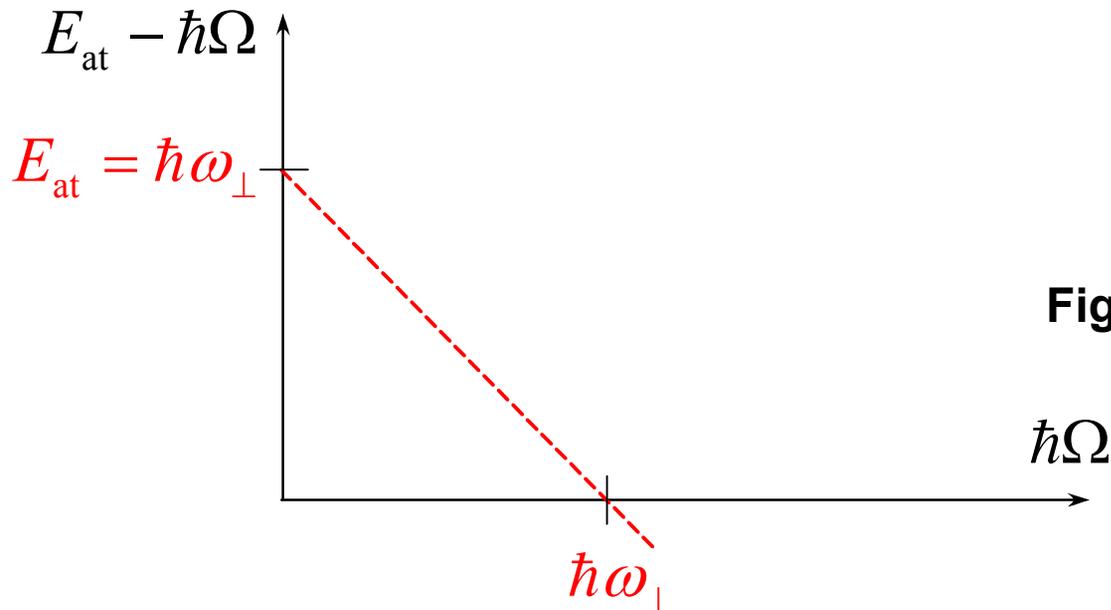


Figure VI-6

# Vitesse angulaire critique (suite)

## Limite de Thomas-Fermi

D'après (6.56)

$$\Omega_{\text{crit}} < \omega_{\perp} \quad (6.67)$$

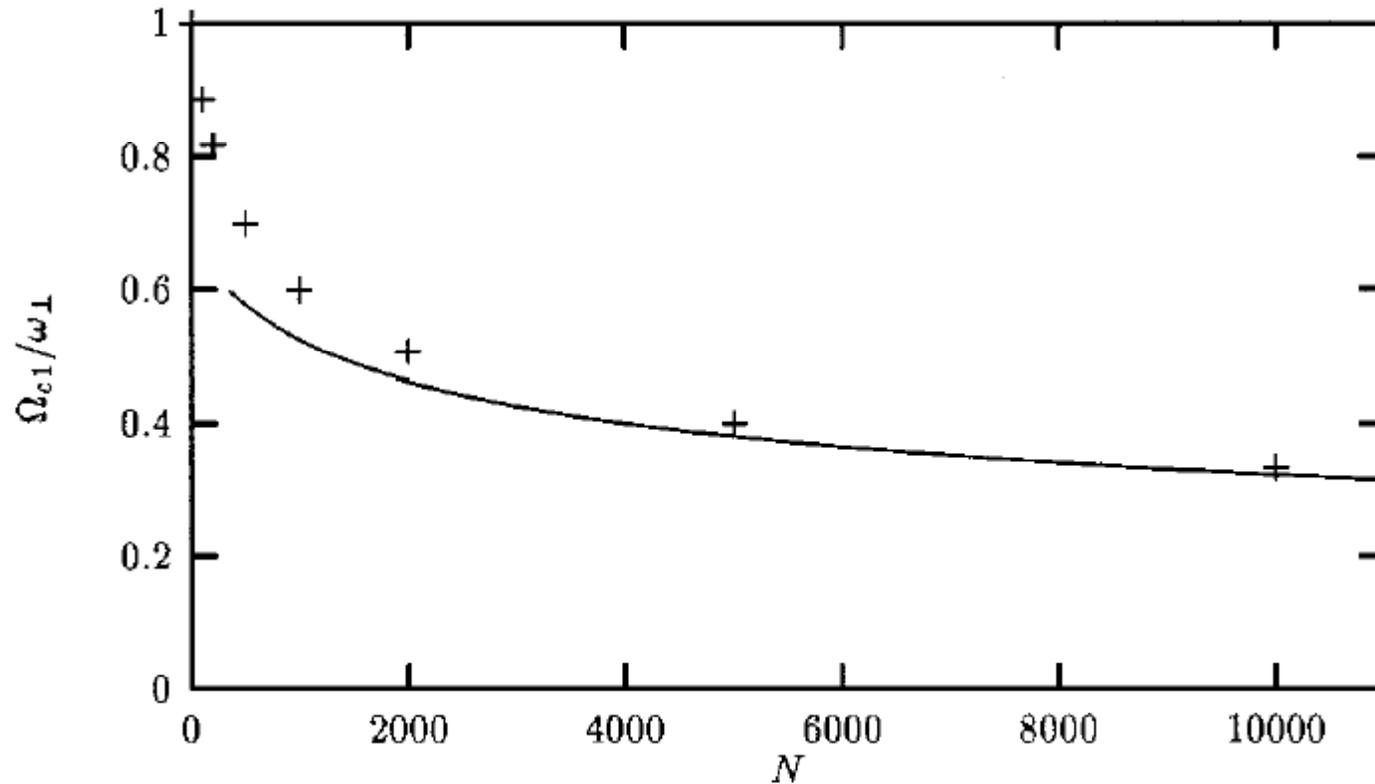
et la difficulté précédente disparaît

L'utilisation de (6.64) permet d'obtenir une expression analytique pour la fréquence critique

$$\Omega_{\text{crit}} = \frac{E_{\text{at}}}{\hbar} = \frac{5}{2} \frac{\hbar}{M R_{\perp}^2} \text{Log} \frac{0.671 R_{\perp}}{\xi_0} \quad (6.68)$$

qui peut être comparée au résultat d'un calcul numérique (voir la figure VI-7)

# Variations de la fréquence critique avec N



+ : Résultats d'un calcul numérique

Figure VI-7

Courbe en traits pleins : expression (6.64)

Figure extraite de la référence 12

## Références

(Suite de T-156 et 192)

- 8 - F. Dalfovo, S. Giorgini, L. Pitaevskii, S. Stringari, Rev. Mod. Phys. 71, 463 (1999).
- 9 - E. Lifchitz, L. Pitaevskii, « Physique Statistique », 2<sup>ème</sup> partie, Editions Mir.
- 10 - E. Gross, Nuovo Cimento, 20, 454 (1961).
- 11 - L. Pitaevskii, Zh. Eksp. Teor. Fiz. 40, 646 (1961)  
[Sov. Phys. JETP. 13, 451 (1961)]
- 12 - E. Lundh, C. Pethick, H. Smith, Phys. Rev. A55, 2126 (1997)
- 13 - A. Fetter, A. Svidzinsky, cond-mat/0102003
- 14 - R. Pathria, « Statistical Mechanics », Pergamon (1972)